Trazar las gráficas de las curvas siguientes dadas en coordenadas polares

6. $r^2 = \cos\theta$
7. $r^2 = \operatorname{sen}\theta$
8. (a) $r = \operatorname{sen}^2\theta$ (b) $r = \cos^2\theta$
9. $r = 4\operatorname{sen}^2\theta$
10. $r = 5$
11. $r = 4$
12. (a) $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
13. $r = 3/\cos\theta$
14. $r = 1 + \cos\theta$
15. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
16. $r = 1 - \cos\theta$
17. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$
18. $r = \operatorname{sen} 3\theta$
19. $r = \operatorname{sen} 4\theta$
20. $r = \cos 2\theta$
21. $r = \cos 3\theta$
22. $r = |\cos 2\theta|$
23. $r = |\operatorname{sen} 3\theta|$
24. $r = |\cos 3\theta|$
25. $r = \theta$
26. $r = 1/\theta$

En los tres problemas siguientes poner la ecuación en coordenadas rectangulares y trazar la curva.

27. $r = \dfrac{1}{1-\cos\theta}$
28. $r = \dfrac{2}{2-\cos\theta}$
29. $r = \dfrac{4}{1+2\cos\theta}$

Trazar las curvas siguientes dadas en coordenadas polares.

30. $r = \tan\theta$
31. $r = 5 + 2\operatorname{sen}\theta$
32. $r = |1 + 2\cos\theta|$
33. (a) $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$
    (b) $r = 2 - \operatorname{sen} 2\theta$
34. $\theta = \pi$
35. $\theta = \pi/2$
36. $\theta = -\pi/2$
37. $\theta = 5\pi/4$
38. $\theta = 3\pi/2$
39. $\theta = 3\pi/4$

CAPÍTULO V

El teorema del valor medio

Dada una curva $y = f(x)$, usaremos la derivada para obtener información acerca de la curva. Por ejemplo, hallaremos el máximo y el mínimo de la gráfica y las regiones donde la curva crece o decrece. Usaremos el teorema del valor medio, que es fundamental en la teoría de las derivadas.

V, §1. TEOREMA DEL MÁXIMO Y EL MÍNIMO

Definición. Sea f una función diferenciable. Un **punto crítico** de f es un número c tal que

$$f'(c) = 0.$$

El hecho de que la derivada sea cero significa que la pendiente de la recta tangente es 0 y, por ello, que la recta tangente misma es horizontal. He aquí tres ejemplos de este fenómeno.

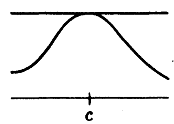


Figura 1

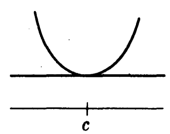


Figura 2

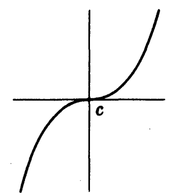


Figura 3

El tercer ejemplo es una función como $f(x) = x^3$. Tenemos que $f'(x) = 3x^2$ y, por lo tanto, cuando $x = 0$, $f'(0) = 0$.

Los otros dos ejemplos son los de un máximo y un mínimo, respectivamente, viendo la gráfica de la función sólo alrededor de nuestro punto c. Formalizaremos ahora estos conceptos.

Sean a y b dos números con $a < b$. Se empleará repetidamente el intervalo de números entre a y b, a veces incluyendo los puntos extremos a y b, y a veces no. Recordemos la terminología usual.

La colección de números x tales que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** entre a y b.

La colección de números x tales que $a \leq x \leq b$ se llama **intervalo cerrado** entre a y b. Denotamos este intervalo cerrado mediante los símbolos $[a, b]$. (Un solo punto será también un intervalo cerrado.)

Si deseamos incluir sólo un punto extremo, diremos que el intervalo es **semicerrado.** Es evidente que hay dos intervalos semicerrados, a saber el formado por los números x con $a \leq x < b$ y el otro que consta de los números x con $a < x \leq b$.

Si a es un número, a la colección de números $x > a$ (o $x < a$) en ocasiones se le llama intervalo abierto. El contexto ayudará a comprender esto mejor.

Sea f una función y c un número en el que está definida f.

Definición. Diremos que c es un **punto máximo** de la función f si, y sólo si,

$$f(c) \geq f(x)$$

para todos los números x en los que está definido f. Si la condición $f(c) \geq f(x)$ se cumple para todos los números x en algún intervalo, decimos entonces que la **función tiene un máximo en c en ese intervalo.** Llamamos **valor máximo** a $f(c)$.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces f tiene un máximo en $\pi/2$ porque $f(\pi/2) = 1$ y $\operatorname{sen} x \leq 1$ para todos los valores de x. Esto se ilustra en la figura 4. Nótese que $-3\pi/2$ también es un máximo para $\operatorname{sen} x$.

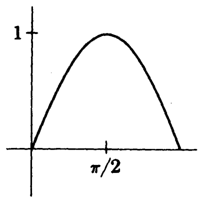


Figura 4

Ejemplo 2. Sea $f(x) = 2x$, y vean a f como una función definida sólo en el intervalo

$$0 \leq x \leq 2.$$

Entonces la función tiene un máximo en 2 en este intervalo porque $f(2) = 4$ y $f(x) \leq 4$ para todo x en el intervalo. Esto se ilustra en la figura 5.

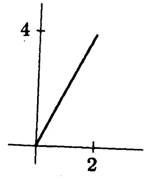


Figura 5

Ejemplo 3. Sea $f(x) = 1/x$. Sabemos que f no está definida para $x = 0$. Esta función no tiene máximo: se vuelve arbitrariamente grande cuando x se acerca a 0 y $x > 0$. Esto se ilustra en la figura 6.

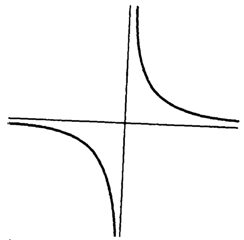


Figura 6

Definición. Un **punto mínimo** para f es un número c tal que

$$f(x) \geq f(c) \quad \text{para todo } x \text{ donde está definida } f.$$

Un **valor mínimo** para la función es el valor $f(c)$, tomado en un punto mínimo.

Ilustramos varios mínimos con las gráficas de ciertas funciones.

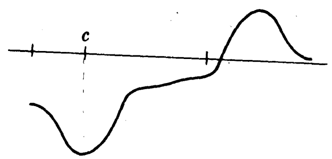


Figura 7

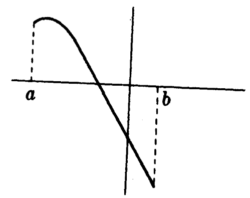


Figura 8

En la figura 7 la función tiene un mínimo. En la figura 8 el mínimo está en el extremo del intervalo. En las figuras 3 y 6 la función no tiene mínimo.

En la figura siguiente, el punto c_1 se ve como un máximo y el punto c_2 se ve como un mínimo, siempre que se permanezca cerca de esos puntos y no se vea lo que sucede en otros lugares de la curva.

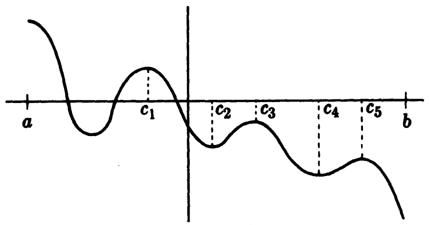


Figura 9

Hay un nombre para dichos puntos. Diremos que un punto c es un **mínimo local** o un **mínimo relativo** de la función f si existe un intervalo

$$a_1 < c < b_1$$

tal que $f(c) \leq f(x)$ para todos los números x con $a_1 \leq x \leq b_1$.

La noción de **máximo local** o **máximo relativo** se define de manera análoga. (Hacerlo.) En la figura 9 el punto c_3 es un máximo local, c_4 es un mínimo local y c_5 es un máximo local.

El máximo y el mínimo reales están en los puntos extremos.

Usando las propiedades básicas de los números podemos probar el teorema siguiente, el cual es tan obvio que omitimos la demostración.

Teorema 1.1. *Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un punto en el intervalo donde f tiene un máximo y existe un punto donde f tiene un mínimo.*

Deseamos tener alguna idea del margen de valores de la función dada. El siguiente teorema brinda esta información.

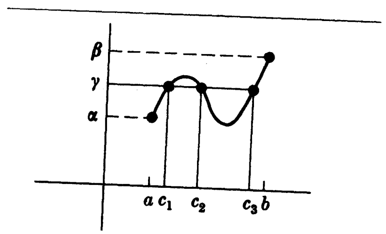
Teorema 1.2. Teorema del valor intermedio. *Sea f una función continua sobre el intervalo $[a, b]$. Sea $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$. Sea γ un número entre α y β. Por ejemplo, si $\alpha < \beta$, sea $\alpha < \gamma < \beta$ y, si $\alpha > \beta$, entonces sea*

$$\alpha > \gamma > \beta.$$

Entonces existe un número c tal que $a < c < b$ y tal que

$$f(c) = \gamma.$$

El teorema es intuitivamente obvio, pues una función continua no tiene saltos, como se ilustra en la figura de la página siguiente. La demostración pertenece al conjunto de ideas del apéndice sobre épsilon y delta y puede omitirse sin peligro. Cabe mencionar que puede haber varios puntos c en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$. En la figura hay tres de dichos puntos, denominados c_1, c_2 y c_3.



Como se ha comentado, el punto donde f tiene un máximo puede ser uno de los puntos extremos del intervalo. Sin embargo, cuando dicho punto no es un punto extremo y la función es diferenciable, la situación es análoga a la de las figuras 4 o 9, donde vemos que la tangente a la curva en ese punto es una recta horizontal; en otras palabras, la derivada de la función es 0. Podemos probar esto en forma de teorema.

Teorema 1.3. *Sea f una función que está definida y es diferenciable en el intervalo abierto $a < x < b$. Sea c un número en el intervalo en el cual la función tiene un máximo local o un mínimo local. Entonces*

$$f'(c) = 0.$$

Demostración. Esta demostración corresponde al caso de un máximo local. Si se toman valores pequeños de h (positivos o negativos), el número $c + h$ estará en el intervalo. Hallemos el límite del cociente de Newton conforme nos acercamos a c por la derecha y por la izquierda, y de esa manera se determinará el valor $f'(c)$.

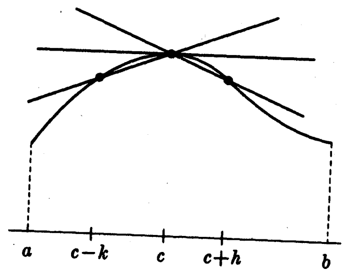


Figura 10

Tomemos primero h positivo (ver la figura 10). Debemos tener

$$f(c) \geq f(c + h)$$

sin importar cómo sea h (siempre que sea pequeño), pues $f(c)$ es el máximo local. Por lo tanto, $f(c + h) - f(c) \leq 0$. Como $h > 0$, el cociente de Newton satisface

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0.$$

En consecuencia, el límite es ≤ 0 o, en símbolos:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0.$$

Tomemos ahora h negativo, digamos $h=-k$ con $k>0$. Entonces

$$f(c-k)-f(c) \leq 0, \qquad f(c)-f(c-k) \geq 0$$

y el cociente es

$$\frac{f(c-k)-f(c)}{-k} = \frac{f(c)-f(c-k)}{k}.$$

Así, el cociente de Newton es ≥ 0. Al tomar el límite cuando h (o k) tiende a 0, vemos que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0.$$

La única manera en que estos dos límites pueden ser iguales es que ambos sean 0. Por lo tanto, $f'(c)=0$. Esto concluye la demostración.

Podemos interpretar geométricamente estos argumentos diciendo que la recta entre nuestros dos puntos se inclina hacia la izquierda cuando tomamos $h<0$ y se inclina hacia la derecha cuando tomamos $h>0$. Conforme h tiende a 0, ambas rectas deben tender a la recta tangente a la curva. La única manera en que esto es posible es que la recta tangente en el punto cuya abscisa es c, sea horizontal. Esto significa que su pendiente es 0, i.e. $f'(c)=0$.

En la práctica, una función usualmente tiene sólo un número finito de puntos críticos, y es fácil hallar todos los puntos c tales que $f'(c)=0$. Se puede entonces determinar por inspección cuáles de éstos son máximos, cuáles son mínimos y cuáles no son ni lo uno ni lo otro.

Ejemplo 4. Hallar los puntos críticos de la función $f(x)=x^3-1$.

Tenemos $f'(x)=3x^2$. Por lo tanto, hay un solo punto crítico, a saber, $x=0$, pues $3x^2=0$ sólo cuando $x=0$.

Ejemplo 5. Hallar los puntos críticos de la función

$$y = x^3-2x+1.$$

La derivada es $3x^2-2$. Es igual a 0 precisamente cuando

$$x^2=\tfrac{2}{3},$$

lo cual significa que $x=\sqrt{2/3}$ o $-\sqrt{2/3}$. Éstos son los puntos críticos.

En las siguientes secciones hallaremos varias maneras de ver si el punto crítico es un máximo o un mínimo local. En casos sencillos, con sólo esbozar la curva se puede determinar esto mediante inspección.

V, §1. EJERCICIOS

Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones.

