CAPÍTULO XIII

Fórmula de Taylor

Finalmente llegamos al punto donde se desarrollará un método que nos permita calcular los valores de funciones elementales como seno, exp y log. El método es aproximar estas funciones mediante polinomios, con un término de error que se estima fácilmente. Este término de error se dará mediante una integral, y nuestra primera tarea será estimar integrales. Después recorreremos sistemáticamente las funciones elementales y deduciremos los polinomios de aproximación.

Es conveniente revisar los estimados del capítulo X, sección §3, que se usarán para estimar nuestros términos de error.

XIII, §1. FÓRMULA DE TAYLOR

Sea f una función diferenciable en algún intervalo. Podemos entonces tomar su derivada f' en ese intervalo y suponer que esta derivada también es diferenciable. Necesitamos una notación para su derivada. La denotaremos por $f^{(2)}$. De manera análoga, si existe la derivada de la función $f^{(2)}$, la denotamos por $f^{(3)}$, y así sucesivamente. En este sistema, la primera derivada se denota por $f^{(1)}$. (Es evidente que también podemos escribir $f^{(2)} = f''$.)

En la notación d/dx podemos escribir también:

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{dx^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f}{dx^3},$$

y así sucesivamente.

La fórmula de Taylor nos da un polinomio que aproxima la función en términos de las derivadas de la función. Como estas derivadas usualmente son fáciles de calcular, no hay dificultad alguna para calcular estos polinomios.

Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$ y $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$. Y de aquí comenzamos otra vez.

El caso de e^x es aún más fácil, a saber, $f^{(n)}(x) = e^x$ para todos los enteros positivos n.

También se acostumbra denotar la misma función f como $f^{(0)}$. Así, $f(x) = f^{(0)}(x)$.

Necesitamos una notación más, antes de enunciar la fórmula de Taylor. Cuando tomamos derivadas sucesivas de funciones, se presentan con frecuencia los números siguientes:

$$1, \quad 2\cdot 1, \quad 3\cdot 2\cdot 1, \quad 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1, \quad 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1, \quad \text{etc.}$$

Estos números se denotan por

$$1! \quad 2! \quad 3! \quad 4! \quad 5! \quad \text{etc.}$$

Así,

$$1! = 1, \qquad 4! = 24,$$
$$2! = 2, \qquad 5! = 120,$$
$$3! = 6, \qquad 6! = 720.$$

Cuando n es un entero positivo, el símbolo $n!$ se lee n **factorial**. Así, en general,

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

es el producto de los n primeros enteros de 1 a n.

Además es conveniente acordar que $0! = 1$. Esta convención hace que ciertas fórmulas sean más fáciles de escribir.

Veamos el caso de un polinomio

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n.$$

Los números $c_0, \ldots, c_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio. Veremos ahora que estos coeficientes se pueden expresar en términos de las derivadas de $P(x)$ en $x = 0$. Deberán recordar lo que se hizo en el capítulo III, sección §7, cuando se calcularon derivadas de orden superior. Sea k un entero ≥ 0. Entonces la k-ésima derivada de $P(x)$ está dada por

$$P^{(k)}(x) = c_k k! + \text{una expresión que contiene a } x \text{ como factor.}$$

La razón es: si diferenciamos k veces los términos

$$c_0, c_1x, \ldots, c_{k-1}x^{k-1},$$

obtenemos 0. Y si diferenciamos k veces una potencia x^j con $j > k$, entonces quedará alguna potencia positiva de x. Entonces, si evaluamos la k-ésima derivada en 0, obtenemos

$$P^{(k)}(0) = c_k k!$$

pues, cuando sustituimos x por 0, todos los otros términos dan 0. Por consiguiente, hallamos la expresión deseada de c_k en términos de la k-ésima derivada:

$$\boxed{c_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.}$$

A continuación, sea f una función que tiene derivadas hasta de orden n en un intervalo. Estamos buscando un polinomio

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

cuyas derivadas en 0 (hasta de orden n) sean iguales a las derivadas de f en 0; en otras palabras,

$$P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0).$$

¿Cuáles deben ser los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ para lograr esto? La respuesta es inmediata a partir de los cálculos de los coeficientes de un polinomio, a saber, debemos tener

$$k!\,c_k = f^{(k)}(0)$$

para cada entero $k = 0, 1, \ldots, n$. Por lo tanto, tenemos la expresión deseada para c_k, a saber

$$\boxed{c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.}$$

Definición. El **polinomio de Taylor** de grado $\leq n$ para la función f es el polinomio

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + f^{(1)}(o)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.}$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Es fácil obtener las derivadas (vean la sección §3), hallarán que los polinomios de Taylor tienen la forma

$$P_{2m+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Sólo se presentan valores impares de n, de modo que escribimos

$$n = 2m+1 \quad \text{con} \quad m \geq 0.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = e^x$. Entonces $f^{(k)}(x) = e^x$ para todos los enteros positivos k. Por lo tanto, $f^{(k)}(0) = 1$ para todo k, de modo que el polinomio de Taylor tiene la forma

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Queremos ahora saber la calidad de la aproximación $P_n(x)$ de $f(x)$. Escribimos

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

donde R_{n+1} se llama **residuo.**

Tendremos que estimar el término residuo $R_{n+1}(x)$. Finalmente probaremos que existe un número c entre 0 y x tal que

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.}$$

Así, el término residuo se verá como los términos principales, excepto que el coeficiente

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

se toma en algún punto intermedio c en lugar de tomarse en 0.

Como es fácil estimar las derivadas de las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y e^x, podremos ver que los polinomios de Taylor dan buenas aproximaciones a la función. Si aceptan como válida la expresión

$$\boxed{f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),}$$

donde

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n}$$

para algún número c entre 0 y x, entonces pueden leer inmediatamente las secciones posteriores, §3 y sucesivas, para entrar a las aplicaciones de las funciones elementales.

Observamos que no hay ninguna diferencia entre escribir

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x) \qquad \text{y} \qquad f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x).$$

Esto equivale a un simple cambio de índices. Usaremos la fórmula que nos parezca más conveniente.

Por supuesto, la afirmación anterior no dice nada preciso acerca del número c sino que c está entre 0 y x. Pero el meollo de la fórmula y de su término residuo es que no necesitamos más precisión para *estimar* el término residuo. El polinomio que precede al término residuo da un valor en x. Sólo queremos saber lo cerca que está este valor de $f(x)$. Para ello basta dar una cota

$$\frac{|f^{(n)}(c)|}{n!}|x|^n \leq \text{algo},$$

de modo que basta dar una cota para la n-ésima derivada $|f^{(n)}(c)|$. Se puede dar dicha cota sin saber el valor exacto de la n-ésima derivada en el número c.

Se puede ver cómo hacerlo en las secciones §3 y subsecuentes, cuando tratemos de manera sistemática todas las funciones elementales.

Desarrollaremos ahora teóricamente la fórmula de Taylor y probaremos que el término residuo tiene la forma mencionada. También será conveniente trabajar con números arbitrarios a y b en lugar de los números 0 y x. Además se enunciará la fórmula de Taylor de una manera un tanto diferente para el término residuo, pero que es como surge naturalmente en la demostración. Después probaremos que la forma integral es igual a la expresión enunciada antes.

Teorema 1.1. *Sea f una función definida en un intervalo cerrado entre dos números a y b. Suponiendo que la función tiene n derivadas en este intervalo y que todas ellas son funciones continuas, entonces*

$$\boxed{\begin{aligned} f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) &+ \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n, \end{aligned}}$$

donde R_n (llamado término residuo) es la integral

$$\boxed{R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt.}$$

El término residuo parece ser un poco complicado. En el teorema 2.1 probaremos que R_n se puede expresar en forma muy parecida a los otros términos, a saber,

$$\boxed{R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n}$$

para algún número c entre a y b. La fórmula de Taylor con esta forma del residuo ya es muy fácil de memorizar.

El caso más importante del teorema 1.1 ocurre cuando $a = 0$. En ese caso, la fórmula se lee

$$f(b) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}b + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}b^{n-1} + R_n.$$

Más aún, si x es cualquier número entre a y b, la misma fórmula sigue siendo válida para este número x en lugar de b, simplemente al considerar el intervalo entre a y x en lugar del intervalo entre a y b. Así, si $a = 0$, la fórmula se ve:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),}$$

donde

$$\boxed{R_n(x) = f^{(n)}(c)\frac{x^n}{n!}}$$

y c es un número entre 0 y x. Cada derivada $f(0)$, $f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ es un número, y vemos que los términos que preceden a R_n forman un polinomio en x. Éste es el polinomio de aproximación.

Probaremos ahora el teorema. La demostración es una aplicación de la integración por partes. Primero, para tener la idea de la demostración, veremos dos casos particulares.

