CAPÍTULO XI

Técnicas de integración

El propósito de este capítulo es enseñar ciertos trucos básicos para hallar integrales indefinidas. Obviamente es más fácil consultar las tablas de integrales, pero es conveniente tener un entrenamiento mínimo en las técnicas usuales.

XI, §1. SUSTITUCIÓN

Formularemos el análogo de la regla de la cadena para integración.

Supongan que tenemos una función $u(x)$ y otra función f tal que está definida $f(u(x))$. (Se supone que todas estas funciones están definidas en intervalos adecuados.) Deseamos evaluar una integral que tenga la forma

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx,$$

donde u es una función de x. Primero trabajaremos con ejemplos a fin de aprender la mecánica para hallar la respuesta.

Ejemplo 1. Hallar $\int (x^2+1)^3(2x)\,dx$.

Hacer $u = x^2+1$. Entonces $du/dx = 2x$ y nuestra integral está en la forma

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx,$$

donde la función f es $f(u) = u^3$. Abreviamos $(du/dx)dx$ por du, **como si pudiéramos cancelar** dx. Entonces podemos escribir la integral como

$$\int f(u)\,du = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} = \frac{(x^2+1)^4}{4}.$$

Podemos verificarlo diferenciando la expresión de la derecha mediante la regla de la cadena. Obtenemos

$$\frac{d}{dx}\frac{(x^2+1)^4}{4} = \frac{4}{4}(x^2+1)^3 2x = (x^2+1)^3(2x),$$

según se deseaba.

Ejemplo 2. Hallar $\int \operatorname{sen}(2x)(2)\,dx$.

Hacer $u = 2x$. Entonces $du/dx = 2$. Por lo tanto, nuestra integral está en la forma

$$\int \operatorname{sen} u\frac{du}{dx}\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u = -\cos(2x).$$

Observen que

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,dx \neq -\cos(2x).$$

Si diferenciamos $-\cos(2x)$, obtenemos $\operatorname{sen}(2x)\cdot 2$.

La integral del ejemplo 2 también se puede escribir

$$\int 2\operatorname{sen}(2x)\,dx.$$

Está claro que no importa dónde coloquemos el 2.

Ejemplo 3. Hallar $\int \cos(3x)\,dx$

Sea $u = 3x$. Entonces $du/dx = 3$. No hay un 3 adicional en nuestra integral, pero podemos meter y sacar una constante de ella. Esta integral es igual a

$$\frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos u\,du = \frac{1}{3}\operatorname{sen} u = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x).$$

Es conveniente usar una notación meramente formal que nos permita hacer una sustitución $u = g(x)$ como en los ejemplos anteriores. Así, en lugar de escribir

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

en el ejemplo 1, podríamos escribir $du = 2x\,dx$. Del mismo modo, en el ejemplo 2 escribiríamos $du = 2\,dx$, y en el ejemplo 3 escribiríamos $du = 3\,dx$. No atribuimos significado alguno a esto; es simplemente un recurso semejante al que se usa al programar una máquina computadora. La máquina no piensa: uno simplemente ajusta ciertos circuitos eléctricos de manera que ejecute una operación determinada y proporcione la respuesta correcta. El hecho de que escribir

$$du = \frac{du}{dx}\,dx$$

nos proporciona la respuesta correcta se probará en un momento.

Ejemplo 4. Hallar

$$\int (x^3+x)^9(3x^2+1)\,dx.$$

Sea

$$u = x^3 + x.$$

Entonces

$$du = (3x^2+1)\,dx.$$

Por lo tanto, nuestra integral es del tipo $\int f(u)\,du$ y es igual a

$$\int u^9\,du = \frac{u^{10}}{10} = \frac{(x^3+x)^{10}}{10}.$$

Mostraremos ahora cómo el procedimiento anterior, que puede verificarse en cada caso mediante diferenciación, da en realidad la respuesta correcta en todos los casos.

Suponemos entonces que queremos evaluar una integral de la forma

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx,$$

donde u es una función de x. Sea F una función tal que

$$F'(u) = f(u).$$

Así pues, F es una integral indefinida

$$\boxed{F(u) = \int f(u)\,du.}$$

Si usamos la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{dF(u(x))}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}.$$

Así hemos probado que

$$\boxed{\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = F(u(x))}$$

según se deseaba.

Debemos observar además que la fórmula para integración por sustitución se aplica a la integral definida. Podemos enunciar esto formalmente como sigue.