1. x^2-2x+5
2. $2x^2-3x-1$
3. $3x^2-x+1$
4. $-x^2+2x+2$
5. $-2x^2+3x-1$
6. x^3+2
7. x^3-3x
8. $\operatorname{sen} x+\cos x$
9. $\cos x$
10. $\operatorname{sen} x$

V, §2. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea f una función definida en algún intervalo (que puede ser abierto o cerrado).

Definición. Diremos que f es **creciente** sobre este intervalo si

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

cada vez que x_1 y x_2 sean dos puntos del intervalo tales que

$$x_1 \leq x_2.$$

Así, si un número está a la derecha de otro, el valor de la función en el número mayor debe ser mayor o igual que el valor de la función en el número menor.

En la figura siguiente hemos trazado la gráfica de una función creciente.

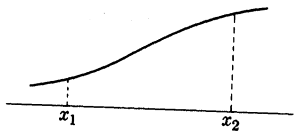


Figura 11

Decimos que una función definida en algún intervalo es **decreciente** en ese intervalo si

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

cada vez que x_1 y x_2 sean dos puntos del intervalo tales que $x_1 \leq x_2$.

Observamos que una función constante (cuya gráfica es horizontal) es creciente y decreciente.

Si queremos omitir el signo de igualdad en nuestras definiciones, usaremos la palabra **estrictamente** para calificar a creciente o decreciente. Así, una función f es **estrictamente creciente** si

$$x_1 < x_2 \quad \text{implica} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

y f es **estrictamente decreciente** si

$$x_1 < x_2 \quad \text{implica} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Supongamos que una función tiene una derivada positiva en todo un intervalo, como se muestra, por ejemplo, en la figura 11. Entonces se puede interpretar esto como que la razón de cambio de la función siempre es positiva y, por lo tanto, que la función siempre es creciente. Enunciamos esto como un teorema.

Teorema 2.1. *Sea f una función que es continua en algún intervalo, y diferenciable en el intervalo (excluyendo los puntos extremos).*

Si $f'(x) > 0$ en el intervalo (excluyendo los puntos extremos), entonces f es estrictamente creciente.

Si $f'(x) < 0$ en el intervalo (excluyendo los puntos extremos), entonces f es estrictamente decreciente.

Si $f'(x) = 0$ en el intervalo (excluyendo los puntos extremos), entonces f es constante.

En esta última afirmación, la hipótesis de que $f'(x) = 0$ en el intervalo significa que la razón de cambio es 0, así que es plausible que la función sea constante. En la sección §3 puede verse cómo se ubican estas afirmaciones en un contexto más formal.

Aplicación. Gráficas de parábolas

Ejemplo. Graficar la curva

$$y = f(x) = x^2 - 3x + 5,$$

la cual, como ya se sabe desde el capítulo II, es una parábola. Tratamos aquí la gráfica por el método que funciona en los casos más generales. Primero tenemos

$$f'(x) = 2x - 3,$$

y

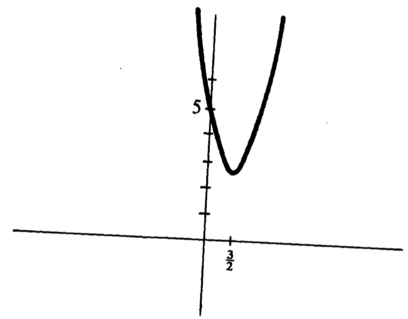
$f'(x) = 0$	si, y sólo si,	$x = 3/2$,	de modo que $x = 3/2$ es el único punto crítico.
$f'(x) > 0$	si, y sólo si,	$2x - 3 > 0$	
	si, y sólo si,	$x > 3/2$.	
$f'(x) < 0$	si, y sólo si,	$x < 3/2$.	

Así, la función es estrictamente creciente para $x > 3/2$ y estrictamente decreciente para $x < 3/2$. De este modo, al usar la derivada podemos hallar el pico de la parábola.

Los puntos donde $f(x) = 0$, esto es, donde la gráfica cruza al eje x, están dados por la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}.$$

No existen tales puntos, por lo que la gráfica se ve como en la página siguiente.



Observen que, aunque no conociéramos la apariencia general de una parábola, podríamos deducirla ahora y sabríamos que $x = 3/2$ es un punto mínimo de la gráfica. Esto es porque $f(x)$ es estrictamente decreciente para $x < 3/2$ y estrictamente creciente para $x > 3/2$. Así $x = 3/2$ debe ser un mínimo.

Ejemplo. Esbozar la gráfica de

$$y = f(x) = x^2 - 5x + 9/4.$$

Ahora tenemos

$$f'(x) = 2x - 5,$$

En consecuencia, hay exactamente un punto crítico, a saber:

$f'(x) = 0$	si, y sólo si,	$x = 5/2$.
$f'(x) > 0$	si, y sólo si,	$2x - 5 > 0$
	si, y sólo si,	$x > 5/2$.
$f'(x) < 0$	si, y sólo si,	$2x - 5 < 0$
	si, y sólo si,	$x < 5/2$.

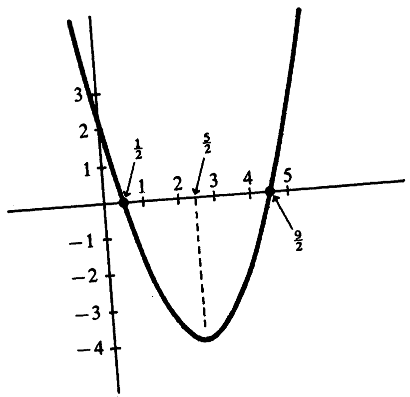
De modo que f es estrictamente creciente para $x > 5/2$ y estrictamente decreciente para $x < 5/2$. Por lo tanto, f tiene un mínimo en $x = 5/2$.

Los cruces de la gráfica de f con el eje x son

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}.$$

Definición. Los cruces de la gráfica de f con el eje x también se llaman **raíces** de f. En el caso de un polinomio cuadrático, las raíces se calculan mediante la fórmula cuadrática.

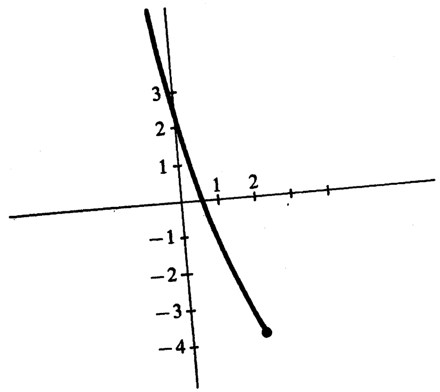
Por lo tanto, la gráfica de f se ve como en la página siguiente.



En los ejemplos anteriores la función estaba definida para todos los números. En el ejemplo siguiente la función está definida sólo en un intervalo.

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2 - 5x + 9/4$. Hallar el mínimo y el máximo de f para $x \leq 2$.

Por el ejemplo anterior sabemos que f es estrictamente decreciente para $x \leq 2$, por lo cual el mínimo está en el punto extremo del intervalo, que es $x = 2$, como se muestra en la figura. Noten que en este punto extremo, $f'(2) \neq 0$. Así, el criterio de los puntos críticos es válido sólo en intervalos abiertos.



La expresión "si y sólo si" se presentará con frecuencia, por lo que usaremos un símbolo para representarla; escribiremos

$\Longleftrightarrow$ como abreviación de "si, y sólo si,"

Así pues, podemos escribir la afirmación:

$$x^2 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{3}.$$

De manera análoga,

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ejemplo. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el que tiene menor perímetro es un cuadrado.

Sea a el área dada y sea x la longitud de un lado del rectángulo posible con área a. Expresaremos el perímetro como una función $f(x)$. Después diferenciamos con respecto a x, teniendo en mente que a es constante, y esto dará un valor para x que muestre que el rectángulo es un cuadrado. Para efectuar esto, tomamos $0 < x$ porque el lado de un rectángulo real no puede ser 0 o tener longitud negativa. Si y es la longitud del otro lado, entonces $xy = a$, de modo que $y = a/x$ es la longitud del otro lado. Por lo tanto, el perímetro es

$$f(x) = 2\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Tenemos

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{a}{x^2}\right),$$

y:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 - a}{x^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - a = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 = a \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{a}, \end{aligned}$$

porque consideramos sólo a $x > 0$. Así, el único punto crítico de f para $x > 0$ es cuando $x = \sqrt{a}$. Más aún, $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$. Por lo tanto, la fracción $(x^2 - a)/x^2$ es positiva si, y sólo si, su numerador $x^2 - a$ es positivo. Así:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - a > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 > a \quad \Longleftrightarrow \quad x > \sqrt{a}, \\ f'(x) < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - a < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 < a \quad \Longleftrightarrow \quad x < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f \quad \text{es estrictamente creciente} \quad &\Longleftrightarrow \quad x > \sqrt{a}, \\ f \quad \text{es estrictamente decreciente} \quad &\Longleftrightarrow \quad x < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

De modo que, finalmente, $x = \sqrt{a}$ es un mínimo para f. Cuando $x = \sqrt{a}$ tenemos también que $y = \sqrt{a}$ porque

$$y = a/x = a/\sqrt{a}.$$

Esto prueba que el rectángulo es un cuadrado.

Ejemplo. Mostrar que entre todas las cercas rectangulares de longitud dada, la que abarca la mayor área debe ser una cuadrada.

Para esto, sea c la longitud fija y sea x uno de los lados. Si y es el otro lado, entonces

$$2x + 2y = c,$$

de modo que $y = (c-2x)/2$. Por lo tanto, el área abarcada por la cerca es igual a

$$xy = \frac{x(c-2x)}{2} = \frac{xc-2x^2}{2} = A(x).$$

Esta área $A(x)$ es una función de x, la cual tiene un punto crítico cuando $A'(x) = 0$. Pero

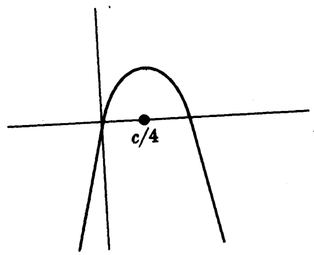
$$A'(x) = \tfrac{1}{2}(c-4x).$$

Así, $A'(x) = 0$ si, y sólo si, $c = 4x$, esto es, $x = c/4$ es el único punto crítico.

Debemos ver ahora que es un máximo. La función

$$A(x) = \frac{xc-2x^2}{2}$$

tiene una gráfica que es una parábola. Cuando x se vuelve positivo o negativo grande, entonces $A(x)$ se vuelve negativo grande. Por lo tanto, la parábola se ve como en la figura siguiente.



Sólo tiene un máximo y ese máximo debe estar entonces en $x = c/4$. Hallamos entonces que también $y = c/4$. En otras palabras, la cerca debe formar un cuadrado.

Desigualdades

El criterio de la derivada para funciones crecientes y decrecientes también se puede usar para probar desigualdades.

Ejemplo. Probar que $\operatorname{sen} x < x$ para todo $x > 0$.

Sea $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Entonces

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

En primer lugar tomamos $0 < x < \pi/2$. Entonces $f'(x) > 0$ pues $\cos x < 1$ en este intervalo. Por lo tanto, $f(x)$ es estrictamente decreciente para $0 \le x \le \pi/2$. Pero

$$f(0) = 1 - \cos 0 = 0.$$

Por eso debemos tener $f(x) > 0$ para $0 < x \le \pi/2$.

Si $x \ge \pi/2$, entonces $x > 1$ (pues π es aproximadamente 3.14), y así $\operatorname{sen} x < x$ cuando $x > \pi/2$. En esta forma, la desigualdad deseada se cumple, por razones más sencillas, para $x > \pi/2$.

El ejemplo anterior ilustra una técnica que se usa para probar ciertas desigualdades entre funciones. En general:

> *Suponiendo que se tienen dos funciones f y g sobre cierto intervalo $[a,b]$ y que f y g son diferenciables, considerar que*
>
> $$f(a) \le g(a),$$
>
> *y que $f'(x) \le g'(x)$ en todo el intervalo. Entonces $f(x) \le g(x)$ en el intervalo.*

Demostración. Sea

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

Entonces, por hipótesis,

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \ge 0,$$

de modo que h es creciente en todo el intervalo. Como

$$h(a) = g(a) - f(a) \ge 0,$$

se sigue que $h(x) \ge 0$ en todo el intervalo, de donde

$$g(x) \ge f(x).$$

El principio recién enunciado se puede visualizar en la figura siguiente, trazada para el caso en que $f(a) = g(a)$.

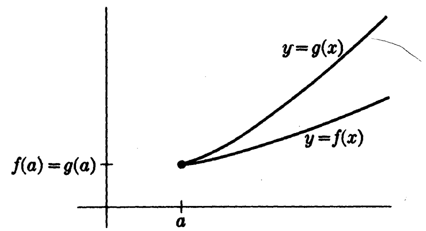


Figura 12

En otras palabras, si f es más grande o igual que g en $x = a$, y si f crece más rápido que g, entonces $f(x)$ es más grande que $g(x)$ para todo $x > a$.

Ejemplo. Mostrar que para cualquier entero $n \geq 1$ y cualquier número $x \geq 1$, tenemos la desigualdad

$$x^n - 1 \geq n(x-1).$$

Sea $f(x) = x^n - 1 - n(x-1)$. Entonces

$$f'(x) = nx^{n-1} - n.$$

Como $x \geq 1$, se sigue que $x^{n-1} \geq 1$ y, así, $f'(x) \geq 0$. Por lo tanto, f es creciente para $x \geq 1$. Pero $f(1) = 0$. Por lo que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 1$. Esto es equivalente a la desigualdad deseada.