Casos particulares. Procederemos por pasos. Sabemos que una función es la integral de su derivada. Así, cuando $n = 1$, tenemos

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Sea $u = f'(t)$ y $dv = dt$. Entonces $du = f''(t)\,dt$. Estamos tentados a poner $v = t$. Éste es un caso en que escogemos otra integral indefinida, a saber, $v = -(b-t)$, que difiere de t en una constante. Tenemos aún que $dv = dt$ (¡se cancelan los signos menos!). Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b u\,dv &= uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \\ &= -f'(t)(b-t)\Big|_a^b - \int_a^b -(b-t)f^{(2)}(t)\,dt \\ &= f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t)f^{(2)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Ésta es precisamente la fórmula de Taylor cuando $n = 2$.

Vamos un paso más adelante, de 2 a 3. Reescribimos la integral recién obtenida como

$$\int_a^b f^{(2)}(t)(b-t)\,dt.$$

Sean $u = f^{(2)}(t)$ y $dv = (b-t)\,dt$. Entonces

$$du = f^{(3)}(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad v = \frac{-(b-t)^2}{2} = \int (b-t)\,dt.$$

Así, al integrar por partes hallamos que nuestra integral, que tiene la forma $\int_a^b u\,dv$, es igual a

$$\begin{aligned}uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du &= -f^{(2)}(t)\frac{(b-t)^2}{2}\Big|_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt \\ &= f^{(2)}(a)\frac{(b-a)^2}{2} + R_3.\end{aligned}$$

Aquí, R_3 es el residuo deseado y el término precedente es el término propio de la fórmula de Taylor.

Si lo necesitan, pueden hacer el paso siguiente, de 3 a 4. Veremos ahora cómo va el paso general, de n a $n+1$.

Caso general. Suponer que ya obtuvimos los primeros $n-1$ términos de la fórmula de Taylor, con el término residuo

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt,$$

que reescribimos

$$R_n = \int_a^b f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Sea

$$u = f^{(n)}(t) \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Entonces

$$du = f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad v = \frac{-(b-t)^n}{n!}.$$

Aquí usamos el hecho de que b es constante, y

$$\int (b-t)^{n-1}\,dt = -\frac{(b-t)^n}{n}.$$

Nótese la aparición del signo menos debido a la regla de la cadena. Usamos también

$$n(n-1)! = n!$$

para dar el valor enunciado de v. Así, el denominador va de $(n-1)!$ a $n!$.

Integrando por partes hallamos:

$$\begin{aligned}R_n = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du &= -f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\Big|_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Hemos separado, pues, un término más de la fórmula de Taylor y el nuevo residuo es el R_{n+1} deseado. Esto concluye la demostración.

XIII, §1. EJERCICIOS

1. Sea $f(x) = \log(1+x)$.
   (a) Hallar una fórmula para las derivadas de $f(x)$. Comenzar con $f^{(1)}(x) = (x+1)^{-1}$, $f^{(2)}(x) = -(x+1)^{-2}$. Obtener $f^{(k)}(x)$ para $k = 3, 4, 5$ y depués escribir la fórmula para k arbitrario.
   (b) Hallar $f^{(k)}(0)$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Después mostrar en general que
   $$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!.$$

(c) Concluir que el polinomio de Taylor $P_n(x)$ para $\log(1+x)$ es

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

2. Hallar los polinomios $P_n(x)$ para la función $f(x) = \cos x$ y los valores $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

XIII, §2. ESTIMADO PARA EL RESIDUO

Teorema 2.1. *En la fórmula de Taylor del teorema 1.1, existe un número c entre a y b tal que el residuo R_n está dado por*

$$\boxed{R_n = \frac{f^{(n)}(c)(b-a)^n}{n!}.}$$

Si M_n es un número tal que $|f^{(n)}(x)| \le M_n$ para todo x en el intervalo, i.e. si M_n es una cota superior para $|f^{(n)}(x)|$, entonces

$$|R_n| \le \frac{M_n|b-a|^n}{n!}.$$

Demostración. La segunda afirmación se sigue inmediatamente de la primera, formando el estimado

$$|R_n| \le \frac{|f^{(n)}(c)||b-a|^n}{n!} \le M_n\frac{|b-a|^n}{n!}.$$

Probemos la primera afirmación. Como $f^{(n)}$ es continua en el intervalo, existe un punto u en el intervalo tal que $f^{(n)}(u)$ es un máximo y un punto v tal que $f^{(n)}(v)$ es un mínimo para todos los valores de $f^{(n)}$ en nuestro intervalo.

Supongamos que $a < b$. Entonces, para cualquier t en el intervalo, $b - t$ es ≥ 0, y, por lo tanto,

$$\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(v) \le \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t) \le \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(u).$$

Usando el teorema 3.1 del capítulo X, sección §3, concluimos que se cumplen desigualdades parecidas cuando tomamos la integral. Sin embargo, $f^{(n)}(v)$ y $f^{(n)}(u)$ son números fijos que se pueden sacar del signo de integral. En consecuencia, obtenemos

$$f^{(n)}(v)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \le R_n \le f^{(n)}(u)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Ahora efectuamos la integración, que es muy fácil, y obtenemos

$$\int_a^b (b-t)^{n-1}\,dt = -\frac{(b-t)^n}{n}\Big|_a^b = \frac{(b-a)^n}{n}.$$

[*Observación:* ésta es la misma integral que surgió en la integración por partes, en la demostración del teorema 1.1.] Por lo tanto,

$$f^{(n)}(v)\frac{(b-a)^n}{n!} \le R_n \le f^{(n)}(u)\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Por el teorema del valor intermedio, la n-ésima derivada $f^{(n)}(t)$ toma todos los valores entre su mínimo y su máximo en el intervalo, por lo cual

$$f^{(n)}(t)\frac{(b-a)^n}{n!}$$

toma todos los valores entre *su* mínimo y su máximo en el intervalo. De este modo, existe algún punto c en el intervalo tal que

$$R_n = f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!},$$

que es lo que queremos.

La demostración en el caso $b < a$ es parecida, excepto que se invierte el sentido de ciertas desigualdades. La omitimos.

El estimado del residuo es particularmente útil cuando b está cerca de a. En ese caso reescribimos la fórmula de Taylor haciendo $b - a = h$. Obtenemos:

Teorema 2.2. *Con las mismas hipótesis del teorema 1.1, tenemos*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

con el estimado

$$|R_n| \le M_n\frac{|h|^n}{n!},$$

donde M_n es una cota para el valor absoluto de la n-ésima derivada de f entre a y $a+h$.

En las secciones siguientes damos varios ejemplos. A menudo tomamos $a = 0$, de modo que tenemos

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)}$$

con el estimado

$$|R_n(x)| \le M_n\frac{|x|^n}{n!}$$

si M_n es una cota para la n-ésima derivada de f entre 0 y x.

Esto significa que hemos expresado $f(x)$ en términos de un polinomio y un término residuo. Como ya dijimos, el polinomio

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n,$$

donde

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

se llama **polinomio de Taylor de grado** $\leq n$ de $f(x)$. Llamamos a c_k el k-ésimo **coeficiente de Taylor** de f. Estos polinomios se calcularán explícitamente para todas las funciones elementales en las secciones siguientes.

En esencia, un polinomio es la función que se maneja con mayor facilidad. Así, es útil que podamos probar que los polinomios de Taylor dan aproximaciones a la función dada. Para que así suceda, tenemos que estimar el residuo, y ver si es cierto en el caso de las funciones elementales que el residuo R_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Esto significa que el polinomio de Taylor $P_n(x)$ tiende a $f(x)$ cuando $n \to \infty$, y obtenemos entonces la aproximación polinomial deseada.

XIII, §3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y tomemos $a = 0$ en la fórmula de Taylor. Ya mencionamos cuáles son las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Así,

$$f(0) = 0, \qquad f^{(2)}(0) = 0,$$
$$f'(0) = 1, \qquad f^{(3)}(0) = -1.$$

La fórmula de Taylor para $\operatorname{sen} x$ es entonces como sigue:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m+1}(x).}$$

Vemos que todos los términos pares son 0 porque $\operatorname{sen} 0 = 0$.

Podemos estimar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ de manera muy sencilla, pues

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\cos x| \leq 1$$

para todo x. En el teorema 2.2 tomamos la cota $M_n = 1$, esto es

$$|f^{(n)}(c)| \leq 1$$

para todo n, y

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}.}$$

Así, si observamos todos los valores de x tales que $|x| \leq 1$, vemos que $R_n(x)$ tiende a 0 cuando n se vuelve muy grande.

Ejemplo 1. Calcular $\operatorname{sen}(0.1)$ con 3 decimales.

Aquí tenemos $x = 0.1$. Queremos hallar n tal que

$$\frac{|x|^n}{n!} \leq 10^{-3}.$$

Por inspección vemos que funcionará $n = 3$. En efecto, tenemos que

$$|R_3(0.1)| \leq \frac{(0.1)^3}{3!} = \frac{10^{-3}}{6}.$$

Dicho término de error nos colocaría en el margen de precisión requerido, por lo que basta usar la fórmula de Taylor

$$\operatorname{sen} x = x + R_3(x).$$

Hallamos

$$\operatorname{sen}(0.1) = 0.100 + E,$$

con el término de error $E = R_3(0.1)$, tal que $|E| \leq \frac{1}{6}10^{-3}$. Con esto vemos cuán eficiente es la fórmula para calcular el seno de valores pequeños de x.