Sea g una función diferenciable en el intervalo $[a,b]$ cuya derivada es continua. Sea f una función continua en un intervalo que contiene a los valores de g. Entonces

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\frac{dg}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.}$$

La demostración es inmediata. Si F es una integral indefinida para f, entonces $F(g(x))$ es una integral indefinida para

$$f(g(x))\frac{dg}{dx}$$

debido a la regla de la cadena. Por lo tanto, el lado izquierdo de nuestra fórmula es igual a

$$F(g(b)) - F(g(a)),$$

que es también el valor del lado derecho.

Ejemplo 5. Suponer que se considera la integral

$$\int_0^1 (x^3+x)^9(3x^2+1)\,dx$$

con $u = x^3 + x$. Cuando $x = 0$, $u = 0$, y cuando $x = 1$, $u = 2$. Así, nuestra integral definida es igual a

$$\int_0^2 u^9\,du = \frac{u^{10}}{10}\bigg|_0^2 = \frac{2^{10}}{10}.$$

Ejemplo 6. Evaluar

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx.$$

Hacemos $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Cuando $x = 0$, $u = 0$. Cuando $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. Entonces nuestra integral es igual a

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\,du = \tfrac{1}{2}(-\cos u)\bigg|_0^{\pi} = \tfrac{1}{2}(-\cos\pi + \cos 0) = 1.$$

Ejemplo 7. Evaluar

$$I = \int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Hacemos $u = 1 - x^2$ de modo que $du = -2x\,dx$. Entonces $x^2 = 1 - u$, $x^4 = (1-u)^2$, y

$$\begin{aligned} I = -\tfrac{1}{2}\int (1-u)^2u^{1/2}\,du &= -\tfrac{1}{2}\int (1-2u+u^2)u^{1/2}\,du \\ &= -\tfrac{1}{2}\int (u^{1/2} - 2u^{3/2} + u^{5/2})\,du \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2} - 2\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{7/2}}{7/2}\right). \end{aligned}$$

Al sustituir $u = 1 - x^2$ se obtiene la respuesta en términos de x.

XI, §1. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes

1. $\int xe^{x^2}\,dx$
2. $\int x^3 e^{-x^4}\,dx$
3. $\int x^2(1+x^3)\,dx$
4. $\int \frac{\log x}{x}\,dx$
5. $\int \frac{1}{x(\log x)^n}\,dx \quad (n = \text{entero})$
6. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$
7. $\int \frac{x}{x+1}\,dx$
8. $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$
9. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$
10. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$
11. $\int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx$
12. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$
13. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$
14. $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$
15. $\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}(2x^2)\,dx$
16. (a) $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$ (b) $\int \cos 2x\,dx$
(c) $\int \operatorname{sen} 3x\,dx$ (d) $\int \cos 3x\,dx$
(e) $\int e^{4x}\,dx$ (f) $\int e^{5x}\,dx$ (g) $\int e^{-5x}\,dx$

En los problemas siguientes, usar los límites de la teoría de la función exponencial estudiados en el capítulo V, sección §5, a saber,

$$\boxed{\lim_{B\to\infty} \frac{B}{e^B} = 0.}$$

17. Hallar el área bajo la curva $y = xe^{-x^2}$ entre 0 y un número $B > 0$. ¿Tiende esta área a un límite conforme B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál es este límite?
18. Hallar el área bajo la curva $y = x^2e^{-x^3}$ entre 0 y un número $B > 0$. ¿Esta área tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál es este límite?

XI, §1. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las integrales siguientes.

1. $\int \frac{x^3}{x^4+2}\,dx$
2. $\int \sqrt{3x+1}\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}^4 x\cos x\,dx$
4. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$
5. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$
6. $\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$
7. $\int \frac{x}{(3x^2+5)^2}\,dx$
8. $\int (x^2+3)^4x^3\,dx$
9. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$
10. $\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$
11. $\int (x^3+1)^{7/5}x^5\,dx$
12. $\int \frac{x}{(x^2-4)^{3/2}}\,dx$
13. $\int \operatorname{sen} 3x\,dx$
14. $\int \cos 4x\,dx$
15. $\int e^x \operatorname{sen} e^x\,dx$
16. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$
17. $\int \frac{1}{x\log x}\,dx$
18. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$
19. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$
20. $\int \frac{(\log x)^4}{x}\,dx$
21. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$
22. $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$
23. $\int_0^1 \sqrt{2-x}\,dx$
24. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$
25. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$
26. $\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$
27. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
28. $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$
29. $\int_0^1 \frac{1+e^{2x}}{e^x}\,dx$
30. $\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen} x^2\,dx$