Por otro lado, el siguiente teorema indica lo que sucede si dos funciones tienen la misma derivada en un intervalo.

Constantes

Teorema 2.2. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables en algún intervalo y supongamos que*

$$f'(x) = g'(x)$$

para todo x en el intervalo. Entonces existe una constante C tal que

$$f(x) = g(x) + C$$

para todo x en el intervalo.

Demostración. Sea $h(x) = f(x) - g(x)$ la diferencia de nuestras dos funciones. Entonces

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Por lo tanto, $h(x)$ es constante, por el teorema 2.1, esto es, $h(x) = C$ para algún número C y todo x. Esto prueba el teorema.

Observación. El teorema es el *recíproco* del enunciado:
Si una función es constante, entonces su derivada es igual a 0.
Usaremos intensivamente el teorema 2.2 cuando lleguemos al capítulo de integración.

Para las aplicaciones del teorema, vean el principio del capítulo sobre logaritmos y también el principio del capítulo X, §1. Aquí daremos aplicaciones más sencillas.

Ejemplo. Sea f una función de x tal que $f'(x) = 5$. Suponer que $f(0) = 2$. Determinar completamente $f(x)$.

De nuestra experiencia anterior sabemos que la función

$$g(x) = 5x$$

tiene la derivada

$$g'(x) = 5.$$

Por lo tanto, existe una constante C tal que

$$f(x) = 5x + C.$$

También se establece que $f(0) = 2$. Por lo tanto,

$$2 = f(0) = 0 + C.$$

Entonces $C = 2$. Y, finalmente,

$$f(x) = 5x + 2.$$

Ejemplo. Una partícula se mueve sobre el eje x hacia la izquierda a razón de 5 cm/seg. Al tiempo $t = 5$, la partícula está en el punto 8 cm a la derecha del origen. Determinar completamente la abscisa $x = f(t)$ como función del tiempo.

Nos dan

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) = -5.$$

Sea $g(t) = -5t$. Entonces también $g'(t) = -5$, y por ende existe una constante C tal que

$$f(t) = -5t + C.$$

Pero también se sabe que $f(5) = 8$. Por lo tanto,

$$8 = -5 \cdot 5 + C = -25 + C.$$

En consecuencia, $C = 8 + 25 = 33$ y, por último,

$$f(t) = -5t + 33.$$

V, §2. EJERCICIOS

Determinar los intervalos sobre los cuales las funciones siguientes son crecientes y decrecientes.

1. $f(x) = x^3 + 1$
2. $f(x) = x^2 - x + 5$
3. $f(x) = x^3 + x - 2$
4. $f(x) = -x^3 + 2x + 1$
5. $f(x) = 2x^3 + 5$
6. $f(x) = 5x^2 + 1$
7. $f(x) = -4x^3 - 2x$
8. $f(x) = 5x^3 + 6x$

Esbozar las gráficas de las parábolas siguientes. Determinar en cada caso el punto crítico.

9. $f(x) = x^2 - x - 1$
10. $f(x) = x^2 + x + 1$
11. $f(x) = -x^2 + x - 1$
12. $f(x) = -x^2 - x - 1$
13. $f(x) = x^2 + 3x + 1$
14. $f(x) = x^2 - 5x + 1$
15. $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$
16. $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$

Para cada una de las funciones siguientes, hallar el máximo y el mínimo para todo x en el intervalo dado.

17. $x^2 - 2x - 8$, $[0, 4]$
18. $x^2 - 2x + 1$, $[-1, 4]$
19. $4 - 4x - x^2$, $[-1, 4]$
20. $x - x^2$, $[-1, 2]$
21. $3x - x^3$, $[-2, \sqrt{3}]$
22. $(x-4)^5$, $[3, 6]$
23. Los pasos siguientes muestran cómo se puede probar desigualdades para el seno y el coseno. Comenzamos con la desigualdad probada como ejemplo en el texto, a saber
(a) $\operatorname{sen} x \le x$ para todo $x \ge 0$.
Sea $f_1(x) = x - \operatorname{sen} x$. Entonces esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$f_1(x) \ge 0 \quad \text{para todo } x \ge 0. \tag{1}$$

Probar ahora que:
(b) $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x$ para $x \ge 0$.
[*Idea:* Sea $f_2(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ y usar (1), para probar

$$f_2(x) \ge 0 \quad \text{para todo } x \ge 0.] \tag{2}$$

(c) $x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} \le \operatorname{sen} x$. $\left[\textit{Idea: } \text{Sea } f_3(x) = \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 2}\right).\right]$
(d) $\cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2}$ (e) $\operatorname{sen} x \le x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$
24. Probar que $\tan x > x$ si $0 < x < \pi/2$.
25. (a) Probar que

$$t + \frac{1}{t} \ge 2 \quad \text{para} \quad t > 0.$$

[*Idea:* Sea $f(t) = t + 1/t$. Mostrar que f es estrictamente decreciente para $0 < t \le 1$ y f es estrictamente creciente para $1 \le t$. ¿Cuál es $f(1)$?]
(b) Sean a y b dos números positivos. Sea

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Mostrar que el valor mínimo de f es $2\sqrt{ab}$.
26. Se va a fabricar una caja sin tapa con una base cuadrada y una superficie constante C. Determinar los lados de la caja si el volumen ha de ser máximo.
27. Un recipiente en forma de cilindro sin tapa superior ha de tener un área de superficie fija C. Hallar el radio de su base y su altura si ha de tener volumen máximo.
28. Resolver los dos problemas anteriores cuando la caja y el recipiente están cerrados por arriba. (El área de un círculo de radio x es πx^2 y su longitud es de $2\pi x$. El volumen de un cilindro de altura y y cuya base tiene radio x es $\pi x^2 y$.)
29. Suponer que existe una función $f(x)$ tal que $f(x) \ne 0$ para todo x, y $f'(x) = f(x)$. Sea $g(x)$ cualquier función tal que $g'(x) = g(x)$. Mostrar que existe una constante C tal que $g(x) = Cf(x)$. [*Idea:* Diferenciar el cociente g/f.]

30. Suponer que f es una función diferenciable de t tal que (a) $f'(t) = -3$, (b) $f'(t) = 2$. ¿Qué pueden decir acerca de $f(t)$?
31. Suponer que $f'(t) = -3$ y $f(0) = 1$. Determinar completamente $f(t)$.
32. Suponer que $f'(t) = 2$ y $f(0) = -5$. Determinar completamente $f(t)$.
33. Una partícula se mueve sobre el eje x hacia la derecha a velocidad constante de 7 m/seg. Si al instante $t = 9$ la partícula está a una distancia de 2 m a la derecha del origen, hallar su abscisa como función de t.
34. Está goteando agua de un tanque vertical de manera que la altura del agua disminuye a razón de 0.6 m al día. Cuando el tanque está lleno, la altura del agua es de 9 m. Hallar de manera explícita la altura del agua como función del tiempo.

V, §3. EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Los teoremas de esta sección se pueden deducir intuitivamente, por lo cual, si lo desean, pueden omitir las demostraciones del teorema de Rolle y del teorema 3.2, pero **después de haber comprendido su enunciado.**

Primero supongamos que tenemos una función sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ cuya gráfica se ve así.

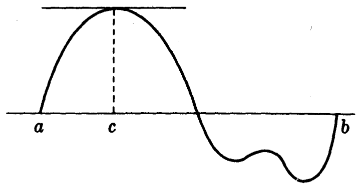


Figura 13

Entonces tenemos el siguiente teorema acerca de esta función.

Teorema 3.1. Teorema de Rolle. *Sean a y b dos números, $a < b$. Sea f una función continua en el intervalo cerrado*

$$a \le x \le b$$

y diferenciable en el intervalo abierto $a < x < b$. Supongamos que

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Entonces existe un punto c tal que

$$a < c < b$$

y tal que $f'(c) = 0$.

Demostración. Si la función es constante en el intervalo, entonces su derivada es 0 y cualquier punto en el intervalo abierto $a < x < b$ servirá.

Si la función no es constante, entonces existe algún punto en el intervalo donde la función no es 0, y este punto no puede ser uno de los puntos extremos a o b. Supongamos que algún valor de nuestra función es positivo. Por el teorema 1.1, la función tiene un máximo en un punto c. Entonces $f(c)$ debe ser mayor que 0, y c no puede ser uno de los puntos extremos porque $f(a) = f(b) = 0$. En consecuencia,

$$a < c < b.$$

Por el teorema 1.3, debemos tener $f'(c) = 0$. Esto prueba nuestro teorema en caso de que la función sea positiva en algún lugar del intervalo.

Si la función es negativa para algún número en el intervalo, entonces usamos el teorema 1.1 para obtener un mínimo y argumentamos de manera similar, usando el teorema 1.3 (aplicado a un mínimo). (Escribir, como ejercicio, toda la argumentación.)

Sea $f(x)$ una función diferenciable para $a < x < b$ y continua en el intervalo cerrado

$$a \le x \le b.$$

Seguimos suponiendo que $a < b$. Esta vez no consideraremos que $f(a) = f(b) = 0$, como en el teorema 3.1. Probaremos que existe un punto c entre a y b tal que la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$ es la misma que la pendiente de la recta entre los puntos extremos de nuestra gráfica. En otras palabras, la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos extremos de nuestra gráfica.

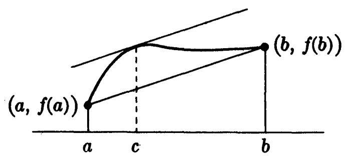


Figura 14

La pendiente de la recta entre los dos puntos extremos es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

pues las coordenadas de los puntos extremos son $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ respectivamente. Así, tenemos que hallar un punto c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 3.2. Teorema del valor medio. *Sea $a < b$ como antes. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $a \le x \le b$ y diferenciable en el intervalo $a < x < b$. Entonces existe un punto c tal que $a < c < b$ y*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. La ecuación de la recta entre los dos puntos extremos es

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

En efecto, la pendiente

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es el coeficiente de x. Cuando $x = a$, $y = f(a)$. Por lo tanto, hemos escrito la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por un punto dado. Cuando $x = b$ notamos que $y = f(b)$.

Consideremos ahora geométricamente la diferencia entre $f(x)$ y la recta. Dicha diferencia se vuelve 0 en los puntos extremos. Esta idea geométrica nos permite aplicar el teorema de Rolle. En otras palabras, consideramos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Entonces

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

y también

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0.$$

Podemos entonces aplicar el teorema 3.1 a la función $g(x)$. Sabemos que existe un punto c entre a y b, y que no es igual ni a a ni a b, tal que

$$g'(c) = 0$$

Pero

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En consecuencia

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esto nos da el valor deseado para $f'(c)$, y concluye la demostración.

El objetivo del teorema del valor medio no es tanto hallar explícitamente un valor c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

sino usarlo para consideraciones teóricas.

Corolario 3.3. *Sea f una función diferenciable en algún intervalo y tal que $f'(x) = 0$ para todo x en el intervalo. Entonces f es constante.*

Demostración. Sean a y b números distintos en el intervalo. Por el teorema del valor medio, existe c entre a y b tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero, por hipótesis, $f'(c) = 0$. Por ello, $f(b) - f(a) = 0$ y así $f(b) = f(a)$. Por lo tanto, f tiene el mismo valor en todos los puntos del intervalo, de modo que f es constante, como se debía demostrar.

Del mismo modo daremos ahora el resto de la demostración del teorema 2.1 de la sección anterior:

Corolario 3.4. *Si $f'(x) > 0$ para x en un intervalo, excluyendo los puntos extremos, y si f es continua en el intervalo, entonces f es estrictamente creciente.*

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos puntos del intervalo, y supongamos que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, existe un punto c tal que $x_1 < c < x_2$ y

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

La diferencia $x_2 - x_1$ es positiva, y tenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Si la derivada $f'(x)$ es > 0 para todo x en el intervalo, excluyendo los puntos extremos, entonces $f'(c) > 0$ (porque c está en el intervalo). Por lo tanto, el producto $(x_2 - x_1)f'(c)$ es positivo, y $f(x_2) - f(x_1) > 0$, de modo que

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Esto prueba que la función es creciente.

Dejamos como ejercicio la demostración de la afirmación que se refiere a las funciones decrecientes.

Cuando estudiemos la fórmula de Taylor usaremos los teoremas del valor medio para estimar varias funciones. Aunque no se conozca el valor exacto de $f'(c)$, se puede tener un estimado para la derivada. Por ejemplo, las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se pueden estimar en valor absoluto por 1. En muchas aplicaciones, esto es lo que cuenta.

CAPÍTULO VI

Trazado de curvas

Hemos desarrollado técnicas suficientes para poder trazar ahora curvas y gráficas de funciones con una eficiencia mucho mayor. Investigaremos de manera sistemática el comportamiento de una curva, donde el teorema del valor medio desempeña un papel fundamental.

Estudiaremos de manera especial los siguientes aspectos de la curva:

1. Intersecciones con los ejes coordenados.
2. Puntos críticos.
3. Regiones de crecimiento.
4. Regiones de decrecimiento.
5. Máximos y mínimos (incluyendo los locales).
6. Comportamiento cuando x se hace positivo grande y negativo grande.
7. Valores de x cerca de donde y se hace positivo grande o grande negativo.