Definición. Diremos que una expresión tiene el **valor A con una precisión de** 10^{-n} si la expresión es igual a $A + E$ con un término de error E tal que

$$|E| \leq 10^{-n}.$$

En el ejemplo precedente podemos decir que $\operatorname{sen}(0.1)$ tiene el valor 0.1 con una precisión de 10^{-3}.

Advertencia. No debe escribirse $\operatorname{sen}(0.1) = 0.1$. **Esto es falso**. Es necesario escribir siempre el error, esto es, escribir

$$\operatorname{sen}(0.1) = 0.1 + E,$$

y dar un estimado para $|E|$.

Ejemplo 2. Calculemos el seno de $10°$ con una precisión de 10^{-3}. Primero debemos convertir grados en radianes, y tenemos

$$10° = 10\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}\text{radianes}.$$

Ahora tenemos que calcular $\operatorname{sen}(\pi/18)$. Suponemos que π es aproximadamente $3.14159\ldots$ y, en particular, $\pi < 3.2$. Esto se mostrará después. Entonces

$$\frac{\pi}{18} < \frac{1}{5}.$$

Tenemos que expresar $\operatorname{sen}(\pi/18)$ con el polinomio de Taylor de algún grado y un residuo que deberá estimarse. Esto requiere ir corrigiendo repetidos intentos. Se deberá experimentar con varias posibilidades. Aquí damos en seguida una que funciona. Tenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + R_5\left(\frac{\pi}{18}\right).$$

Si conocemos π con la precisión adecuada, podremos calcular los dos primeros términos con cualquier precisión deseada, mediante sencillas operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división. Tenemos entonces que estimar $R_5(\pi/18)$ para saber si está dentro de la precisión deseada. Tenemos

$$\left|R_5\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}\left(\frac{1}{5}\right)^5 < \frac{1}{3} \times 10^{-5}$$

mediante aritmética sencilla. Por lo tanto, los dos primeros términos

$$\frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$$

dan una **aproximación de** seno de $10°$ **con una precisión** de 10^{-5}, que es mejor que la que queríamos originalmente. Tratemos ahora de ver la calidad de la aproximación que se obtendría usando un solo término:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi}{18} + R_3\left(\frac{\pi}{18}\right).$$

Ejemplo 3. Calcular sen $\left(\frac{\pi}{6} + 0.2\right)$ con una precisión de 10^{-4}.

En este caso usamos la fórmula de Taylor para $f(a+h)$. Tomamos

$$a = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad h = 0.2.$$

Corrigiendo repetidos intentos, y adivinando, lo intentamos con el residuo R_4. Así,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+h) &= \operatorname{sen} a + \cos(a)\frac{h}{1} - \operatorname{sen}(a)\frac{h^2}{2!} - \cos(a)\frac{h^3}{3!} + R_4 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(0.2) - \frac{1}{2}\frac{(0.2)^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(0.2)^3}{6} + R_4.\end{aligned}$$

Para R_4 tenemos el estimado

$$|R_4| \leq \frac{(0.2)^4}{4!} = \frac{16 \cdot 10^{-4}}{24} \leq 10^{-4}$$

que está dentro de las cotas requeridas de precisión.

Convención. En los ejemplos 2 y 3 dejamos la respuesta como una suma de unos cuantos términos más un error que estimamos. *No se necesita realizar la expansión decimal de los primeros cuatro términos.* Sin embargo, quien tenga una calculadora de bolsillo podrá efectuar los cálculos y obtener una respuesta decimal. Para esto la máquina viene siendo mejor que el cerebro, pero el cerebro fue mejor para estimar el residuo.

Es cierto aún que el término residuo de la fórmula de Taylor para sen x tiende a 0 cuando n se vuelve grande, aun cuando x sea > 1. Para esto necesitamos investigar $x^n/n!$ cuando x es > 1. La dificultad es que, cuando $x > 1$, entonces x^n se vuelve grande cuando $n \to \infty$, y también $n! \to \infty$ cuando $n \to \infty$. En estas condiciones, el numerador y el denominador pelean entre ellos y debemos determinar quién gana. Trabajemos con un ejemplo, para tener una idea de lo que sucede. Tomemos $x = 2$. ¿Qué sucede con la fracción $2^n/n!$ cuando $n \to \infty$? Primero se hace una tabla:

n	1	2	3	4	5
$\frac{2^n}{n!}$	2	2	$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$	$\frac{16}{24} = \frac{1}{2}$	$\frac{32}{120} = \frac{4}{15}$

De donde deberá deducirse experimentalmente que

$$\frac{2^n}{n!} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Así, *adivinamos* la respuesta experimentando numéricamente. A continuación, nuestra tarea es *probar* el resultado general.

Teorema 3.1. *Sea c cualquier número. Entonces $c^n/n!$ tiende a 0 cuando n se vuelve muy grande.*

Demostración. Podemos suponer que $c > 0$. Sea n_0 un entero tal que $n_0 > 2c$. Así, $c < n_0/2$, y $c/n_0 < \frac{1}{2}$. Escribimos

$$\begin{aligned}\frac{c^n}{n!} &= \frac{c \cdot c \cdots c}{1 \cdot 2 \cdots n_0} \frac{c}{(n_0+1)} \frac{c}{(n_0+2)} \cdots \frac{c}{n} \\ &\leq \frac{c^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{c^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.\end{aligned}$$

Cuando n se vuelve grande, $(1/2)^{n-n_0}$ se vuelve pequeño y nuestra fracción tiende a 0. Tomando, por ejemplo, $c = 10$, escribimos

$$\frac{10^n}{n!} = \frac{10 \cdots 10}{1 \cdot 2 \cdots 20} \frac{(10) \cdots (10)}{(21) \cdots (n)} < \frac{10^{20}}{20!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-20}$$

y $(1/2)^{n-20}$ tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

Del teorema vemos que el residuo

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

A veces una integral definida no se puede evaluar a partir de una integral indefinida, pero podemos hallar aproximaciones sencillas usando la expansión de Taylor.

En el ejemplo siguiente, y en ejercicios, usaremos con frecuencia el estimado para una integral dada en los teoremas 3.2 y 3.3 del capítulo X, esto es: Sea $a < b$ y sea f continua en $[a, b]$. Sea M un número tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x en el intervalo. Entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq M(b-a).$$

Ron Infante me dice que los cálculos numéricos de integrales como la del ejemplo siguiente ocurren con frecuencia en el estudio de redes de comunicación, en relación con ondas cuadradas.

Ejemplo 4. Calcular hasta dos decimales la integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Tenemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x) \quad \text{y} \quad |R_5(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{R_5(x)}{x} \quad \text{y} \quad \left|\frac{R_5(x)}{x}\right| \leq \frac{|x|^4}{5!}.$$

Por lo cual

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!}\bigg|_0^1 + E, \quad \text{donde} \quad E = \int_0^1 \frac{R_5(x)}{x}\,dx.$$

El término de error E satisface

$$|E| \leq \int_0^1 \left|\frac{R_5(x)}{x}\right| dx \leq \int_0^1 \frac{x^4}{5!}\,dx = \frac{x^5}{5\cdot 5!}\bigg|_0^1 = \frac{1}{600}.$$

Más aún,

$$x - \frac{x^3}{3\cdot 3!}\bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{17}{18} + E, \quad \text{donde} \quad |E| \leq \frac{1}{600}.$$

Ejemplo 5. Calculemos

$$I = \int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx.$$

Hacemos $u = x^2$. Entonces

$$\operatorname{sen} u = u - \frac{u^3}{3!} + R_5(u).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!}\right) dx + \int_0^1 R_5(x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 6}\right]_0^1 + E \\ &= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{42} + E, \end{aligned}$$

donde

$$E = \int_0^1 R_5(x^2)\,dx.$$

Sabemos que

$$|R_5(u)| \leq \frac{|u|^5}{5!}.$$

Como $u = x^2$, hallamos

$$|E| \leq \int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}\,dx = \frac{1}{11\cdot 120} < 10^{-3}.$$

Por consiguiente,

$$I = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{42} + E, \quad \text{con} \quad |E| < 10^{-3}.$$

Observación. Aunque la *notación* del ejemplo anterior es *parecida* a la integración por sustitución, se deberá insistir en que el procedimiento que se siguió *no* es lo que previamente llamamos integración por sustitución.

Hemos estudiado el seno. El coseno se puede estudiar de la misma manera. Tenemos la fórmula de Taylor

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+2}(x)}$$

y

$$|R_{2m+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Observen que sólo los términos pares aparecen con coeficientes distintos de cero. En la fórmula del seno aparecen únicamente los términos impares porque las derivadas de orden impar del coseno son iguales a 0 en 0, y las derivadas de orden par del seno son iguales a 0 en 0.