XI, §2. INTEGRACIÓN POR PARTES

Si f y g son dos funciones diferenciables de x, entonces

$$\frac{d(fg)}{dx} = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx}.$$

Por lo tanto,

$$f(x)\frac{dg}{dx} = \frac{d(fg)}{dx} - g(x)\frac{df}{dx}$$

Usando la fórmula para la integral de una suma, que es la suma de las integrales, y el hecho de que

$$\int \frac{d(fg)}{dx}\,dx = f(x)g(x),$$

obtenemos

$$\int f(x)\,\frac{dg}{dx}\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)\,\frac{df}{dx}\,dx,$$

que se llama fórmula para la **integración por partes**.

Si hacemos $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces la fórmula se puede abreviar en nuestra notación, como sigue:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Ejemplo 1. Hallar la integral $\int \log x\,dx$.

Sea $u = \log x$ y $dv = dx$. Entonces $du = (1/x)dx$ y $v = x$. Por lo tanto, nuestra integral está en la forma $\int u\,dv$ y es igual a

$$uv - \int v\,du = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x.$$

Ejemplo 2. Hallar la integral $\int xe^x\,dx$.

Sea $u = x$ y $dv = e^x\,dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^x$, de modo que

$$\int xe^x\,dx = \int u\,dv = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x.$$

Observen cómo du/dx es una función más sencilla que u misma, mientras que v y dv/dx son la misma, en este caso. Un procedimiento similar funciona para integrales de la forma $\int x^n e^x\,dx$ cuando n es un entero positivo, haciendo $u = x^n$, $du = nx^{n-1}\,dx$. Ver los ejercicios 7 y 8.

Los dos ejemplos anteriores ilustran un hecho general: Funcionará pasar de la función u a du/dx en el proceso de integración por partes, siempre que al ir de dv a v no se haga más complicado este lado del procedimiento. En el primer ejemplo, con $u = \log x$, después $du/dx = 1/x$ es una función más sencilla (una potencia de x), mientras que al ir de $dv = dx$ a $v = x$ sólo se aportan potencias de x al procedimiento.

A continuación damos un ejemplo donde se tiene que integrar por partes dos veces antes de obtener una respuesta.

Ejemplo 3. Hallar $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

Sea $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces

$$du = e^x\,dx \qquad \text{y} \qquad v = -\cos x.$$

Si llamamos a nuestra integral I, entonces

$$I = -e^x\cos x - \int -e^x\cos x\,dx$$

$$= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx.$$

Esto es como si estuviéramos dando vueltas en círculos, pero no hay que desanimarse. En lugar de ello, conviene repetir el procedimiento en $e^x\cos x$. Sea

$$t = e^x \qquad \text{y} \qquad dz = \cos x\,dx.$$

Entonces,

$$dt = e^x\,dx \qquad \text{y} \qquad z = \operatorname{sen} x.$$

La segunda integral se convierte en

$$\int t\,dz = tz - \int z\,dt = e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\operatorname{sen} x\,dx.$$

Hemos regresado a la integral original

$$\int e^x\operatorname{sen} x\,dx$$

¡pero con signo menos! Así,

$$I = -e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x - I.$$

Por lo tanto,

$$2I = e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x,$$

y dividiendo entre 2, nos da el valor

$$I = \frac{e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x}{2}.$$

Damos un ejemplo donde primero se hace una sustitución *antes* de integrar por partes.

Ejemplo 4. Hallar la integral $\int e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

Hacemos $x = u^2$, de modo que $dx = 2u\,du$. Entonces

$$\int e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int e^{-u}2u\,du = 2\int ue^{-u}\,du.$$

Ahora esto se puede integrar por partes con $u = u$ y $dv = e^{-u}\,du$. Entonces $v = -e^{-u}$, y dejamos que el lector haga el resto.

Observación. Se puede mostrar, aunque no es fácil, que ningún procedimiento permitirá expresar la integral

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

en términos de funciones comunes: potencias de x, funciones trigonométricas, función exponencial o log, sumas, productos o composiciones de éstas.

XI, §2. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes.