Estos siete puntos de información serán suficientes para darnos una idea bastante precisa de cómo luce una gráfica. Dedicaremos una sección a considerar otro aspecto, a saber:

8. Regiones en donde la curva se dobla hacia arriba o hacia abajo.

VI, §1. COMPORTAMIENTO CUANDO x SE HACE MUY GRANDE

Supongamos que se tiene una función f definida para todos los números suficientemente grandes. En ese caso podemos obtener información significativa referente a nuestra función si investigamos cómo se comporta cuando x se hace grande.

Por ejemplo, $\operatorname{sen} x$ oscila entre -1 y $+1$ sin importar cuán grande sea x.

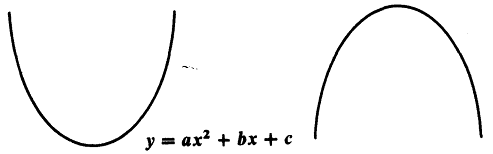
Sin embargo, los polinomios no oscilan. Cuando $f(x) = x^2$, si x se hace positivo grande, también lo hará x^2. Lo mismo sucede con x^3, o x^4 (etc.). Consideraremos esto sistemáticamente.

Parábolas

Ejemplo 1. Considerar una parábola

$$y = ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$. Hay dos casos esenciales, cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$, y las parábolas respectivas se ven como en la figura.



Caso $a > 0$ Caso $a < 0$

Veamos los ejemplos numéricos.

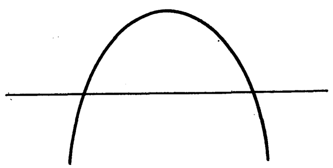
Ejemplo 2. Trazar la gráfica de la curva

$$y = f(x) = -3x^2 + 5x - 1.$$

Reconocemos esto como una parábola. Factorizando x^2 se ve que

$$f(x) = x^2\left(-3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Cuando x es positivo o negativo grande, entonces x^2 es positivo grande y el factor de la derecha está cerca de -3. Por lo tanto, $f(x)$ es negativo grande, lo cual significa que la parábola tiene la forma mostrada en la figura.



Tenemos que $f'(x) = -6x + 5$. Así, $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $-6x + 5 = 0$ o, en otras palabras,

$$x = \tfrac{5}{6}.$$

Hay exactamente un punto crítico. Tenemos

$$f(\tfrac{5}{6}) = -3(\tfrac{5}{6})^2 + \tfrac{25}{6} - 1 > 0.$$

El punto crítico es un máximo, pues ya hemos visto que la parábola se dobla hacia abajo.

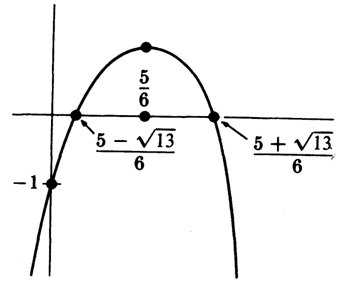
La curva cruza el eje x exactamente cuando

$$-3x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Por la fórmula cuadrática (ver el capítulo II, §8), esto sucede cuando

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{-6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Por consiguiente, la gráfica de la parábola se ve como en la figura.



Se aplican los mismos principios para trazar cualquier parábola.

(i) Al ver lo que sucede cuando x se vuelve positivo grande o negativo grande sabremos si la parábola se dobla hacia arriba o hacia abajo.

(ii) Una función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

tiene un solo punto crítico, cuando

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

es decir, cuando

$$x = -b/2a.$$

Sabiendo si la parábola se dobla hacia arriba o hacia abajo se sabe si el punto crítico es un máximo o un mínimo, y el valor $x = -b/2a$ indica exactamente dónde está el punto crítico.

(iii) Los puntos donde la parábola cruza el eje x se determinan por la fórmula cuadrática.

Ejemplo 3. **Cúbicas.** Considerar un polinomio

$$f(x) = x^3 + 2x - 1.$$

Podemos escribirlo en la forma

$$x^3\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right).$$

Cuando x se vuelve muy grande, la expresión

$$1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$$

tiende a 1. En particular, dado un número pequeño $\delta > 0$, tenemos, para todo x suficientemente grande, la desigualdad

$$1-\delta < 1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3} < 1+\delta.$$

Por lo tanto, $f(x)$ satisface la desigualdad

$$x^3(1-\delta) < f(x) < x^3(1+\delta).$$

Esto nos dice que $f(x)$ se comporta de manera muy parecida a como lo hace x^3 cuando x es muy grande. En particular:

Si x se vuelve positivo grande, entonces $f(x)$ se vuelve positivo grande.

Si x se vuelve negativo grande, entonces $f(x)$ se vuelve negativo grande.

Se puede aplicar un argumento similar a cualquier polinomio.

Es conveniente usar una abreviación para la expresión "se vuelve positivo grande." En lugar de decir que x se vuelve positivo grande, escribimos

$$x \to \infty$$

y decimos además que x **tiende, o va a infinito. Advertencia: no existe un número llamado infinito.** Los símbolos anteriores simplemente abrevian el concepto de volverse positivo grande. Tenemos una notación similar para cuando x se vuelve negativo grande: escribimos

$$x \to -\infty$$

y decimos que x **tiende a menos infinito.** Así, en el caso de que

$$f(x) = x^3+2x-1,$$

podemos afirmar:

$$\text{Si} \quad x\to\infty, \quad \text{entonces} \quad f(x)\to\infty.$$

$$\text{Si} \quad x\to-\infty, \quad \text{entonces} \quad f(x)\to-\infty.$$

Ejemplo 4. Considerar un cociente de polinomios como

$$Q(x)=\frac{x^3+2x-1}{2x^3-x+1}.$$

Factorizamos la potencia mayor de x del numerador y del denominador y, por lo tanto, escribimos $Q(x)$ en la forma

$$Q(x)=\frac{x^3(1+2/x^2-1/x^3)}{x^3(2-1/x^2+1/x^3)}=\frac{1+2/x^2-1/x^3}{2-1/x^2+1/x^3}.$$

Cuando x se vuelve muy grande, el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a 2. Así, nuestra fracción tiende a $\frac{1}{2}$. Podemos expresar esto en la forma

$$\lim_{x\to\infty} Q(x)=\frac{1}{2}.$$

O podemos escribir:

$$\text{Si} \quad x\to\pm\infty, \quad \text{entonces} \quad Q(x)\to\tfrac{1}{2}.$$

Ejemplo 5. Considerar el cociente

$$Q(x)=\frac{x^2-1}{x^3-2x+1}.$$

¿Tiende éste a algún límite cuando x se vuelve muy grande?

Escribimos

$$Q(x)=\frac{x^2(1-1/x^2)}{x^3(1-2/x^2+1/x^3)}$$

$$=\frac{1}{x}\frac{1-1/x^2}{1-2/x^2+1/x^3}.$$

Conforme x se vuelve grande, el término $1/x$ tiende a 0, y el otro factor tiende a 1. Por lo tanto, $Q(x)$ tiende a 0 cuando x se vuelve negativo o positivo grande.

También podemos escribir

$$\text{Si} \quad x\to\pm\infty \quad \text{entonces} \quad Q(x)\to 0,$$

o

$$\lim_{x\to\pm\infty} Q(x)=0.$$

Ejemplo 6. Considerar el cociente

$$Q(x)=\frac{x^3-1}{x^2+5}$$

y determinar lo que sucede cuando x se vuelve grande.

Escribimos

$$Q(x)=\frac{x^3(1-1/x^3)}{x^2(1+5/x^2)}$$

$$=x\frac{1-1/x^3}{1+5/x^2}.$$

Conforme x se vuelve grande, positivo o negativo, el cociente

$$\frac{1-1/x^3}{1+5/x^2}$$

tiende a 1. Por lo tanto, $Q(x)$ difiere de x en un factor cercano a 1. Así pues, $Q(x)$ se vuelve positivo grande cuando x es positivo grande, y se vuelve negativo grande cuando x es negativo grande. Podemos expresar esto diciendo:

$$\text{Si } x \to \infty, \quad \text{entonces } Q(x) \to \infty.$$
$$\text{Si } x \to -\infty, \quad \text{entonces } Q(x) \to -\infty.$$

También podemos escribir estas afirmaciones en forma de límite:

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} Q(x) = -\infty.$$

Sin embargo, aunque se use esta notación y se pueda decir que el límite de $Q(x)$ es $-\infty$ cuando x se vuelve negativo grande, insistimos en que $-\infty$ no es un número, por lo que este límite no es igual que cuando el límite es un número. Es correcto decir que no existe número que sea el límite de $Q(x)$ cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Estos cuatro últimos ejemplos son típicos de lo que sucede cuando tratamos con cocientes de polinomios.

Más adelante, cuando tratemos con exponentes y logaritmos, se encontrará el problema de comparar el cociente de dos expresiones que se vuelven grandes. Habrá una base común para algunos argumentos, resumida en la tabla siguiente:

Positivo grande por positivo grande es positivo grande.
Positivo grande por negativo grande es negativo grande.
Negativo grande por negativo grande es positivo grande.
Positivo pequeño por positivo grande: no se puede saber sin tener más información.

VI, §1. EJERCICIOS

Hallar los límites de los siguientes cocientes $Q(x)$ cuando x se vuelve positivo o negativo, grande. En otras palabras, hallar

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} Q(x).$$

1. $\dfrac{2x^3 - x}{x^4 - 1}$
2. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
3. $\dfrac{\cos x}{x}$
4. $\dfrac{x^2 + 1}{\pi x^2 - 1}$
5. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x^3}$
6. $\dfrac{5x^4 - x^3 + 3x + 2}{x^3 - 1}$
7. $\dfrac{-x^2 + 1}{x + 5}$
8. $\dfrac{2x^4 - 1}{-4x^4 + x^2}$
9. $\dfrac{2x^4 - 1}{-4x^3 + x^2}$
10. $\dfrac{2x^4 - 1}{-4x^5 + x^2}$

Describir el comportamiento de los polinomios siguientes cuando x se vuelve positivo grande y negativo grande.

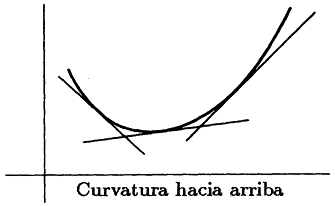
11. $x^3 - x + 1$
12. $-x^3 - x + 1$
13. $x^4 + 3x^3 + 2$
14. $-x^4 + 3x^3 + 2$
15. $2x^5 + x^2 - 100$
16. $-3x^5 + x + 1000$
17. $10x^6 - x^4$
18. $-3x^6 + x^3 + 1$
19. Una función $f(x)$ que se puede expresar como sigue:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

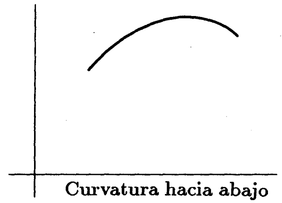
donde n es un entero positivo y las a_n, a_{n-1}, ..., a_0 son números, se llama polinomio. Si $a_n \neq 0$, entonces n se llama el **grado** del polinomio. Describir el comportamiento de $f(x)$ cuando x se vuelve positivo o negativo grande, n es impar o par, y $a_n > 0$ o $a_n < 0$. Habrá que considerar ocho casos y llenar la tabla siguiente.

n	a_n	$x \to \infty$	$x \to -\infty$
Impar	> 0	$f(x) \to ?$	$f(x) \to ?$
Impar	< 0	$f(x) \to ?$	$f(x) \to ?$
Par	> 0	$f(x) \to ?$	$f(x) \to ?$
Par	< 0	$f(x) \to ?$	$f(x) \to ?$

20. Usando el teorema del valor intermedio, mostrar que cualquier polinomio de grado impar tiene una raíz.



Curvatura hacia arriba



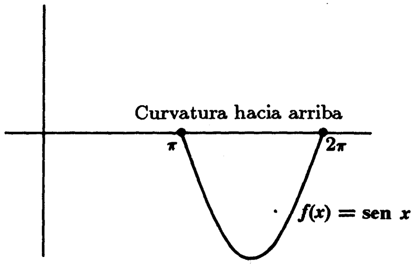
Curvatura hacia abajo

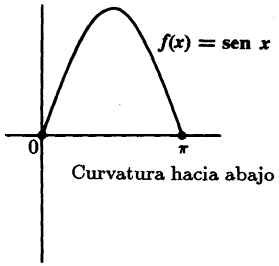
VI, §2. DOBLAMIENTOS HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO

Sean a y b números tales que $a < b$. Sea f una función continua definida en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que f' y f'' existen en el intervalo $a < x < b$. Se ve la segunda derivada f'' como la razón de cambio de la pendiente de la curva $y = f(x)$ sobre el intervalo. Si la segunda derivada es positiva en el intervalo $a < x < b$, entonces la pendiente de la curva es creciente, e interpretamos esto como una referencia a que la curva se **dobla hacia arriba**. Si la segunda derivada es negativa, interpretamos esto como una referencia a que la curva se **dobla hacia abajo**. Las dos figuras siguientes ilustran esto.

Ejemplo 1. La curva $y = x^2$ se dobla hacia arriba. Podemos ver esto usando la segunda derivada. Sea $f(x) = x^2$. Entonces $f''(x) = 2$, y la segunda derivada siempre es positiva. Las consideraciones presentes justifican que hayamos dibujado la curva como lo hicimos, doblada hacia arriba.