Ejemplo 6. Suponer que queremos hallar el valor de

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,dx,$$

hasta 2 decimales. Escribimos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_4(x).$$

Entonces

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -\frac{x}{2} + \frac{R_4(x)}{x},$$

y para $0 \leq x \leq 1$,

$$\left|\frac{R_4(x)}{x}\right| \leq \frac{x^4}{4!x} = \frac{x^3}{4!}.$$

Obtenemos

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = -\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx + E, \qquad \text{donde} \qquad E = \int_0^1 \frac{R_4(x)}{x}\,dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + E$$

$$= -\tfrac{1}{4} + E.$$

Estimamos E:

$$|E| \leq \int_0^1 \frac{x^3}{4!}\,dx = \frac{1}{24}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{96}.$$

Fallamos con el estimado deseado por sólo unos cuantos puntos de porcentaje. Esto significa que, para obtener la precisión deseada, se debe usar un término más del polinomio de Taylor de $\cos x$, de modo que se escribe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_6(x)$$

y

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4!} + \frac{R_6(x)}{x}.$$

Entonces

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = \int_0^1 \left[-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4!}\right] dx + E,$$

donde

$$E = \int_0^1 \frac{R_6(x)}{x}\,dx.$$

Ahora usamos el estimado

$$\left|\frac{R_6(x)}{x}\right| \leq \frac{x^6}{6!x} = \frac{x^5}{6!},$$

y

$$|E| \leq \int_0^1 \frac{x^5}{6!}\,dx = \frac{1}{720}\frac{1}{6}.$$

Así, el error satisface $|E| < 10^{-3}$, y

$$\int_0^1 \left[-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4!}\right] dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{96}.$$

Esto da el valor deseado con una precisión de tres decimales.

Advertencia. La integral definida del ejemplo anterior **no puede escribirse como una suma**

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

Aunque es cierto que la integral de una suma es la suma de las integrales, esto es cierto sólo cuando las integrales tienen sentido. La integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

no tiene sentido. Primero, la función $1/x$ no es continua en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y colapsa cuando x tiende a cero. Aun si queremos interpretar esto como un valor límite,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{h\to 0}\int_h^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{h\to 0}(\log 1 - \log h),$$

el límite no existe porque $\log h$ se vuelve negativo grande cuando h tiende a 0. De modo que no podemos separar la integral deseada en una suma.

Además, se puede mostrar que **no existe una expresión sencilla que dé una integral indefinida**

$$\int \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = F(x),$$

con una función $F(x)$ expresable en términos de funciones elementales. Por otro lado, como hemos visto, podemos evaluar perfectamente bien la integral definida, con cualquier precisión.

XIII, §3. EJERCICIOS

A menos que se especifique otra cosa, tomar la fórmula de Taylor con $a = 0$ y $b = x$.

En todos los cálculos, *incluir* un estimado del término residuo (error), que muestre que la respuesta dada está dentro de la precisión deseada.

1. Escribir el polinomio de Taylor de grado 4 para $\cos x$. Probar la fórmula de Taylor enunciada en el texto para $\cos x$.
2. Dar los detalles para el estimado $|R_{2m+2}(x)| \leq |x|^{2m+2}/(2m+2)!$ para la función $f(x) = \cos x$.
3. Calcular $\cos(0.1)$ hasta 3 decimales.
4. Estimar el residuo R_3 en la fórmula de Taylor para $\cos x$, para el valor $x = 0.1$.
5. Estimar el residuo R_4 en la fórmula de Taylor para $\operatorname{sen} x$, para el valor $x = 0.2$.
6. Escribir el polinomio de Taylor de grado 4 para $\tan x$.
7. Estimar el residuo R_5 en la fórmula de Taylor para $\tan x$, para $0 \leq x \leq 0.2$.

En los ejercicios 8, 9, 10 y 11, la fórmula de Taylor se usa con $a \neq 0$.

8. Calcular los siguientes valores hasta 3 lugares decimales.
(a) sen 31° (b) cos 31° (c) sen 47°
(d) cos 47° (e) sen 32° (f) cos 32°
9. Calcular el coseno de 31 grados hasta 3 decimales.
10. Calcular el seno de 61 grados hasta 3 decimales.
11. Calcular el coseno de 61 grados hasta 3 decimales.
12. Calcular las integrales siguientes hasta tres decimales.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{0.1} \frac{\cos x - 1}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\,dx$

13. Calcular
$$\int_0^{1/2} \frac{\cos x - 1}{x}\,dx$$
hasta 5 decimales.

XIII, §4. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Todas las derivadas de e^x son iguales a e^x y $e^0 = 1$. Por lo tanto, la fórmula de Taylor para e^x es

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x).}$$

El término residuo satisface

$$\boxed{R_n(x) = e^c \frac{x^n}{n!},}$$

donde c es un número entre 0 y x. Por lo tanto,

$$\boxed{|R_n(x)| \le e^c \frac{|x|^n}{n!}.}$$

Nótese que e^c siempre es positivo, y

$$\text{si } x < 0, \quad \text{entonces} \quad c < 0 \quad \text{y} \quad 0 < e^c < 1.$$

Como con la función seno, el teorema 3.1 muestra que el término residuo tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

Ejemplo 1. Calcular e con 3 decimales.

Tenemos $e = e^1$. Del capítulo VIII, sección §6, sabemos que $e < 4$. Estimamos R_7:

$$|R_7| \le e\frac{1}{7!} \le 4\frac{1}{5040} < 10^{-3}.$$

Así

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6!} + R_7 \\ &= 2.718\ldots \end{aligned}$$

Claro que, mientras más pequeño sea x, se necesitarán menos términos de la serie de Taylor para aproximar e^x.

Observación. En el capítulo VIII obtuvimos el estimado ingenuo $e < 4$. Ahora tenemos una evaluación mucho más fina, que muestra en particular que $e < 3$. Así, usando un estimado burdo y la fórmula de Taylor podemos obtener una determinación precisa de e. Incluso si hubiéramos comenzado sabiendo que $e < 3$ (podríamos haberlo obtenido mediante un estimado similar al del capítulo VIII), no hubiera ayudado gran cosa para obtener un valor más preciso.

Ejemplo 2. ¿Cuántos términos de la fórmula de Taylor se necesitan para calcular $e^{1/10}$ con una precisión de 10^{-3}?

Ciertamente tenemos $e^{1/10} < 2$. Así

$$|R_3(1/10)| \le 2\frac{(1/10)^3}{3!} < \frac{1}{2}10^{-3}.$$

Por lo tanto, necesitamos sólo 3 términos (incluido el término 0-ésimo).

XIII, §4. EJERCICIOS

En los ejercicios, cuando se pida calcular una cantidad con cierto grado de precisión, mostrar siempre el estimado obtenido del término de error para probar que se logra la precisión deseada.

1. Escribir el polinomio de Taylor de grado 5 para e^{-x}.
2. Estimar el residuo R_3 en la fórmula de Taylor para e^x si $x = 1/2$.
3. Estimar el residuo R_4 para $x = 10^{-2}$.
4. Estimar el residuo R_3 para $x = 10^{-2}$.
5. Calcular e hasta cuatro decimales, después hasta cinco decimales y después hasta seis decimales. En cada caso, escribir e como una suma de fracciones más un término residuo y estimar el término residuo.[Este ejercicio trata de dar una idea práctica del tamaño de los términos residuo, y de cuántos se necesitan para obtener la precisión deseada. Se puede calcular la suma de las fracciones con una calculadora de bolsillo.]

6. Calcular $1/e$ hasta 3 decimales, y mostrar el residuo que daría una precisión de 10^{-3}.
7. Estimar el residuo R_4 en la fórmula de Taylor para e^x cuando
(a) $x = 2$. (b) $x = 3$.
8. Estimar el residuo R_5 en la fórmula de Taylor para e^x cuando
(a) $x = 2$. (b) $x = 3$.
9. ¿Cuántos términos de la fórmula de Taylor para e^x se necesitarían para calcular e^2 hasta
(a) 4 decimales? (b) 6 decimales?
10. Calcular e hasta 10 decimales. Primero darlo como suma de números racionales. Después usar alguna máquina calculadora para obtener los decimales. Mostrar el estimado del término de error.
11. Calcular $1/e^2$ hasta 4 decimales.
12. Calcular las integrales siguientes hasta 3 o 4 decimales, dependiendo de cuánto se quieran esforzar.
(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$
(d) $\displaystyle\int_0^{0.1} e^{x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{0.1} e^{-x^2}\,dx$

XIII, §5. EL LOGARITMO

Queremos obtener una fórmula de Taylor para el log. No podemos manejar el log escribiendo simplemente

$$\log x = \log 0 + \log'(0)x + \cdots$$

porque no está definido $\log 0$. Así, para el log, es mejor obtener una fórmula con $a = 1$, de modo que

$$\log b = \log 1 + \log'(1)(b-1) + \log''(1)\frac{(b-1)^2}{2!} + \cdots.$$

La experiencia muestra que entonces es más conveniente hacer

$$b = 1 + x$$

de modo que $b - 1 = x$. De esa manera obtenemos una fórmula de Taylor

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots.$$

Dejamos como ejercicio (vean el ejercicio de la sección §1) deducir esta fórmula de la manera usual, calculando las derivadas $f^{(k)}(0)$, donde $f(x) = \log(1+x)$.