1. $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$
2. $\int \arctan x\, dx$
3. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$
4. $\int e^{-4x} \cos 2x\, dx$
5. $\int (\log x)^2\, dx$
6. $\int (\log x)^3\, dx$
7. $\int x^2 e^x\, dx$
8. $\int x^2 e^{-x}\, dx$
9. $\int x \operatorname{sen} x\, dx$
10. $\int x \cos x\, dx$
11. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$
12. $\int x^2 \cos x\, dx$
13. $\int x^3 \cos x^2\, dx$
14. $\int x^5 \sqrt{1-x^2}\, dx$

[*Idea:* En el ejercicio 13, hacer primero la sustitución $u = x^2$, $du = 2x\, dx$. En el ejercicio 14, sea $u = 1 - x^2$, $x^2 = 1 - u$.]

15. $\int x^2 \log x\, dx$
16. $\int x^3 \log x\, dx$
17. $\int x^2 (\log x)^2\, dx$
18. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$
19. $\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2}\, dx$
20. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\, dx$

En las siguientes integrales impropias usaremos límites de la teoría de exponenciales y logaritmos, estudiada en el capítulo VIII, sección §5. Estos límites son como sigue. Si n es un entero positivo, entonces

$$\boxed{\lim_{B\to\infty} \frac{B^n}{e^B} = 0.}$$

Además,

$$\boxed{\lim_{a\to 0} a \log a = 0.}$$

El primer límite asegura que la función exponencial se vuelve grande con más rapidez que cualquier polinomio. El segundo límite se puede deducir del primero; basta escribir $a = e^{-B}$. Entonces $a \to 0$ si, y sólo si, $B \to \infty$. Pero $\log a = -B$. De modo que

$$a \log a = \frac{-B}{e^B},$$

de donde vemos, al tomar $n = 1$, que el primer límite implica el segundo.

21. Sea B un número > 0. Hallar el área bajo la curva $y = xe^{-x}$ entre 0 y B. ¿Esta área tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál es ese límite?
22. ¿Existe la integral impropia $\int_1^\infty x^2 e^{-x}\, dx$? De ser así, ¿cuál es su valor?
23. ¿Existe la integral impropia $\int_1^\infty x^3 e^{-x}\, dx$? De ser así, ¿cuál es su valor?
24. Sea B un número > 2. Hallar el área bajo la curva
$$y = \frac{1}{x(\log x)^2}$$
entre 2 y B. ¿Esta área tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál límite?
25. ¿Existe la integral impropia
$$\int_3^\infty \frac{1}{x(\log x)^4}\, dx?$$
De ser así, ¿cuál es su valor?
26. ¿Existe la integral impropia
$$\int_0^2 \log x\, dx?$$
De ser así, ¿cuál es su valor?

XI, §2. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las integrales siguientes, usando sustituciones e integración por partes, según sea necesario.

1. $\int x \arctan x\, dx$
2. (a) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ [*Idea:* Usar $u = \sqrt{1-x^2}$ y $dv = dx$.]
   (b) $\int x \operatorname{arcsen} x\, dx$
3. $\int x \arccos x\, dx$
4. $\int x^3 e^{2x}\, dx$
5. $\int_{-1}^{0} \operatorname{arcsen} x\, dx$
6. $\int_1^2 x^3 \log x\, dx$
7. $\int_0^{1/2} x \operatorname{arcsen} 2x\, dx$
8. $\int_1^2 \sqrt{x} \log x\, dx$
9. $\int_{-1}^{1} xe^x\, dx$
10. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2}\, dx$
11. $\int xe^{-\sqrt{x}}\, dx$
12. $\int \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}}\, dx$

Probar las fórmulas, donde m y n son enteros positivos.

13. $\int (\log x)^n \, dx = x(\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} \, dx$

14. $\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$

15. $\int x^m (\log x)^n \, dx = \dfrac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \dfrac{n}{m+1} \int x^m (\log x)^{n-1} \, dx$

*16. Sea $n! = n(n-1)\cdots 1$ el producto de los primeros n enteros. Mostrar que

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n!.$$

[*Idea:* Hallar primero la integral indefinida $\int x^n e^{-x} \, dx$ en términos de $\int x^{n-1} e^{-x} \, dx$ como en el ejercicio 14. Después evaluar entre 0 y B y dejar que B se haga grande. Si I_n denota la integral deseada, deberá hallarse $I_n = nI_{n-1}$. Se puede continuar así, por pasos, hasta verse reducido a evaluar $I_0 = \int_0^\infty e^{-x} \, dx$.]