Ejemplo 2. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Tenemos $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, y así $f''(x) > 0$ en el intervalo $\pi < x < 2\pi$. Por lo tanto, la curva se dobla hacia arriba en ese intervalo. De manera análoga, $f''(x) < 0$ en el intervalo $0 < x < \pi$, por lo que la curva se dobla hacia abajo en este intervalo, según se muestra en las figuras siguientes. Por supuesto, esto justifica los dibujos que siempre hemos hecho para la gráfica de la función seno.





Ejemplo 3. Determinar los intervalos donde la curva

$$y = -x^3 + 3x - 5$$

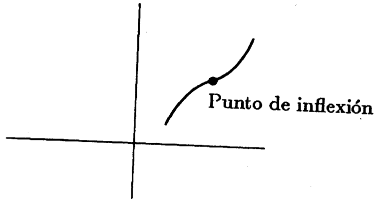
se dobla hacia arriba y se dobla hacia abajo.

Sea $f(x) = -x^3 + 3x - 5$. Entonces $f''(x) = -6x$. Así:

$$f''(x) > 0 \iff x < 0,$$
$$f''(x) < 0 \iff x > 0.$$

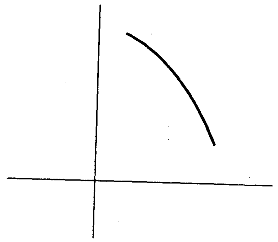
Por lo tanto, f se dobla hacia arriba si, y sólo si, $x < 0$; y f se dobla hacia abajo si, y sólo si, $x > 0$. La gráfica de esta curva se estudiará por completo en la sección siguiente, donde se grafican cúbicas sistemáticamente.

Un punto donde una curva cambia su comportamiento de doblarse hacia arriba para doblarse hacia abajo (o viceversa) se llama **punto de inflexión**. Si la curva es la gráfica de una función f cuya segunda derivada existe y es continua, entonces debemos tener $f''(x) = 0$ en ese punto. La siguiente figura ilustra esto.

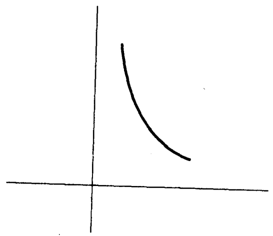


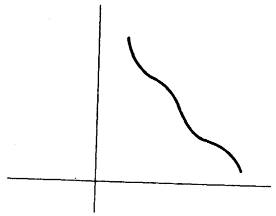
En el ejemplo 3 recién visto, el punto $(0, -5)$ es un punto de inflexión.

Al determinar las regiones donde se doblan hacia arriba o hacia abajo, y los puntos de inflexión, se tienen valiosos datos acerca de las curvas. Por ejemplo, saber que una curva en una región de decrecimiento se dobla hacia abajo indica que el decrecimiento sucede esencialmente como en esta figura:



y no como en estas otras:





La segunda derivada puede usarse además como un criterio para determinar el caso en el que un punto crítico es un máximo, o un mínimo, **local**.

Criterio de la segunda derivada. *Sea f dos veces continuamente diferenciable en un intervalo abierto y suponer que existe un punto c donde*

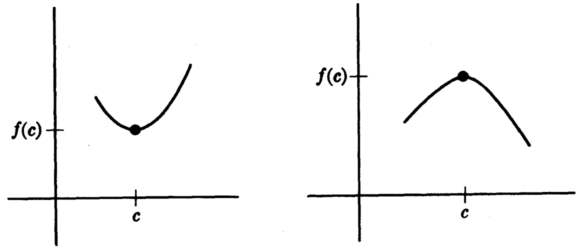
$$f'(c) = 0 \quad y \quad f''(c) > 0.$$

Entonces c es un punto mínimo local de f. Por otro lado, si

$$f''(c) < 0$$

entonces c es un punto máximo local de f.

Para ver esto, supongamos que $f''(c) > 0$. Entonces $f''(x) > 0$ para todo x cerca de c, pues se consideró que la segunda derivada es continua. Así, la curva se dobla hacia arriba; en consecuencia, la gráfica de f es como la figura 1(a) y c es un mínimo local.



(a) (b)

Figura 1

Un argumento similar demuestra que si $f''(c) < 0$, entonces c es un máximo local como en la figura 1(b).

VI, §2. EJERCICIOS

1. Determinar todos los puntos de inflexión de $\operatorname{sen} x$.
2. Determinar todos los puntos de inflexión de $\cos x$.
3. Determinar todos los puntos de inflexión de $f(x) = \tan x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$.
4. Trazar la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$. Determinar los puntos críticos y los puntos de inflexión. Comparar con la gráfica de $|\operatorname{sen} x|$.
5. Trazar la curva $y = \cos^2 x$. Determinar los puntos críticos y los puntos de inflexión. Comparar con la gráfica de $|\cos x|$.

Determinar los puntos de inflexión y los intervalos en donde se doblan hacia arriba, y donde lo hacen hacia abajo, las curvas siguientes.

6. $y = x + \dfrac{1}{x}$ 7. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ 8. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

9. Trazar la curva $y = f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ para $0 \le x \le 2\pi$. Primero localizar todos los valores $f(n\pi/4)$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Después determinar todos los puntos críticos. Después determinar las regiones de crecimiento y decrecimiento. Después determinar los puntos de inflexión y las regiones en donde la curva se dobla hacia arriba, y donde se dobla hacia abajo.

VI, §3. POLINOMIOS CÚBICOS

Podemos ahora trazar sistemáticamente las gráficas de polinomios cúbicos.

Ejemplo 1. Trazar la gráfica de $f(x) = x^3 - 2x + 1$.
1.

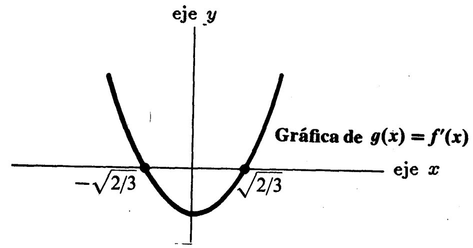
$$\text{Si}\quad x \to \infty,\quad \text{entonces, por §1,}\quad f(x) \to \infty.$$
$$\text{Si}\quad x \to -\infty,\quad \text{entonces, por §1,}\quad f(x) \to -\infty.$$

2. Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 2$. Así

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2/3}.$$

Los puntos críticos de f son $x = \sqrt{2/3}$ y $x = -\sqrt{2/3}$.

3. Sea $g(x) = f'(x) = 3x^2 - 2$. Entonces la gráfica de g es una parábola, y los cruces de la gráfica de g son precisamente los puntos críticos de f. (No se confundan las funciones f y $f' = g$.) La gráfica de g es una parábola doblada hacia arriba, como sigue.



Por lo tanto:

$$f'(x) > 0 \iff x > \sqrt{2/3}\ \text{ y }\ x < -\sqrt{2/3}, \quad \text{donde}\quad g(x) > 0$$

y f es estrictamente creciente en los intervalos

$$x \ge \sqrt{2/3} \quad \text{y} \quad x \le -\sqrt{2/3}.$$

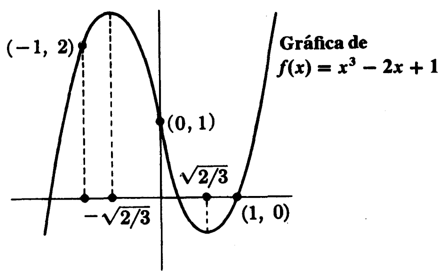
De manera análoga:

$$f'(x) < 0 \iff -\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}, \quad \text{donde}\quad g(x) < 0,$$

y f es estrictamente decreciente en este intervalo. Por lo tanto, $-\sqrt{2/3}$ es un máximo local para f, y $\sqrt{2/3}$ es un mínimo local.

4. $f''(x) = 6x$ y $f''(x) > 0$ si, y sólo si, $x > 0$. Además, $f''(x) < 0$ si, y sólo si, $x < 0$. Por lo tanto, f se dobla hacia arriba para $x > 0$ y se dobla hacia abajo para $x < 0$. Hay un punto de inflexión en $x = 0$.

Juntando todo esto hallamos que la gráfica de f se ve como lo muestra la figura de la página siguiente.



Obsérvese cómo usamos un polinomio cuadrático, a saber, $f'(x) = 3x^2 - 2$, como paso intermedio en la argumentación.

Observación 1. En lugar de usar el polinomio cuadrático, pudimos haber procedido como sigue, después de saber que los únicos puntos críticos de f son $x = \sqrt{2/3}$ y $x = -\sqrt{2/3}$. Considerar el intervalo $x < -\sqrt{2/3}$. Entonces $f'(x) \neq 0$ para todo $x < -\sqrt{2/3}$. Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio, $f'(x)$ es > 0 para todo $x < -\sqrt{2/3}$, o $f'(x) < 0$ para todo $x < -\sqrt{2/3}$. ¿Cuál es? Basta con tratar un valor, digamos $x = -10$, para ver que $f'(x) > 0$ para $x < -\sqrt{2/3}$, pues $f'(-10) = 3 \cdot 10^2 - 2 = 298$. Por consiguiente, debemos tener $f'(x) > 0$ para $x < -\sqrt{2/3}$.

Observación 2. Es mucho más difícil determinar las raíces para un polinomio cúbico, esto es, los cruces con el eje x, y usualmente no se hace, a menos que, por accidente, haya una manera fácil de hacerlo. En el caso anterior, cuando

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

hay uno de dichos accidentes, pues $f(1) = 0$. Por lo tanto, 1 es una raíz de f, de ahí que se factorice $f(x)$

$$x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1).$$

Las otras raíces de f son las raíces de $x^2 + x - 1$, que podemos hallar por medio de la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Sin embargo, en el ejemplo siguiente no hay una manera fácil de hallar las raíces, y no las hallamos.

Ejemplo 2. Trazar la gráfica de la curva

$$y = -x^3 + 3x - 5.$$

1. Cuando $x = 0$, tenemos $y = -5$. Con polinomios de grado ≥ 3, en general no hay una fórmula sencilla para hallar los x tales que $f(x) = 0$, de

modo que no damos de manera explícita la intersección de la gráfica con el eje x.

2. La derivada es

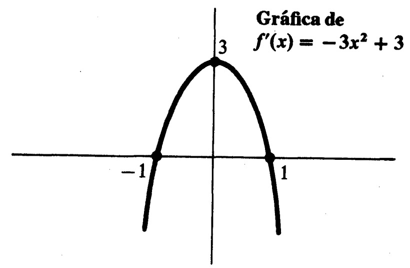
$$f'(x) = -3x^2 + 3.$$

La gráfica de $f'(x)$ es una parábola doblada hacia abajo, como ya se sabrá gracias a la experiencia previa con parábolas. Tenemos

$$f'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ y } x = -1.$$

Así, hay dos puntos críticos de f, a saber, $x = 1$ y $x = -1$.

3. La gráfica de $f'(x)$ se ve como una parábola doblada hacia abajo, como sigue:



Entonces:

$$\begin{aligned} f \text{ es estrictamente decreciente} &\iff f'(x) < 0 \\ &\iff x < -1 \quad \text{y} \quad x > 1. \\ f \text{ es estrictamente creciente} &\iff f'(x) > 0 \\ &\iff -1 < x < 1. \end{aligned}$$

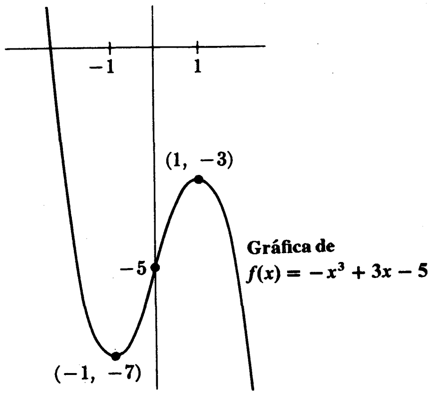
Por tal motivo, f tiene un mínimo local en $x = -1$, y tiene un máximo local en $x = 1$.

4.

$$\begin{aligned} &\text{Si} \quad x \to \infty, \quad \text{entonces, por §1,} \quad f(x) \to -\infty. \\ &\text{Si} \quad x \to -\infty, \quad \text{entonces, por §1,} \quad f(x) \to +\infty. \end{aligned}$$

5. Tenemos $f''(x) = -6x$. Por lo tanto, $f''(x) > 0$ si, y sólo si, $x < 0$ y $f''(x) < 0$ si, y sólo si, $x > 0$. Hay un punto de inflexión en $x = 0$.

Juntando toda esta información vemos que la gráfica de f se ve como en la página siguiente.



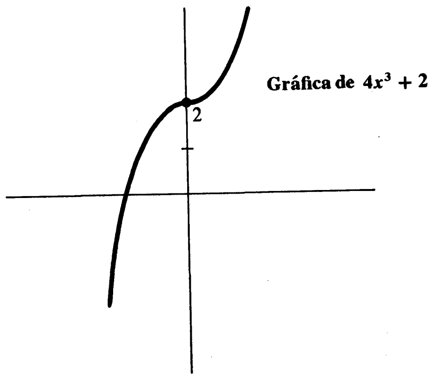
Observación. Cuando f es un polinomio de grado 3, su derivada $f'(x)$ es un polinomio de grado 2 y, en general, este polinomio tiene dos raíces, que dan los dos puntos críticos de la curva $y = f(x)$. En el ejemplo precedente, estos puntos críticos están en $(-1,-7)$ y $(1,-3)$.