Aquí obtendremos el resultado por otro método, que también será aplicable en la siguiente sección y que, en algunos aspectos, es más eficiente y hace que la serie para el log sea fácil de recordar.

Deberían conocer desde el bachillerato la serie geométrica

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots.$$

Más adelante la deduciremos de nuevo, pero por el momento trabajaremos formalmente y no nos preocuparemos acerca del significado de la suma infinita. Al reemplazar u por $-x$ obtenemos

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Al integrar el lado izquierdo y el lado derecho término a término, de nuevo sin preocuparnos lo que significa la suma infinita, obtenemos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Vemos que en el lado derecho los signos se alternan y que tenemos sólo n en el denominador de x^n/n en lugar de $n!$, como sucede para $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y e^x.

Ahora debemos empezar de nuevo para deducir la fórmula con un término residuo que nos permita estimar valores para el log. Además, como $\log 0$ no está definido, tendremos que tomar x en algún intervalo de números > -1. Resulta que la fórmula de Taylor dará valores para la función sólo en el intervalo

$$-1 < x \leq 1.$$

Esto contrasta con $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y e^x, donde obtuvimos valores para todo x.

Sea u cualquier número $\neq 1$. Deseamos justificar la serie

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots.$$

No se preocupen por ahora acerca del significado de la suma infinita de la derecha: se usará formalmente. Si se multiplican los términos cruzados se obtiene

$$\begin{aligned}(1-u)(1 + u + u^2 + u^3 + \cdots) &= 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots \\ &\quad - u - u^2 - u^3 - \cdots \\ &= 1.\end{aligned}$$

De modo que hemos justificado formalmente la serie geométrica.

A continuación nos ocupamos de la suma infinita. No sabemos cómo sumar una infinidad de números, de modo que enunciaremos una relación análoga a la anterior pero con un número finito de términos. Esto se basa en la fórmula

$$\frac{1-u^n}{1-u} = 1 + u + \cdots + u^{n-1}$$

para cualquier entero $n > 1$. La demostración se obtiene de nuevo multiplicando términos cruzados:

$$\begin{aligned}(1-u)(1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}) &= 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} \\ &\quad - u - u^2 - \cdots - u^{n-1} - u^n \\ &= 1 - u^n.\end{aligned}$$

Como
$$\frac{1-u^n}{1-u} = \frac{1}{1-u} - \frac{u^n}{1-u},$$
hallamos finalmente
$$\boxed{\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} + \frac{u^n}{1-u}.}$$

Queremos aplicar esta fórmula con el fin de obtener una expresión para $1/(1+t)$, porque por último queremos obtener una expresión para
$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt.$$
Sustituimos $u = -t$ y hallamos
$$\boxed{\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.}$$

Consideremos el intervalo $-1 < x \leq 1$, y tomemos la integral de 0 a x (en este intervalo). Son bien conocidas las integrales de las potencias de t. La integral
$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \log(1+x)$$
se calcula mediante la sustitución $u = 1+t$, $du = dt$. Así obtenemos:

Teorema 5.1. *Para $-1 < x \leq 1$, tenemos*
$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)}$$
donde el residuo $R_{n+1}(x)$ es la integral
$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt.$$
Observen que fue esencial que $x > -1$ porque la expresión $1/(1+t)$ no tiene significado cuando $t = -1$. La fórmula anterior también vale para $x > 1$. Sin embargo, veremos que el término residuo tiende a 0 sólo cuando x está en el intervalo mencionado.

Caso 1. $0 < x \leq 1$.

En ese caso, $1 + t \geq 1$. Así,
$$\frac{t^n}{1+t} \leq t^n,$$
y nuestra integral está acotada por $\int_0^x t^n\, dt$. Así, en ese caso,
$$\boxed{|R_{n+1}(x)| \leq \int_0^x t^n\, dt \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.}$$

En particular, el residuo tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

Observación. En las aplicaciones usaremos un recurso que nos permita tratar sólo con el caso 1. *Así que, si lo desean, pueden omitir el caso 2.*

Caso 2. $-1 < x < 0$.

En este caso t está entre 0 y x y es negativo, pero aún tenemos
$$x \leq t \leq 0,$$
y $0 < 1 + x < 1 + t$. Por lo tanto,
$$\left|\frac{t^n}{1+t}\right| = \frac{|t|^n}{1+t} \leq \frac{(-t)^n}{1+x}.$$
Para estimar el valor absoluto de la integral podemos invertir los límites (hacemos esto porque $x \leq 0$), y así
$$|R_{n+1}(x)| \leq \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+x}\, dt$$
de modo que
$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}.$$
Por lo tanto, el residuo también tiende a 0 en ese caso. Pero cuando x es negativo y $-1 < x < 0$, entonces $1 + x < 1$ y no podemos estimar $1/(1+x)$ de la misma manera que en el caso 1, porque **no tenemos** $1/(1+x) \leq 1$. Como se ve, el caso 2 es desagradable y ésa es la razón por la cual lo evitamos.

Ejemplo. Calculemos $\log 2$ hasta 3 decimales. Sabemos que $\log(1+x)$ se puede calcular de manera eficiente sólo cuando x está cerca de 0. Pero $2 = 1+1$. Tenemos que usar algún recurso auxiliar que nos evite sustituir $x = 1$ en la fórmula. Para ello escribimos
$$2 = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{3}{2}.$$
Entonces
$$\tfrac{4}{3} = 1 + \tfrac{1}{3} \quad \text{y} \quad \tfrac{3}{2} = 1 + \tfrac{1}{2}.$$
Al usar $x = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{2}$ lograremos lo que queremos. En efecto,
$$\log 2 = \log(\tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{3}{2}) = \log(1 + \tfrac{1}{3}) + \log(1 + \tfrac{1}{2}).$$
Para hallar $\log(1 + \frac{1}{3})$ usamos $x = \frac{1}{3}$ y
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + R_6(x).$$
Por el estimado del caso 1, obtenemos
$$|R_6(\tfrac{1}{3})| \leq \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{3})^6 \leq \tfrac{1}{4} \times 10^{-3}.$$
Por lo tanto,
$$\begin{aligned}\log\frac{4}{3} = \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{3} - \frac{(1/3)^2}{2} + \frac{(1/3)^3}{3} - \frac{(1/3)^4}{4} + \frac{(1/3)^5}{5} + E_1 \\ &= A_1 + E_1\end{aligned}$$

con

$$E_1 = R_6(\tfrac{1}{3}) \quad \text{y} \quad |E_1| \le \tfrac{1}{4} \times 10^{-3}.$$

Del mismo modo obtenemos $\log \frac{3}{2}$:

$$\log\frac{3}{2} = \log\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^2}{2} + \cdots + \frac{(1/2)^7}{7} + E_2$$
$$= A_2 + E_2$$

con el término de error $E_2 = R_8(1/2)$. Tenemos el estimado

$$|E_2| = |R_8(\tfrac{1}{2})| \le \tfrac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

Por lo tanto,

$$\log 2 = \log(1+\tfrac{1}{2}) + \log(1+\tfrac{1}{3})$$
$$= A_1 + A_2 + E_1 + E_2,$$

donde A_1 y A_2 son expresiones sencillas que se pueden calcular a partir de las fracciones usando suma, multiplicación y resta, y el término de error es $E = E_1 + E_2$. Podemos ahora estimar E, a saber

$$|E| \le |E_1| + |E_2| \le \tfrac{1}{4} \times 10^{-3} + \tfrac{1}{2} \times 10^{-3} < 10^{-3}.$$

Esto está dentro de la precisión deseada. Si tienen una pequeña calculadora de bolsillo, pueden evaluar fácilmente un decimal numérico para $\log 2$.

En el cálculo anterior, aún necesitamos seis u ocho términos en la expresión polinomial que aproxima el logaritmo para obtener los tres decimales de precisión. En el ejercicio 2, siguiendo la misma idea general, verán cómo obtener respuestas precisas usando menos términos.

Ejemplo. Suponer que queremos calcular $\log \frac{3}{4}$ hasta 3 decimales. Nótese que $\frac{3}{4} < 1$, y, si tratamos de evaluar

$$\log \tfrac{3}{4} = \log(1 - \tfrac{1}{4}),$$

entonces tendríamos que usar el caso 2. Esto se puede evitar usando la regla general

$$\log\frac{1}{a} = -\log a$$

para cualquier número positivo a. En particular,

$$\log \tfrac{3}{4} = -\log \tfrac{4}{3}$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{(1/3)^2}{2} + \frac{(1/3)^3}{3} - \frac{(1/3)^4}{4} + \frac{(1/3)^5}{5} - E,$$

y

$$|-E| = |E| \le \tfrac{1}{4} \times 10^{-3}.$$

Ejemplo. Calcular $\log 1.1$ hasta tres decimales.

Para hacerlo, i.e. para calcular $\log(1+0.1)$, tomamos $n = 2$ y $x = 0.1$ en el caso 1. Hallamos que

$$|R_3(x)| \le \tfrac{1}{3} \times 10^{-3}.$$

Por lo tanto,

$$\log(1.1) = 0.1 - 0.005 + E$$

con un error E tal que $|E| \le \frac{1}{3} \times 10^{-3}$.