XI, §3. INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Investigaremos integrales que incluyen al seno y al coseno. Será útil tener las fórmulas siguientes:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},}$$

las cuales se prueban fácilmente usando

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Ejemplo. Usamos la primera fórmula del recuadro para obtener:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x.$$

Los dos ejemplos siguientes tratan con potencias *impares* de seno y coseno. Se puede usar un método en este caso, pero no se puede usar cuando haya sólo potencias *pares*.

Ejemplo. Queremos hallar

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx.$$

Reemplazamos $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, de modo que

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int (\operatorname{sen} x)(1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \int \operatorname{sen} x \, dx - \int (\cos^2 x)(\operatorname{sen} x) \, dx.$$

La segunda de estas integrales se puede evaluar por la sustitución

$$u = \cos x, \qquad du = -\operatorname{sen} x \, dx.$$

Hallamos entonces que

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}.$$

Para potencias bajas del seno y del coseno, los anteriores son los medios más fáciles. Especialmente si tenemos que integrar una potencia *impar* del seno o del coseno, podemos usar un método parecido.

Ejemplo. Hallar $I = \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

Reemplazamos

$$\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2,$$

de modo que

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Ahora hacemos

$$u = \cos x \qquad \text{y} \qquad du = -\operatorname{sen} x \, dx.$$

Entonces

$$I = -\int (1 - u^2)^2 u^2 \, du = -\int (1 - 2u^2 + u^4) u^2 \, du$$

$$= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right).$$

Si se quiere la respuesta en términos de x, se sustituye de regreso $u = \cos x$ en esta última expresión.

En los dos ejemplos anteriores tuvimos una potencia *impar* del seno. Entonces, al usar la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y la sustitución

$$u = \cos x, \qquad du = -\operatorname{sen} x \, dx,$$

transformamos la integral en una suma de integrales de la forma

$$\int u^n \, du,$$

donde n es un entero positivo.

Este método trabaja sólo cuando hay una potencia impar del seno o del coseno. En general, se tiene que usar otro método para integrar potencias arbitrarias.

Hay una manera general en la cual se puede integrar $\operatorname{sen}^n x$ para cualquier entero positivo n: integración por partes. Tomemos primero un ejemplo.

Ejemplo. Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

Escribimos la integral en la forma

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Sean $u = \operatorname{sen}^2 x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces

$$du = 2 \operatorname{sen} x \cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad v = -\cos x.$$

Así

$$I = -(\operatorname{sen}^2 x)(\cos x) - \int -\cos x(2 \operatorname{sen} x \cos x)\,dx$$

$$= -\operatorname{sen}^2 x \cos x + 2 \int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Esta última integral podría entonces determinarse por sustitución, por ejemplo

$$t = \cos x \qquad \text{y} \qquad dt = -\operatorname{sen} x\,dx.$$

La última integral se vuelve $-2 \int t^2\,dt$, y, por lo tanto,

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\operatorname{sen}^2 x \cos x - \tfrac{2}{3} \cos^3 x.$$

Para tratar con un entero positivo arbitrario n, mostraremos cómo reducir la integral $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ a la integral $\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$. Procediendo por pasos hacia abajo se obtendrá un método que dará la respuesta completa.

Teorema 3.1. *Para cualquier entero $n \geq 2$ tenemos*

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.}$$

Demostración. Escribimos la integral como

$$I_n = \int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Sea $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces

$$du = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad v = -\cos x.$$

Así

$$I_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x - \int -(n-1) \cos x \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\,dx$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Reemplazamos $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ y obtenemos

$$I_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1) \int \operatorname{sen}^n x\,dx.$$

Entonces

$$I_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

de donde

$$nI_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}.$$

Al dividir entre n obtenemos nuestra fórmula.

Dejamos como ejercicio la demostración de la fórmula análoga para el coseno.

$$\boxed{\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\,dx.}$$

Las integrales que tienen tangentes se pueden hacer mediante una técnica similar, puesto que

$$\frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x.$$

Dado que estas funciones se usan menos que el seno y el coseno, no escribiremos las fórmulas para aligerar esta página impresa que, de otra forma, se volvería deprimente.