Nótese de nuevo cómo usamos la gráfica de una parábola, a saber, la gráfica de $f'(x)$, en el proceso de determinar la propia gráfica de f.

En los últimos dos ejemplos, el polinomio cúbico tiene dos jorobas, en los dos puntos críticos. Ésta es la forma más general de los polinomios cúbicos, pero hay casos particulares en los que no hay punto crítico, o sólo un punto crítico.

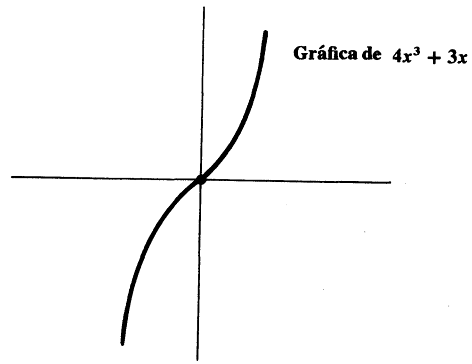
Ejemplo 3(a). Sea $f(x) = 4x^3 + 2$. Trazar la gráfica de f.

Aquí tenemos que $f'(x) = 12x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$. Hay sólo un punto crítico, cuando $x = 0$. Por lo tanto, la función es estrictamente creciente para todo x y su gráfica se ve así.



Ejemplo 3(b). Sea $f(x) = 4x^3 + 3x$. Trazar la gráfica de f.

Aquí tenemos que $f'(x) = 12x^2 + 3 > 0$ para *todo* x, por lo que la gráfica de f se ve así. No hay punto crítico.



En ambos ejemplos tenemos

$$f''(x) = 24x.$$

Así, en los dos ejemplos hay un punto de inflexión en $x = 0$. La gráfica de f se dobla hacia abajo para $x < 0$ y se dobla hacia arriba para $x > 0$. La diferencia entre el caso (a) y el caso (b) es que en el caso (a) el punto de inflexión es un punto crítico, donde la derivada de f es igual a 0, de modo que la curva es plana en el punto crítico. En el caso (b), la derivada en el punto de inflexión es

$$f'(x) = 3,$$

de modo que en el caso (b) la derivada en el punto de inflexión es positiva.

VI, §3. EJERCICIOS

1. Mostrar que una curva

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

con $a \neq 0$ tiene exactamente un punto de inflexión.

Trazar las gráficas de las curvas siguientes.

2. $x^3 - 2x^2 + 3x$
3. $x^3 + x^2 - 3x$
4. $2x^3 - x^2 - 3x$
5. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x$
6. $x^3 - 3x^2 + 6x - 3$
7. $x^3 + x - 1$
8. $x^3 - x - 1$
9. $-x^3 + 2x + 5$
10. $-2x^3 + x + 2$
11. $x^3 - x^2 + 1$
12. $y = x^4 + 4x$
13. $y = x^5 + x$
14. $y = x^6 + 6x$
15. $y = x^7 + x$
16. $y = x^8 + x$

17. ¿Cuál de los polinomios siguientes tiene un mínimo (para todo x)?
(a) $x^6 - x + 2$ (b) $x^5 - x + 2$
(c) $-x^6 - x + 2$ (d) $-x^5 - x + 2$
(e) $x^6 + x + 2$ (f) $x^5 + x + 2$

Trazar las gráficas de estos polinomios.

18. ¿Cuál de los polinomios del ejercicio 17 tiene un máximo (para todo x)?

En los dos problemas siguientes:
(a) Demostrar que f tiene exactamente dos puntos de inflexión.
(b) Trazar la gráfica de f. Determinar explícitamente los puntos críticos. Determinar las regiones donde se dobla hacia arriba y donde se dobla hacia abajo.

19. $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 5$

20. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$

21. Trazar la gráfica de la función

$$f(x) = x^6 - \tfrac{3}{2}x^4 + \tfrac{9}{16}x^2 - \tfrac{1}{32}.$$

Hallar los puntos críticos. Hallar los valores de f en estos puntos críticos. Trazar la gráfica de f. Se verá mucho más clara de lo que parece a primera vista.

VI, §4. FUNCIONES RACIONALES

Consideraremos ahora cocientes de polinomios.

Ejemplo. Trazar la gráfica de la curva

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

y determinar las ocho propiedades enunciadas en la introducción.

1. Cuando $x = 0$, tenemos $f(x) = -1$. Cuando $x = 1$, $f(x) = 0$.
2. La derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

(Se puede calcular usando la regla del cociente.) Nunca es 0 y, por lo tanto, la función f no tiene puntos críticos.

3. El denominador es un cuadrado y, por lo tanto, siempre es positivo donde está definido, esto es, para $x \neq -1$. Así, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$. La función es creciente para todo x. Es evidente que la función no está definida para $x = -1$ y tampoco lo está su derivada, así que sería más preciso decir que la función es creciente en la región

$$x < -1$$

y es creciente en la región $x > -1$.

4. No hay región de decrecimiento.

5. Como la derivada nunca es 0, no hay máximos o mínimos relativos.
6. La segunda derivada es

$$f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}.$$

No hay punto de inflexión porque $f''(x) \neq 0$ para todo x donde la función está definida. Si $x < -1$, entonces el denominador $(x+1)^3$ es negativo, y $f''(x) > 0$, de modo que la gráfica se dobla hacia arriba. Si $x > -1$, entonces el denominador es positivo y $f''(x) < 0$, de modo que la gráfica se dobla hacia abajo.

7. Cuando x se vuelve positivo grande nuestra función tiende a 1 (usando el método de la sección §1). Cuando x se vuelve grande negativo nuestra función también tiende a 1.

Otro elemento de información muy útil es ver lo que ocurre cuando $f(x)$ mismo se vuelve positivo o negativo, grande. Esto sucede cerca de los puntos donde el denominador de $f(x)$ es 0. En el ejemplo presente, $x = -1$.

8. Cuando x tiende a -1, el denominador tiende a 0 y el numerador tiende a -2. Si x tiende a -1 por la derecha, de modo que $x > -1$, entonces el denominador es positivo y el numerador es negativo. Por lo tanto, la fracción

$$\frac{x-1}{x+1}$$

es negativa, y es negativa grande.

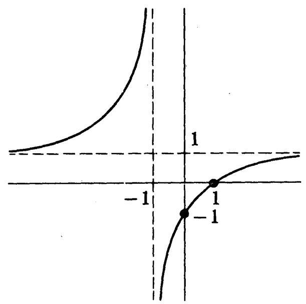


Figura 2

Si x tiende a -1 por la izquierda de modo que $x < -1$, entonces $x - 1$ es negativo, pero también $x + 1$ es negativo. Por lo tanto, $f(x)$ es positivo y grande, pues el denominador es pequeño cuando x está cerca de -1.

Juntando toda esta información vemos que la gráfica se ve como la figura anterior.

Hemos trazado las dos rectas $x = -1$ y $y = 1$, pues desempeñan un papel importante cuando x tiende a -1 y cuando x se vuelve positivo o negativo, grande.

Observación. Sea de nuevo

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Entonces podemos escribir esta relación para ver directamente que la gráfica de f es una hipérbola, como se ve enseguida. Escribimos la relación en la forma

$$y = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1},$$

esto es, $y - 1 = -2/(x+1)$. Al quitar los denominadores queda

$$(y-1)(x+1) = -2.$$

Por el capítulo II se sabe que es una hipérbola. Realizamos el trazo por medio de un método más general porque también funciona en los casos en que no se puede reducir la ecuación a una de las curvas usuales, como círculos, parábolas o hipérbolas.

Ejemplo. Trazar la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Nótese que f no está definida en $x = 1$. Podemos escribir

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x-1}.$$

Tenemos $f(x) = 0$ si, y sólo si, el numerador $x(x+1) = 0$. Así:

$$f(x) = 0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = -1.$$

A continuación vemos la derivada, que es

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

(Calcularla usando la regla del cociente.) Entonces

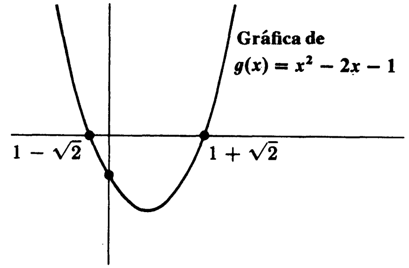
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad x^2 - 2x - 1 = 0. \\ &\iff \quad x = 1 \pm \sqrt{2} \quad \text{(por la fórmula cuadrática)} \end{aligned}$$

Éstos son los puntos críticos de f.

El denominador $(x-1)^2$ en $f'(x)$ es un cuadrado, por lo que siempre es positivo donde está definido, esto es, para $x \neq 1$. Por lo tanto, el signo de $f'(x)$ es el mismo que el signo de su numerador $x^2 - 2x - 1$. Sea

$$g(x) = x^2 - 2x - 1.$$

La gráfica de g es una parábola y, como el coeficiente de x^2 es $1 > 0$, esta parábola se dobla hacia arriba como se muestra en la figura.



Las dos raíces de $g(x) = 0$ son $x = 1 - \sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$. De la gráfica de $g(x)$ vemos que

$$\begin{aligned} g(x) < 0 \quad &\text{cuando} \quad 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}, \\ g(x) > 0 \quad &\text{cuando} \quad x < 1 - \sqrt{2} \quad \text{o} \quad x > 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Esto nos da las regiones de crecimiento y de decrecimiento para $f(x)$.

Para $x \leq 1 - \sqrt{2}$, $f(x)$ es estrictamente creciente.
Para $1 - \sqrt{2} \leq x < 1$, $f(x)$ es estrictamente decreciente.
Para $1 < x \leq 1 + \sqrt{2}$, $f(x)$ es estrictamente decreciente.
Para $1 + \sqrt{2} \leq x$, $f(x)$ es estrictamente creciente.

Se sigue que f tiene un máximo local en $x = 1 - \sqrt{2}$ y f tiene un mínimo local en $x = 1 + \sqrt{2}$.

Cuando x se vuelve positivo grande, $f(x)$ se vuelve positivo grande como se deduce de la expresión

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x-1} = \frac{x^2(1+1/x)}{x(1-1/x)} = x\frac{1+1/x}{1-1/x}.$$

Cuando x se vuelve negativo grande, $f(x)$ se vuelve negativo grande.

Cuando x tiende a 1 y $x < 1$, la función $f(x)$ se vuelve negativa grande porque el denominador $x - 1$ tiende a 0 y es negativo, mientras que el numerador $x^2 + x$ tiende a 2.

Cuando x tiende a 1 y $x > 1$, la función $f(x)$ se vuelve positiva gran[de p]orque el denominador $x - 1$ tiende a 0 y tanto el numerador como el denominador son positivos, mientras que el numerador tiende a 2.

Por consiguiente, la gráfica se ve como se dibujó en la figura 3.

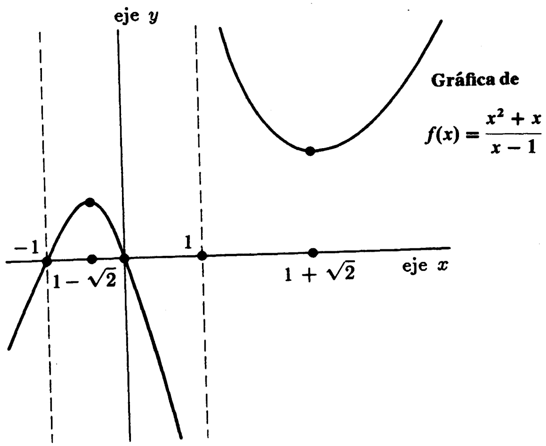


Figura 3

VI, §4. EJERCICIOS

Trazar las curvas siguientes, indicando toda la información enunciada en la introducción. Puede considerarse opcional la convexidad.

1. $y = \dfrac{x^2+2}{x-3}$
2. $y = \dfrac{x-3}{x^2+1}$
3. $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$
4. $y = \dfrac{x^2-1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$
5. $\dfrac{x}{x^3-1}$
6. $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$
7. $y = \dfrac{2x-3}{3x+1}$
8. $\dfrac{4x}{x^2-9}$
9. $x + \dfrac{3}{x}$
10. $\dfrac{x^2-4}{x^3}$
11. $\dfrac{3x-2}{2x+3}$
12. $\dfrac{x}{3x-5}$
13. $\dfrac{2x}{x+4}$
14. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$
15. $\dfrac{x+1}{x^2+5}$
16. $\dfrac{x+1}{x^2-5}$
17. $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
18. $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$
19. Trazar la gráfica de $f(x) = x + 1/x$.
20. Sean a y b dos números positivos. Sea

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}.$$

Mostrar que el valor mínimo de $f(x)$ para $x > 0$ es $2\sqrt{ab}$. Dar razones para cada afirmación. Deducir que $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$. Trazar la gráfica de f para $x > 0$.

VI, §5. APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En esta sección se estudiarán problemas expresados en lenguaje cotidiano que tratan sobre máximos y mínimos y aplican las técnicas estudiadas antes. En cada caso queremos maximizar o minimizar una función, la cual en un principio puede estar dada incluso en términos de dos variables. Procedemos como sigue.