XIII, §5. EJERCICIOS

1. Calcular los valores siguientes hasta una precisión de 10^{-3}, estimando el residuo cada vez.
   (a) $\log 1.2$ (b) $\log 0.9$ (c) $\log 1.05$
   (d) $\log \frac{9}{10}$ (e) $\log \frac{24}{25}$ (f) $\log \frac{26}{25}$

2. (a) Verificar las fórmulas siguientes:

$$\log 2 = 7\log\tfrac{10}{9} - 2\log\tfrac{25}{24} + 3\log\tfrac{81}{80},$$
$$\log 3 = 11\log\tfrac{10}{9} - 3\log\tfrac{25}{24} + 5\log\tfrac{81}{80}.$$

   (b) Calcular $\log 2$ y $\log 3$ hasta cinco decimales, usando estas fórmulas.

Quizá se pregunten de dónde salieron estas fórmulas. La respuesta es que alguien inteligente, probablemente hace más de 200 años, las halló experimentando con números, y después todo el mundo las copió.

XIII, §6. EL ARCOTANGENTE

Procedemos como con el logaritmo, excepto que ponemos $u = -t^2$ en la serie geométrica, y obtenemos

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{m-1}t^{2m-2} + (-1)^m\frac{t^m}{1+t^2}.$$

Después de la integración de 0 a cualquier número x, obtenemos:

Teorema 6.1. *El* arctan *tiene una expansión*

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + R_{2m+1}(x),}$$

donde

$$R_{2m+1}(x) = (-1)^m \int_0^x \frac{t^{2m}}{1+t^2}\,dt,$$

y

$$\boxed{|R_{2m+1}(x)| \le \int_0^{|x|} t^{2m}\,dt \le \frac{|x|^{2m+1}}{2m+1}.}$$

Cuando $-1 \leq x \leq 1$, el residuo tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

Obsérvese cómo sólo aparecen potencias impares de x en la fórmula de Taylor para $\arctan x$. Ésta es la razón para escribir $2m+1$, o R_{2m+1}. Si ponemos $n = 2m+1$, entonces podemos escribir el estimado para el residuo en la forma

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n}.}$$

Este estimado es el mismo que para el log, excepto que para el arctan tomamos sólo enteros impares n.

Observación. Si x no está en el intervalo prescrito, i.e. si $|x| > 1$, entonces el término residuo no tiende a 0 cuando n se vuelve grande. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces el término residuo está acotado por

$$\frac{2^{2m+1}}{2m+1}.$$

Al calcular unos cuantos valores con $m = 1, 2, 3, \ldots$ verán que esta expresión se hace grande muy rápido. Quizá sepan esto de su estudio de la función exponencial.

A partir de nuestro teorema, obtenemos una bella expresión para $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

de la fórmula de Taylor para $\arctan 1$. Sin embargo, se necesitan muchos términos para obtener una buena aproximación para $\pi/4$ usando esta expresión. Hablando burdamente, con 1000 términos se puede obtener apenas una precisión de 10^3, lo cual es muy ineficiente. Si usamos un enfoque más inteligente podemos hallar π con mucho mayor rapidez, como sigue. Primero tenemos:

Fórmula de la suma para la tangente:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Demostración. Usando las fórmulas de la suma para el seno y el coseno demostradas en el capítulo 4, teorema 3.1, tenemos

$$\tan(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}.$$

Ahora dividimos el numerador y el denominador de la derecha entre $\cos x \cos y$. La fórmula deseada cae por su propio peso.

En la fórmula de la suma para la tangente, poner $u = \tan x$ y $v = \tan y$, de modo que $x = \arctan u$ y $y = \arctan v$. Como

$$\arctan(\tan(x+y)) = x + y = \arctan u + \arctan v,$$

obtenemos la **fórmula de la suma para el arcotangente:**

$$\boxed{\arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u+v}{1-uv}.}$$

Ejemplo. Considerar los valores especiales $u = 1/2$ y $v = 1/3$. Mediante aritmética sencilla obtenemos, para estos valores,

$$\frac{u+v}{1-uv} = \frac{1/2+1/3}{1-1/6} = 1.$$

Como $\arctan 1 = \pi/4$, obtenemos la fórmula:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.}$$

A continuación usamos la fórmula de Taylor para el arctan,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + R_5(x)$$

con

$$|R_5(x)| \leq \frac{|x|^5}{5}.$$

Entonces obtenemos

(1) $$\arctan \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + R_5\left(\frac{1}{2}\right)$$

y

$$|R_5(\tfrac{1}{2})| \leq \tfrac{1}{160}.$$

Esto no es excepcionalmente bueno, pero muestra que con sólo dos términos del polinomio que aproxima $\arctan x$ obtenemos alrededor de 2 decimales de precisión. Al usar un par más de términos deberán obtenerse 4 decimales.

De manera análoga obtenemos

(2) $$\arctan \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{(1/3)^3}{3} + R_5\left(\frac{1}{3}\right)$$

y

$$\left|R_5\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leq \frac{(1/3)^5}{5} \leq \frac{1}{2025} < \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} + E = A + E,$$

donde $E = R_5(\frac{1}{2}) + R_5(\frac{1}{3})$, y

$$|E| \leq |R_5(\tfrac{1}{2})| + |R_5(\tfrac{1}{3})| < 10^{-2}.$$

La expresión A es una suma de fracciones que se puede calcular fácilmente con una calculadora de bolsillo. Entonces

$$\pi = 4(\arctan \tfrac{1}{2} + \arctan \tfrac{1}{3}) = 4A + 4E,$$

donde

$$|4E| < 4 \times 10^{-2}.$$

Nótese que este factor final de 4 hace que el estimado del término de error sea algo más complicado. Por ello, al determinar los residuos que se deben tomar, hay que asegurarse de que en el paso final, al multiplicar por 4, la precisión esté dentro de las cotas deseadas. Conviene experimentar con R_7 y R_9 para tener buena idea del tamaño de estos residuos.

XIII, §6. EJERCICIOS

1. Probar las fórmulas:

$$2 \arctan u = \arctan \frac{2u}{1-u^2} \qquad \text{y} \qquad 3 \arctan u = \arctan \frac{3u - u^3}{1 - 3u^2}.$$

2. Probar:
   (a) $\arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$
   (b) $\arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$
   (c) $\pi/4 = 2 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{1}{8}$

3. Hallar varias aproximaciones decimales para π estimando $R_3(x)$, $R_5(x)$, $R_7(x)$ y $R_9(x)$ en la fórmula de Taylor para el arcotangente y usando la expresión

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3},$$

así como la expresión (c) del ejercicio 2. Por último, verificar que

$$\pi = 3.14159\ldots$$

con una precisión de 5 decimales.

4. Probar la fórmula $\pi/4 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$. ¿Cuántos términos de la fórmula de Taylor se necesitan para obtener la precisión anterior para una aproximación decimal de π?

XIII, §7. LA EXPANSIÓN BINOMIAL

En la secundaria debieron haber aprendido el desarrollo de $(a+b)^n$ o $(1+x)^n$. Por ejemplo,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$
$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Usando sólo álgebra se pueden determinar los coeficientes para la expansión de $(1+x)^n$ cuando n es un entero positivo. Sin embargo, aquí estaremos interesados

además en potencias $(1+x)^s$ cuando s no es un entero positivo. Para esto usaremos el método general de la fórmula de Taylor que dice:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Aplicamos esta fórmula a la función

$$f(x) = (1+x)^s.$$

Teorema 7.1. *Sea n un entero positivo y $x \neq -1$. Entonces*

$$\boxed{\begin{aligned} (1+x)^s &= 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \end{aligned}}$$

Demostración. Sea $f(x) = (1+x)^s$. Entonces calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= s(1+x)^{s-1}, & f^{(1)}(0) &= s, \\ f^{(2)}(x) &= s(s-1)(1+x)^{s-2}, & f^{(2)}(0) &= s(s-1), \\ f^{(3)}(x) &= s(s-1)(s-2)(1+x)^{s-3}, & f^{(3)}(0) &= s(s-1)(s-2), \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= s(s-1)\cdots(s-k+1)(1+x)^{s-k}, & f^{(k)}(0) &= s(s-1)\cdots \\ & & &\quad (s-k+1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}.$$

Por la fórmula general de Taylor, esto prueba la expansión deseada para $(1+x)^s$.