1. Se dan datos suficientes a fin de que una de estas variables, por medio de alguna relación, se pueda expresar en términos de la otra. Terminamos tratando con una función de una sola variable.
2. Después se hallan sus puntos críticos haciendo la derivada igual a 0, y en seguida se determina si los puntos críticos son máximos o mínimos locales.
3. Verificamos si estos máximos o mínimos locales son también máximos o mínimos en todo el intervalo de definición de la función. Si la función está dada sólo en intervalos finitos, puede suceder que el máximo ocurra, por ejemplo, en un punto extremo, donde no se aplica el criterio de la derivada.

Ejemplo 1. Hallar el punto sobre la gráfica de la ecuación $y^2 = 4x$ que está cerca del punto $(2, 3)$.

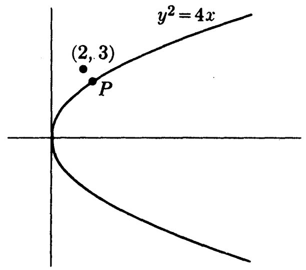


Figura 4

Para minimizar la distancia entre un punto (x, y) y $(2, 3)$, basta minimizar el cuadrado de la distancia, que tiene la ventaja de que en su fórmula no hay ninguna raíz cuadrada. En efecto, suponer que z_0^2 es un valor mínimo para el cuadrado de la distancia, con z_0 positivo. Entonces z_0 mismo es un valor mínimo para la distancia, ya que un número positivo tiene una raíz cuadrada positiva única. El cuadrado de la distancia es igual a

$$z^2 = (2-x)^2 + (3-y)^2.$$

Así z^2 está expresado en términos de las dos variables x y y. Pero sabemos que el punto (x, y) está sobre la curva cuya ecuación es $y^2 = 4x$. Por lo tanto, podemos despejar una variable en términos de la otra, a saber, $y = 2\sqrt{x}$. Al sustituir $y = 2\sqrt{x}$, hallamos una expresión para el cuadrado de la distancia sólo en términos de x, a saber

$$\begin{aligned} f(x) &= (2-x)^2 + (3-2\sqrt{x})^2 \\ &= 4 - 4x + x^2 + 9 - 12\sqrt{x} + 4x \\ &= 13 + x^2 - 12\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Determinamos ahora los puntos críticos de f. Tenemos

$$f'(x) = 2x - \frac{6}{\sqrt{x}},$$

de modo que

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad 2x\sqrt{x} = 6 \\ &\iff \quad x = \sqrt[3]{9}. \end{aligned}$$

Más aún, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\iff \quad 2x\sqrt{x} > 6 \\ &\iff \quad x^3 > 9. \\ f'(x) < 0 \quad &\iff \quad x^3 < 9. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x)$ es estrictamente creciente cuando $x > \sqrt[3]{9}$ y es estrictamente decreciente cuando $x < \sqrt[3]{9}$. Por lo tanto, $\sqrt[3]{9}$ es un mínimo. Cuando $x = \sqrt[3]{9}$, el valor correspondiente para y es

$$y = 2\sqrt{x} = 2\sqrt[3]{3}.$$

Por lo tanto, el punto sobre la gráfica de $y^2 = 4x$ más cercano a $(2,3)$ es el punto

$$P = (\sqrt[3]{9}, 2\sqrt[3]{3}).$$

Ejemplo 2. Se va a fabricar una lata de aceite en forma de cilindro, para contener un cuarto de aceite. ¿Qué dimensiones deberá tener de modo que el área de la superficie sea mínima (en otras palabras, que minimice el costo del material para hacer la lata)?

Sea r el radio de la base del cilindro y sea h su altura. Entonces el volumen es

$$V = \pi r^2 h.$$

El área de la superficie total es la suma de la tapa, el fondo y los lados circulares, a saber,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Así, el área está dada en términos de las dos variables r y h. Sin embargo, también se indica que el volumen V es constante, $V = 1$. De este modo obtenemos una relación entre r y h,

$$\pi r^2 h = 1,$$

y podemos despejar h en términos de r, a saber,

$$h = 1/\pi r^2.$$

Por lo tanto, el área se puede expresar completamente en términos de r, esto es,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r/\pi r^2 = 2\pi r^2 + 2/r.$$

Queremos que el área sea mínima. Primero hallamos los puntos críticos de A. Tenemos:

$$\begin{aligned} A'(r) = 4\pi r - 2/r^2 = 0 \quad &\iff \quad 4\pi r = 2/r^2 \\ &\iff \quad \pi r^3 = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así hallamos exactamente un punto crítico

$$r = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Considerando factores físicos podemos ver que esto corresponde a un mínimo, pero también podemos proceder de la manera siguiente. Cuando r se vuelve positivo grande, o cuando r tiende a 0, la función $A(r)$ se vuelve grande, de modo que debe haber un mínimo de la función para algún valor $r > 0$. Este mínimo es un punto crítico, y ya se sabe que hay sólo un punto crítico. Por lo tanto, hemos hallado que el mínimo ocurre cuando r es el punto crítico. En este caso podemos sustituir y encontrar h, como sigue:

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{(2\pi)^{2/3}}{\pi} = \frac{2^{2/3}}{\pi^{1/3}}.$$

Esto proporciona las dimensiones requeridas.

Ejemplo 3. Un camión se va a conducir durante 320 km a velocidad constante de x km/h. Las reglamentaciones de velocidad requieren que $50 \le x \le 100$. Supóngase que la gasolina cuesta 15 centavos/litro y se consume a razón de

$$9 + \frac{x^2}{500} \text{ lit/hr.}$$

Si el chofer gana \$8 la hora, hallar la velocidad más económica.

El costo total se expresa como la suma del costo de la gasolina y el salario. El tiempo total del viaje será

$$\frac{320}{x}$$

pues (tiempo)(velocidad) = (distancia) si la velocidad es constante. El costo de la gasolina es entonces igual al producto de

(precio por litro)(número de litros usados por hora)(tiempo total)

de modo que el costo de la gasolina es

$$G(x) = .15\left(9 + \frac{x^2}{500}\right)\frac{320}{x}.$$

Por otro lado, el salario está dado por el producto

$$\text{(salario por hora)(tiempo total)},$$

de modo que el costo del salario es

$$W(x) = 8 \cdot \frac{320}{x}.$$

Por lo tanto, el costo total del viaje es

$$\begin{aligned} f(x) &= G(x) + W(x) \\ &= .15\left(9 + \frac{x^2}{500}\right)\frac{320}{x} + \frac{8 \cdot 320}{x} \\ &= 48\left(\frac{9}{x} + \frac{x}{500}\right) + \frac{2560}{x}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{432}{x^2} + \frac{12}{125} - \frac{2560}{x^2} \\ &= -\frac{2992}{x^2} + \frac{12}{125}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si, y sólo si,

$$\frac{2992}{x^2} = \frac{12}{125}$$

en otras palabras,

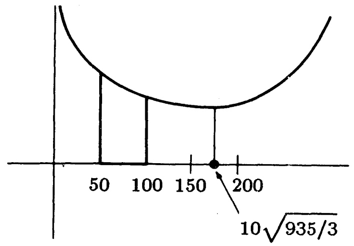
$$x^2 = \frac{93500}{3}.$$

Así $x = 10\sqrt{\frac{935}{3}}$. [Tomamos x positivo, ya que es la solución que tiene significado físico.]

Observamos ahora que $10\sqrt{\frac{935}{3}}$ es aproximadamente igual a 176, de modo que rebasa el límite de velocidad de 100 que se asignó al principio. Más aún, si $0 < x < 176$, entonces

$$f'(x) < 0.$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ es decreciente para $0 \leq x \leq 176$. Su gráfica se puede esbozar como en la figura de la página siguiente.



Como al empezar restringimos la velocidad posible al intervalo $50 \leq x \leq 100$, se sigue que el mínimo de f en el intervalo debe ocurrir cuando $x = 100$. Por lo tanto, ésta es la velocidad que minimiza el costo total.

Ejemplo 4. Suponer en el ejemplo anterior que no hay límite de velocidad. Vemos entonces que si $x > 176$, entonces $f'(x) > 0$, de modo que $f(x)$ es creciente para

$$x > 176.$$

Por lo tanto, $10\sqrt{\frac{935}{3}}$ es un punto mínimo para f cuando no se colocan restricciones en x. En consecuencia, en este caso, la velocidad que minimiza al costo es

$$x = 10\sqrt{\frac{935}{3}}.$$

Ejemplo 5. Cuando la luz emitida desde una fuente puntual choca con una superficie plana, la intensidad de la iluminación es proporcional al coseno del ángulo de incidencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente. ¿A qué altura deberá colocarse una luz arriba del centro de un círculo de 12 m de radio para dar la mejor iluminación a lo largo de la circunferencia?

El **ángulo de incidencia** se mide a partir de la perpendicular al plano. La figura es así.

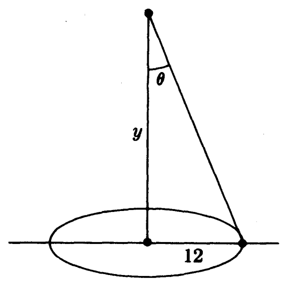


Figura 5

Denotamos por θ el ángulo de incidencia y por y la altura de la luz. Sea I la intensidad de la iluminación. Que dos cantidades sean proporcionales significa que existe una constante tal que una cantidad es igual a la constante por la otra. Así, existe una constante c tal que

$$\begin{aligned} I(y) &= c\cos\theta\frac{1}{12^2+y^2} \\ &= c\frac{y}{\sqrt{12^2+y^2}}\frac{1}{12^2+y^2} \\ &= \frac{cy}{(12^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de $I(y)$ son aquellos puntos donde $I'(y) = 0$. Tenemos

$$I'(y) = c\left[\frac{(12^2+y^2)^{3/2} - y\cdot\frac{3}{2}(12^2+y^2)^{1/2}(2y)}{(12^2+y^2)^3}\right],$$

y esta expresión es igual a 0 precisamente cuando el numerador es igual a 0, esto es,

$$(12^2+y^2)^{3/2} = 3y^2(12^2+y^2)^{1/2}.$$

Al cancelar $(4^2+y^2)^{1/2}$, vemos que esto equivale a

$$12^2+y^2 = 3y^2,$$

o, en otras palabras,

$$12^2 = 2y^2.$$

Despejando y se obtiene

$$y = \pm\frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Sólo el valor positivo de y tiene significado físico, y así la altura que da la máxima intensidad es de $4/\sqrt{2}\,\mathrm{m}$, a condición de que sepamos que este punto crítico es un máximo para la función $I(y)$, para $y > 0$. Esto se puede ver de la siguiente manera.

Si y está muy cerca de 0, entonces el numerador cy de $I(y)$ está cerca de 0, y el denominador $(4^2+y^2)^{3/2}$ está cerca de $(4^2)^{3/2}$ de modo que $I(y)$ se analiza factorizando y^2, a saber

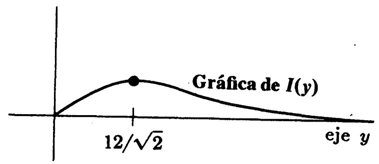
$$(12^2+y^2)^{3/2} = \left(\frac{12^2}{y^2}+1\right)^{3/2}y^3.$$

Entonces $I(y)$ tiende a 0 cuando y se vuelve grande, porque

$$I(y) = \frac{cy}{(\text{término cercano a }1)y^3} = \frac{c}{(\text{término cercano a }1)}\frac{1}{y^2}$$

si y es positivo grande. Por lo tanto, hemos mostrado que $I(y)$ tiende a 0 cuando y tiende a 0 o y se vuelve grande. Se sigue que $I(y)$ alcanza un máximo para

algún valor de $y > 0$, y este máximo debe ser un punto crítico. Por otro lado, también hemos probado que hay un solo punto crítico. Por lo tanto, este punto crítico es el máximo, según se deseaba. Así, $y = 12/\sqrt{2}$ es un máximo para la función. En vista del análisis anterior, se puede trazar la gráfica como en la figura.



Ejemplo 6. Un negocio fabrica transmisiones de automóvil que se venden en \$400. El costo total de colocar en el mercado x unidades es

$$f(x) = 0.02x^2 + 160x + 400\,000.$$

¿Cuántas transmisiones deberán venderse para obtener una ganancia máxima?

Sea $P(x)$ la ganancia obtenida al vender x unidades. Entonces $P(x)$ es la diferencia entre el ingreso total y el costo de colocar en el mercado. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= 400x - (0.02x^2 + 160x + 400\,000) \\ &= -0.02x^2 + 240x - 400\,000. \end{aligned}$$

Queremos saber cuándo es máximo $P(x)$. Tenemos:

$$P'(x) = -0.04x + 240$$

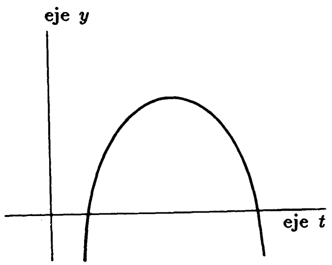
de modo que la derivada es 0 cuando

$$0.04x = 240,$$

o en otras palabras,

$$x = \frac{240}{0.04} = 6000.$$

La ecuación $y = P(x)$ es una parábola, que se dobla hacia abajo porque el coeficiente principal es -0.02 (negativo). Por lo tanto, el punto crítico es un máximo, y la respuesta es entonces 6000 unidades.



Parábola $y = at^2 + bt + c$ con $a < 0$.

Ejemplo 7. Un granjero compra un toro que pesa 270 kg a un costo de \$180. Cuesta 15 centavos diarios alimentar al animal, que aumenta 0.45 kg al día. Cada día que se tiene al toro el precio de venta por kilo declina de acuerdo con la fórmula

$$B(t) = 1 - \frac{1}{1800}t$$

donde t es el número de días. ¿Cuánto tiempo deberá esperar el granjero para maximizar sus ganancias?

Para determinarlo, nótese que el costo total después del tiempo t está dado por

$$f(t) = 180 + 0.15t.$$

El total de la venta equivale al producto del precio $B(t)$ por kilo, por el peso del animal; en otras palabras,

$$\begin{aligned} S(t) &= (1 - \frac{1}{1800}t)(270 + .45t) \\ &= -0.00025t^2 + 0.30t + 270. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ganancia es

$$\begin{aligned} P(t) &= S(t) - f(t) \\ &= -0.00025t^2 + 0.15t + 90. \end{aligned}$$

Entonces

$$P'(t) = -0.0005t + 0.15$$

y $P'(t) = 0$ exactamente cuando $0.0005t = 0.15$ o, en otras palabras,

$$t = \frac{0.15}{0.0005} = 300.$$

Por lo tanto, la respuesta es que el granjero debe esperar 300 días antes de vender el toro, siempre que podamos probar que este valor de t da un máximo. Pero la fórmula para la ganancia es una expresión cuadrática en t, de la forma

$$P(t) = at^2 + bt + c,$$

y $a < 0$. Por lo tanto, $P(t)$ es una parábola, y como $a < 0$ esta parábola se abre hacia abajo, como en la figura. Como resultado, el punto crítico debe ser un máximo, según se deseaba.

VI, §5. EJERCICIOS

1. Hallar la longitud de los lados del rectángulo de área más grande que pueda inscribirse en un semicírculo, de manera que la base inferior esté sobre el diámetro.

2. Una caja rectangular tiene una base cuadrada y no tiene tapa. El área combinada de los lados y el fondo es de $4.5\,\text{m}^2$. Hallar las dimensiones de la caja de máximo volumen que cumple con estos requisitos.

3. Probar que, entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de menor perímetro.

4. Se conducirá un camión por 300 km a una velocidad constante de x km/hr. Las reglamentaciones sobre velocidad requieren que $30 \leq x \leq 60$.
   Suponiendo que la gasolina cuesta 8 centavos/litro y se consume a razón de $8 + x^2/600$ lit/hr, y si el salario del chofer es de D dólares la hora, hallar la velocidad más económica y el costo del viaje si (a) $D = 0$, (b) $D = 1$, (c) $D = 2$, (d) $D = 3$, (e) $D = 4$.

5. Un rectángulo ha de tener un área de $64\,\text{m}^2$. Hallar sus dimensiones de modo que la distancia de una esquina al punto medio de un lado no adyacente sea un mínimo.

6. Expresar el número 4 como la suma de dos números positivos de manera que la suma del cuadrado del primero y del cubo del segundo sea lo más pequeño posible.

7. Un alambre de 24 cm de largo se corta en dos, una parte se dobla para darle forma de círculo y la otra en forma de cuadrado. ¿Cómo deberá cortarse si la suma de las áreas del círculo y del cuadrado ha de ser (a) un mínimo, (b) un máximo?

8. Hallar el punto sobre la gráfica de la ecuación $y^2 = 4x$ que está más cerca del punto $(2, 1)$.

9. Hallar los puntos sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ más cercanos al punto $(0, 1)$.

10. Demostrar que $(2, 2)$ es el punto sobre la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 3x$ que está más cerca del punto $(11, 1)$.

11. Hallar las coordenadas de los puntos sobre la curva $x^2 - y^2 = 16$ que estén más cerca del punto $(0, 6)$.

12. Hallar las coordenadas de los puntos sobre la curva $y^2 = x + 1$ que estén más cerca del origen.

13. Hallar las coordenadas del punto sobre la curva $y^2 = \frac{5}{2}(x + 1)$ que estén más cerca del origen.

14. Hallar las coordenadas de los puntos sobre la curva $y = 2x^2$ que estén más cerca del punto $(9, 0)$.

15. Un anillo circular de radio b está cargado uniformemente de electricidad; la carga total es Q. La fuerza ejercida por esta carga sobre una partícula a una distancia x del centro del anillo, en una dirección perpendicular al plano del anillo está dada por $F(x) = Qx(x^2 + b^2)^{-3/2}$. Hallar el máximo de F para todo $x \geq 0$.

16. Sea F la razón de flujo de agua sobre cierto vertedero. Suponer que F es proporcional a $y(h - y)^{1/2}$, donde y es la profundidad de la corriente y h es la altura y es constante. ¿Qué valor de y hace máxima a F?

17. Hallar sobre el eje x el punto tal que la suma de sus distancias a $(2, 0)$ y $(0, 3)$ sea un mínimo.

18. Una pieza de alambre de longitud L se va a cortar en dos partes, una de ellas se va a doblar en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de círculo. ¿Cómo deberá cortarse el alambre de modo que la suma de las áreas comprendidas sea (a) un mínimo, (b) un máximo?

19. Una cerca de 4 m de alto está a 1.20 m de la pared de una casa. ¿Cuál es la longitud mínima que debe tener una escalera para que uno de sus extremos descanse en el suelo, fuera de la cerca, y el otro sobre la pared de la casa?

20. Un tanque ha de tener un volumen dado V y se hará en forma de cilindro circular recto con hemisferios agregados en cada extremo. El material para los extremos cuesta el doble por metro cuadrado que para los lados. Hallar las proporciones más económicas. [Se puede suponer que el área de una esfera es $4\pi r^2$.]

21. Hallar la longitud de la barra más larga que puede transportarse horizontalmente y dar la vuelta en una esquina pasando de un corredor de 2.44 m a uno de 1.22 m.

22. Sean P y Q dos puntos en el plano en el mismo lado del eje x. Sea R un punto sobre el eje x (figura 6). Demostrar que la suma de las distancias PR y QR es menor cuando los ángulos θ_1 y θ_2 son iguales.

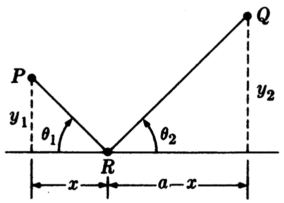


Figura 6

[*Idea:* Usar primero el teorema de Pitágoras para dar una expresión para las distancias PR y RQ en términos de x y de las cantidades fijas y_1, y_2. Sea $f(x)$ la suma de las distancias. Mostrar que la condición $f'(x) = 0$ significa que $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$. Usando valores de x cercanos a 0 y a a, demostrar que $f(x)$ es decreciente cerca de $x = 0$ y es creciente cerca de $x = a$. Por lo tanto, el mínimo debe estar en el intervalo abierto $0 < x < a$, y es, en consecuencia, el punto crítico.]

23. Suponer que la velocidad de la luz es v_1 en el aire y v_2 en el agua. Un rayo de luz que viaja de un punto P_1 sobre la superficie del agua a un punto P_2 debajo de la superficie, viajará por la trayectoria que requiera el menor tiempo. Demostrar que el rayo cruzará la superficie en el punto Q en el plano vertical que pasa por P_1 y P_2, de manera que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2},$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos mostrados en la figura de la página siguiente:

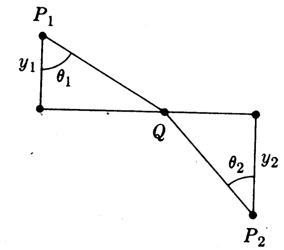


Figura 7

(Se puede suponer que la luz viajará en el plano vertical que pasa por P_1 y P_2. También se puede suponer que cuando la velocidad es constante, e igual a v, en toda una región, y s es la distancia recorrida, entonces el tiempo t es igual a $t = s/v$.)

24. Sea p la probabilidad de que ocurrirá cierto evento en todo ensayo. Suponer que en n ensayos el evento se observó s veces. La función de posibilidad se define como $L(p) = p^s(1-p)^{n-s}$. Hallar el valor de p que maximice la función de posibilidad. (Tomar $0 \leq p \leq 1$.) Considerar n y s como constantes.

25. Hallar una ecuación para la recta que pasa por los puntos siguientes y forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima en el primer cuadrante:
(a) que pase por el punto $(3, 1)$.
(b) que pase por el punto $(3, 2)$.

26. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números. Mostrar que existe un solo número x tal que

$$(x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

es un mínimo, y hallar este número.

27. Cuando la luz emitida desde una fuente puntual choca con una superficie plana, la intensidad de la iluminación es proporcional al coseno del ángulo de incidencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente. ¿A qué altura deberá colocarse una luz arriba del centro de un círculo de 25 cm de radio para dar la mejor iluminación a lo largo de la circunferencia? (El ángulo de incidencia se mide desde la perpendicular al plano.)

28. Un recipiente horizontal tiene una sección transversal en forma de triángulo isósceles invertido, donde la longitud de un cateto es de 20 m. Hallar el ángulo entre los catetos iguales que den la capacidad máxima.

29. Un recipiente tiene fondo horizontal plano y sección transversal como la mostrada en la figura de la página siguiente. Hallar el ángulo de inclinación de los lados a la horizontal que den la máxima capacidad.

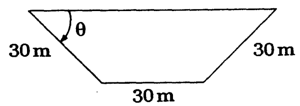


Figura 8

30. Determinar la constante a tal que la función

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$$

tiene (a) un mínimo local en $x = 2$, (b) un mínimo local en $x = -3$. (c) Demostrar que la función no puede tener un máximo local para todo valor de a.

31. La intensidad de iluminación en cualquier punto es proporcional a la potencia de la fuente de luz y varía inversamente con el cuadrado de la distancia a la fuente. Si dos fuentes de potencia a y b distan entre sí una distancia c, ¿en qué punto de la recta que las une será la intensidad un mínimo?

32. Una ventana tiene forma de rectángulo con un semicírculo superpuesto. Hallar las dimensiones cuando el perímetro es de 4 m y el área es lo más grande posible.

33. Hallar el radio y el ángulo del sector circular de área máxima si el perímetro es (a) 20 cm (b) 16 cm.

34. Estamos regando el prado con la manguera hacia arriba con un ángulo de inclinación θ. Sea r el alcance de la manguera, esto es, la distancia desde la manguera hasta el punto de impacto del agua. Entonces r está dado por

$$r = \frac{2v^2}{g} \operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

donde v y g son constantes. ¿Para qué ángulo es máximo el alcance?

35. Una escalera se coloca de manera que pasa sobre una cerca de 4 m de altura y se apoya en un muro que está a 0.7 m detrás de la cerca. ¿Cuál es la longitud de la escalera más corta que se puede usar?

36. Se supone que un tanque cilíndrico ha de tener un volumen dado V. Hallar las dimensiones del radio de la base y de la altura en términos de V, de manera que el área de la superficie sea mínima. El tanque deberá estar abierto por arriba pero cerrado por abajo.

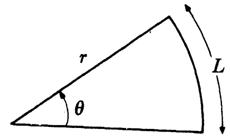
37. Se va a arreglar una cama de flores en forma de sector circular de radio r y ángulo central θ. Hallar r y θ si el área es fija y el perímetro es un mínimo en el caso:

(a) $0 < \theta \leq \pi$ y (b) $0 < \theta \leq \pi/2$.
Recordar que el área de un sector es

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \theta r^2/2.$$

La longitud de un arco de un círculo de radio r es

$$L = 2\pi r \cdot \frac{\theta}{2\pi} = r\theta.$$



38. Una firma vende un producto a \$50 por unidad. El costo total de colocar en el mercado x unidades está dado por la función

$$f(x) = 5000 + 650x - 45x^2 + x^3.$$

¿Cuántas unidades deberán producirse al día para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia diaria para este número de unidades?

39. El costo diario de producir x unidades de un producto está dado por la fórmula

$$f(x) = 2002 + 120x - 5x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Cada unidad se vende por \$264. ¿Cuántas unidades deberán producirse al día para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia diaria para este número de unidades?

40. Un producto se coloca en el mercado a 50 dólares por unidad. El costo total de colocar x unidades del producto en el mercado es de

$$f(x) = 1000 + 150x - 100x^2 + 2x^3.$$

¿Cuántas unidades deberán producirse para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia diaria para este x?

41. Una compañía es el único fabricante de un producto, cuya función de costo es

$$f(x) = 100 + 20x + 2x^2.$$

Si la compañía incrementa el precio, entonces se venden menos unidades, y de hecho, si expresamos el precio $p(x)$ como una función del número de unidades x, entonces

$$p(x) = 620 - 8x.$$

¿Cuántas unidades deberán producirse para maximizar las ganancias? ¿Cuál es esta ganancia máxima? [*Idea:* El ingreso total es igual al producto $xp(x)$, número de unidades por el precio.]

42. El costo de producir x unidades de un producto está dado por la función

$$f(x) = 10x^2 + 200x + 6000.$$

Si p es el precio por unidad, entonces el número de unidades vendidas a ese precio está dado por

$$x = \frac{1000 - p}{10}.$$

¿Para qué valor de x será positiva la ganancia? ¿Cuántas unidades deberán producirse para dar ganancias máximas?