La fórmula general para el término residuo es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)x^n}{n!}$$

con algún número c entre 0 y x; entonces, en este caso hallamos:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}(1+c)^{s-n}x^n.}$$

Se puede mostrar que, si $-1 < x < 1$, entonces $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Estimaremos el residuo cuando $n = 2$ y $n = 3$. No damos la demostración en general de que $R_n(x)$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

En estos estimados, usamos repetidamente el hecho de que

$$|ab| = |a||b|.$$

Por ejemplo, productos como $s(s-1)(s-2)$ se presentan a menudo en estos estimados. Entonces

$$|s(s-1)(s-2)| = |s||s-1||s-2|.$$

Si $s = \frac{1}{3}$, hallamos que

$$\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{3}-1\right|\left|\frac{1}{3}-2\right| = \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{5}{3} = \frac{10}{27}.$$

Ejemplos que incluyen R_2

Veamos ahora R_2. Sea

$$f(x) = (1+x)^s,$$

donde s no es un entero. Tenemos

$$f^{(2)}(x) = s(s-1)(1+x)^{s-2}.$$

La fórmula de Taylor da

$$\boxed{(1+x)^s = 1 + sx + R_2(x),}$$

donde

$$R_2(x) = f^{(2)}(c)\frac{x^2}{2!}$$
$$= s(s-1)(1+c)^{s-2}\frac{x^2}{2},$$

para algún número c entre 0 y x.

Para x pequeño, esto significa que $1+sx$ deberá ser una buena aproximación para la potencia s de $1+x$ si se puede probar que $R_2(x)$ es pequeño, y esto se puede hacer fácilmente. Vemos que

$$\boxed{|R_2(x)| = \frac{|s(s-1)|}{2}(1+c)^{s-2}|x|^2,}$$

donde c está entre 0 y x. Mediante un estimado fácil se ve, por ejemplo, que $(1+x)^{1/2}$ es aproximadamente igual a $1+\frac{1}{2}x$, y $(1+x)^{1/3}$ es aproximadamente igual a $1+\frac{1}{3}x$, para x pequeño.

Ejemplo 1. Hallar $\sqrt{1.2}$ hasta 2 decimales.
Hacemos $x = 0.2 = 2 \times 10^{-1}$ y $s = 1/2$. Entonces

$$1.2 = (1+0.2)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}0.2 + R_2(0.2)$$
$$= 1 + 0.1 + R_2(\tfrac{1}{5}).$$

Debemos estimar $R_2(1/5)$. Como $0 \le c \le 1/5$ y $s-2 = -3/2$, hallamos

$$(1+c)^{s-2} = \frac{1}{(1+c)^{3/2}} \le 1,$$

pues, cuanto más pequeño sea el denominador, más grande será la fracción. La única información que tenemos sobre c es que $0 \le c \le 1/5$, y el valor más pequeño posible del denominador es cuando $c = 0$. En consecuencia,

$$\left|R_2\left(\frac{1}{5}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}-1\right|\frac{1}{2}(0.2)^2$$
$$\le \frac{1}{8}4 \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 10^{-2}.$$

Entonces el estimado para el término de error está dentro de la precisión adecuada.

Ejemplo 2. Calculemos $\sqrt{0.8}$ hasta 2 decimales.
Usamos $s = 1/2$ y $x = -0.2$. Entonces

$$0.8 = (1-0.2)^{1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}0.2 + R_2(-0.2) = 0.9 + R_2(-0.2).$$

Aquí tenemos $-0.2 \le c \le 0$. Por lo tanto, $1/(1+c)^{3/2} \le 1/(0.8)^{3/2}$, y

$$|R_2(-0.2)| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}-1\right|\frac{1}{2!}\frac{1}{(0.8)^{3/2}}(0.2)^2$$
$$\le \frac{1}{8}\frac{1}{(0.8)^{3/2}}4 \times 10^{-2}.$$

La presencia del término $(0.8)^{3/2}$, que es < 1, en el denominador lo hace un poco más complicado de estimar que en el ejemplo anterior, pero aun así no es tan difícil. Sin esforzarnos gran cosa para hacer sencillo el estimado, reemplazamos $3/2$ por 2. Entonces

$$\frac{1}{(0.8)^{3/2}} < \frac{1}{(0.8)^2} = \frac{1}{0.64} < \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Por lo tanto,

$$|R_2(-0.2)| < \frac{1}{8}\frac{5}{3}4 \times 10^{-2} < 10^{-2}.$$

Observación. En el ejemplo 1 y el 2 encontramos los casos en que $x > 0$ y $x < 0$. En el estimado para R_2, esto da lugar a dos casos diferentes:

$$\frac{1}{(1+c)^{3/2}} \le 1 \qquad \text{cuando} \quad x > 0 \quad \text{y} \quad 0 \le c \le x;$$
$$\frac{1}{(1+c)^{3/2}} \le \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \qquad \text{cuando} \quad x < 0 \quad \text{y} \quad x \le c \le 0.$$

El segundo caso es más molesto de tratar.

En los ejemplos anteriores calculamos raíces de $1+x$ cuando x es pequeño. Para hallar las raíces de un número arbitrario, a menudo podemos usar un truco como en el ejemplo siguiente, a fin de reducir el problema a una raíz $(1+x)^s$ con x pequeño.

Ejemplo 3. Hallar el valor de $\sqrt{26}$ hasta dos decimales.
Para ello escribimos

$$26 = 25 + 1 = 25(1 + \tfrac{1}{25}).$$

Entonces

$$\sqrt{26} = 5(1 + \tfrac{1}{25})^{1/2},$$

y podemos aplicar la fórmula binomial de Taylor para hallar

$$\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{50} + R_2(x),$$

con $x = \frac{1}{25}$ y $s = \frac{1}{2}$. Estamos en el caso $c \geq 0$, de modo que obtenemos

$$\left|R_2\left(\frac{1}{25}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}\right)^2 \leq \frac{1}{8}\frac{1}{625} = \frac{1}{5000}.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{26} = 5(1 + \tfrac{1}{50}) + 5R_2(\tfrac{1}{25}) = 5.1 + E$$

donde

$$|E| = 5|R_2(\tfrac{1}{25})| \leq 10^{-3}.$$

Observen el factor 5 que aparece en el último paso, y que multiplica el estimado para $R_2(1/25)$. Para obtener la precisión final hasta 10^{-3}, se necesita una precisión de $(1/5) \times 10^{-3}$ para $R_2(1/25)$ debido a este factor 5.

Un ejemplo que incluye R_3

Ejemplo 4. Hallar el valor de $\sqrt{26}$ hasta cuatro decimales.
Para esto escribimos $26 = 25(1+1/25)$, como antes. Por la fórmula binomial de Taylor hallamos

$$\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{25} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{25}\right)^2 + R_3\left(\frac{1}{25}\right).$$

Al estimar el residuo estamos en el caso $c \geq 0$, de modo que

$$\begin{aligned}\left|R_3\left(\frac{1}{25}\right)\right| &\leq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2} - 1\right|\left|\frac{1}{2} - 2\right|\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3 \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3 \\ &< \frac{1}{16}\frac{1}{1.5} \times 10^{-4} \\ &\leq \frac{1}{24} \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}26^{1/2} &= 5(1 + 1/25)^{1/2} \\ &= 5\left(1 + \frac{1}{50} - \frac{1}{4}\frac{1}{625}\right) + E,\end{aligned}$$

donde $E = 5R_3(1/25)$, y así,

$$|E| \leq \frac{5}{24} \times 10^{-4} < 10^{-4}.$$

Esto está dentro de la precisión deseada. Nótese de nuevo el factor de 5 en el último paso.

El método del ejemplo anterior fue hallar un cuadrado perfecto cerca de 26 y después usar la fórmula de Taylor para $(1+x)^{1/2}$ con un x pequeño. En general, podemos usar un método parecido para hallar la raíz cuadrada de un número. Hallar un cuadrado perfecto lo más cerca que sea posible del número y después usar la fórmula de Taylor. Una técnica similar funciona para raíces cúbicas u otras raíces.

La expansión binomial $(1 + x)^n$ y $(a + b)^n$

Concluimos esta sección mostrando cómo el desarrollo binomial para $(1 + x)^s$ mediante la fórmula de Taylor se vuelve más sencillo cuando s es un entero positivo n. Sea n, entonces, un entero positivo, y sea

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

No tenemos dificultad alguna para calcular las derivadas:

$$\begin{aligned}
&f^{(1)}(x) = n(1 + x)^{n-1}, && f^{(1)}(0) = n, \\
&f^{(2)}(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2}, && f^{(2)}(0) = n(n - 1), \\
&f^{(3)}(x) = n(n - 1)(n - 2)x^{n-3}, && f^{(3)}(0) = n(n - 1)(n - 2), \\
&\quad\vdots && \quad\vdots \\
&f^{(n)}(x) = n!, && f^{(n}(0) = n! \\
&f^{(n+1)}(x) = 0. && f^{(n+1)}(0) = 0.
\end{aligned}$$

Aquí la nueva característica es que $f^{(n+1)}(x) = 0$. Por lo tanto, $f^{(k)}(x) = 0$ para todo $k \geq n + 1$, y el residuo después del término n-ésimo es igual a 0, de ahí que obtengamos la expresión exacta:

Teorema 7.2. *Sea n un entero positivo. Para cualquier número x tenemos*

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n - 1)}{2!}x^2 + \frac{n(n - 1)(n - 2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n.$$

El coeficiente de x^k en el lado derecho se denota usualmente por el símbolo

$$\binom{n}{k}$$

y se llama **coeficiente binomial**. Así, de las derivadas que hallamos antes obtenemos

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - k + 1)}{k!}.}$$

El numerador está formado por el producto de enteros en orden descendente de n a $n-k+1$. Difiere de $n!$ en que falta el producto desde $(n-k)$ hasta 1. Para tener una expresión más simétrica para el coeficiente binomial, multiplicamos el numerador y el denominador por $(n-k)!$. Observamos que

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)! = n!$$

y, en consecuencia, podemos escribir el coeficiente binomial en la forma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

En esta fórmula, hacemos $0 \leq k \leq n$, y, **por convención, hacemos**

$$0! = 1.$$

Por ejemplo:

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!3!} = 1, \qquad \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = 3,$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3, \qquad \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1.$$

Los enteros 1, 3, 3 y 1 son exactamente los coeficientes del desarrollo para

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Al efectuar los ejercicios se pueden hallar los coeficientes para potencias más altas.

Si queremos el desarrollo de $(a+b)^n$ con números arbitrarios a y b, y $a \neq 0$, entonces hacemos $x = b/a$, de modo que:

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Así, podemos escribir el desarrollo binomial en la forma

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}$$

Podemos hallar este desarrollo de manera sofisticada, usando la fórmula de Taylor en el caso en que el residuo es 0. En el bachillerato habrán deducido el desarrollo de manera mucho más elemental. El punto es que aquí necesitamos esta técnica más general para calcular valores $(1+x)^s$ con un exponente s más general que puede no ser entero. Por ejemplo, necesitamos calcular

$$(1+x)^{1/2} \quad \text{o} \quad (1+x)^{1/3}.$$

Tenemos que usar entonces el método de la fórmula de Taylor.

Definición. Sea s cualquier número real. Definimos el **coeficiente binomial**

$$\boxed{\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}.}$$

Ejemplo. Supongamos que $s = 1/3$. Entonces

$$\binom{1/3}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{1}{2!},$$

$$\binom{1/3}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)\frac{1}{3!},$$

$$\binom{1/3}{4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)\left(\frac{1}{3} - 3\right)\frac{1}{4!},$$

y así sucesivamente.

Observen que, cuando s no es un entero, no podemos multiplicar el numerador y el denominador por $(s-k)!$ lo cual no tiene sentido. Tenemos que dejar el coeficiente binomial como en la definición.

Usando el signo de sumatoria, podemos escribir también

$$\boxed{(1+x)^s = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} x^k + R_{n+1}(x).}$$

XIII, §7. EJERCICIOS

En cada uno de los casos siguientes, cuando se pida calcular un número, incluir el estimado para el término de error para mostrar que está dentro de la precisión deseada.

1. Estimar el residuo R_2 en la serie de Taylor para $(1+x)^{1/4}$:
   (a) cuando $x = 0.01$, (b) cuando $x = 0.2$, (c) cuando $x = 0.1$.
2. Estimar el residuo R_3 en la serie de Taylor para $(1+x)^{1/2}$:
   (a) cuando $x = 0.2$, (b) cuando $x = -0.2$, (c) cuando $x = 0.1$.
3. Estimar R_2 en el residuo de $(1+x)^{1/3}$ para x en el intervalo
   $$-0.1 \leq x \leq 0.1.$$
4. Estimar el residuo R_2 en la serie de Taylor de $(1+x)^{1/2}$:
   (a) cuando $x = -0.2$, (b) cuando $x = 0.1$.
5. Calcular las raíces cúbicas hasta 4 decimales:
   (a) $\sqrt[3]{126}$, (b) $\sqrt[3]{130}$, (c) $\sqrt[3]{131}$ (d) $\sqrt[3]{220}$.
6. Calcular las raíces cuadradas hasta 4 decimales:
   (a) $\sqrt{97}$, (b) $\sqrt{102}$, (c) $\sqrt{105}$, (d) $\sqrt{28}$.

XIII, §8. ALGUNOS LÍMITES

Los límites de cocientes de funciones se pueden reducir a límites de cocientes de polinomios usando unos cuantos términos del desarrollo de Taylor.

Veamos primero los polinomios.

Ejemplo 1. Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - 2x^2 + 5x^4}{7x}.$$

$\frac{3 - 2x + 5x^3}{7}$

Dividimos el numerador y el denominador entre la *menor* potencia de x que ocurra en cada uno, de modo que hallamos:

$$\frac{3x - 2x^2 + 5x^4}{7x} = \frac{x(3 - 2x + 5x^3)}{x\cdot 7} = \frac{3 - 2x + 5x^3}{7}.$$

Ahora es fácil hallar el límite cuando x tiende a 0; a saber, el límite es $\frac{3}{7}$.

Ejemplo 2. Hallar el límite

$R_4(x) \le \frac{x^4}{4!}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Reemplazamos $\cos x$ por $1 - x^2/2 + R_4(x)$, de modo que

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + R_4(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{R_4(x)}{x^2}.$$

Como $|R_4(x)| \le |x|^4$, se sigue que el límite cuando $x \to 0$ es igual a $-\frac{1}{2}$.

Ejemplo 3. Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4}.$$

Tenemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x).$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{3!} = R_5(x) \quad \text{y} \quad |R_5(x)| \le \frac{|x|^5}{5!}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4}\right| \le \frac{|R_5(x)|}{|x|^4} \le \frac{|x|}{5!}.$$

El límite deseado es entonces igual a 0.

Ejemplo 4. Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x \tan x}.$$

Para esto se aplica el hecho de que

$$\boxed{\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1,}$$

y se hace $u = x^2$. Además

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \frac{x}{\tan x} = 1.$$

Ejemplo 5. Queremos hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Por la fórmula de Taylor,

$$\log(1+x) = x + R_2(x),$$
$$\operatorname{sen} x = x + S_3(x).$$

(Escribimos S_3 en lugar de R_3 porque es un residuo diferente que para el log.) Para ellos tenemos los estimados

$$|R_2(x)| \le C|x|^2 \quad \text{y} \quad |S_3(x) \le C'|x|^3$$

para algunas constantes C, C' y x suficientemente cercanas a 0. Por lo tanto,

$$\frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{x + R_2(x)}{x + S_3(x)}.$$

Al dividir el numerador y el denominador entre x resulta

$$= \frac{1 + R_2(x)/x}{1 + S_3(x)/x}.$$

Cuando x tiende a 0, cada cociente $R_2(x)/x$ y $S_3(x)/x$ tiende a 0, por lo que el límite es 1, como se quería.

Ejemplo 6. Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x}.$$

De nuevo se escribe la fórmula de Taylor con pocos términos:

$$\operatorname{sen} x = x + R_3(x),$$
$$e^x = 1 + x + S_2(x).$$

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x} = \frac{x - 1 - x + 1 + R_3(x) - S_2(x)}{x} = \frac{R_3(x) - S_2(x)}{x}.$$

El lado derecho tiende a 0, de modo que el límite deseado es 0.

XIII, §8. EJERCICIOS

Hallar los límites siguientes cuando x tiende a 0.

1. $\dfrac{\cos x - 1 + x^2/2!}{x^3}$
2. $\dfrac{\cos x - 1 + x^2/2!}{x^4}$
3. $\dfrac{\operatorname{sen} x + e^x - 1}{x}$
4. $\dfrac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x}$
5. $\dfrac{e^x - 1}{x}$
6. $\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{(\operatorname{sen} x)^2}$
7. $\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$
8. $\dfrac{\arctan x}{x}$
9. $\dfrac{\log(1+x)}{x}$
10. $\dfrac{\log(1+2x)}{x}$
11. $\dfrac{e^x - (1+x)}{x^2}$
12. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$
13. $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$
14. $\dfrac{\log(1+x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)}$
15. $\dfrac{\tan(x^2)}{(\operatorname{sen} x)^2}$
16. $\dfrac{\log(1+x^2)}{(\operatorname{sen} x)^2}$
17. $\dfrac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x^2}$
18. $\dfrac{\cos x - e^x}{x}$
19. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$
20. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$
21. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$
22. $\dfrac{\tan x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$
23. $\dfrac{\log(1-x)}{\operatorname{sen} x}$
24. $\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$
25. $\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x \operatorname{sen} x}$
26. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$
27. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$
28. $\dfrac{e^x - 1 - x}{x}$
29. $\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
30. $\dfrac{\log(1+x^2)}{x^2}$
31. $\dfrac{(1+x)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}$
32. $\dfrac{(1+x)^{1/3} - 1 - \frac{1}{3}x}{x^2}$
33. Sea $f(x)$ una función que tenga $n+1$ derivadas continuas en un intervalo abierto que contiene al origen, y suponer que la $(n+1)$-ésima derivada está acotada por una constante M en este intervalo. Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado n para $f(x)$. ¿Cuáles son los límites siguientes?
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^2}$ (suponiendo que $n \geq 3$)
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n-1}}$ (suponiendo que $n \geq 2$)

Determinar los límites siguientes cuando x tiende a 0.

34. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}{x}$
35. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1 - x}{x^2}$
36. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4}$
37. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^5}$
38. $\dfrac{\cos x - 1 - x^2/2!}{x}$
39. $\dfrac{\cos x - 1 - x^2/2!}{x^2}$