Potencias mixtas del seno y del coseno

Es posible integrar potencias mixtas del seno y del coseno al reemplazar $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, por ejemplo.

Ejemplo. Hallar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$.

Al reemplazar $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$, vemos que nuestra integral es igual a

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx - \int \operatorname{sen}^4 x\,dx,$$

que sabemos cómo integrar. En este caso pudimos también hacer un truco, realizando las sustituciones del principio de la sección. Así,

$$(\operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x) = \frac{1 - \cos^2 2x}{4},$$

lo cual reduce las potencia dentro de la integral. Otra aplicación de este mismo tipo, a saber,

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

reduce nuestro problema más aún. Así que ¡a trabajar! Obtengan la integral, como ejercicio.

Advertencia. Debido a identidades trigonométricas como

$$\operatorname{sen}^2 x = -\tfrac{1}{2} \cos 2x + \tfrac{1}{2},$$

son posibles diferentes formas de respuestas, las cuales diferirán en una constante de integración.

Cuando encontremos una integral que incluya una raíz cuadrada, con frecuencia podremos deshacernos de la raíz cuadrada efectuando una sustitución trigonométrica.

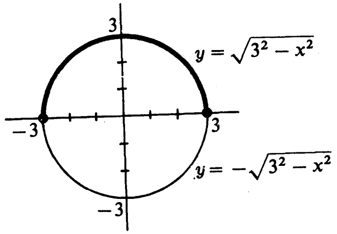
Ejemplo. Hallar el área de un círculo de radio 3.

La ecuación del círculo es

$$x^2 + y^2 = 9,$$

y la porción del círculo en el primer cuadrante se describe mediante la función

$$y = \sqrt{3^2 - x^2}.$$



Entonces, un cuarto del área está dado por la integral

$$\int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2}\, dx.$$

Para dichas integrales, queremos deshacernos de ese espantoso signo de raíz cuadrada, de modo que tratamos de convertir la expresión bajo la raíz cuadrada en un cuadrado perfecto. Usamos la sustitución

$$x = 3 \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad dx = 3 \cos t\, dt, \quad \text{con} \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

Cuando $t = 0$, entonces $x = 0$, y cuando $t = \pi/2$, entonces $x = 3$. Por lo tanto, nuestra integral se vuelve

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sqrt{3^2 - 3^2 \operatorname{sen}^2 t}\, 3 \cos t\, dt &= \int_0^{\pi/2} 9 \cos t \cos t\, dt \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \\ &= \frac{9\pi}{4}.\end{aligned}$$

Nótese que, en el intervalo mencionado, $0 \le t \le \pi/2$, el coseno $\cos t$ es positivo, y así

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

Si escogemos un intervalo donde el coseno es negativo, entonces, al tomar la raíz cuadrada, necesitaríamos usar un signo menos adicional. Esto es, si $\cos t < 0$, entonces

$$\sqrt{\cos^2 t} = -\cos t.$$

Como la integral anterior representaba $1/4$ del área del círculo, se sigue que el área total del círculo es 9π.

En general, una integral que incluya expresiones como

$$\sqrt{1 - x^2}$$

se puede a veces evaluar usando la sustitución

$$x = \operatorname{sen} \theta, \qquad dx = \cos \theta\, d\theta,$$

pues entonces la expresión bajo la raíz cuadrada se convierte en un cuadrado perfecto, a saber, $1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta$.

Al hacer esta sustitución, usualmente establecemos que

$$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2 \qquad \text{y} \qquad -1 \le x \le 1.$$

Éste es el margen donde

$$x = \operatorname{sen} \theta \quad \text{tiene la función inversa} \quad \theta = \operatorname{arcsen} x.$$

Potencias negativas de seno y coseno

En general es molesto integrar potencias negativas del seno y del coseno, aunque es posible hacerlo. Sépase de una vez que existe la fórmula siguiente:

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos \theta}\, d\theta = \int \sec \theta\, d\theta = \log(\sec \theta + \tan \theta).}$$

Esto se hace por sustitución. Tenemos

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta = \frac{(\sec \theta)(\sec \theta + \tan \theta)}{\sec \theta + \tan \theta}.$$

Sea $u = \sec \theta + \tan \theta$. Entonces la integral está en la forma

$$\int \frac{1}{u}\, du.$$

(Ésta es una buena oportunidad de insistir en que la fórmula recién obtenida es válida en cualquier intervalo en que $\cos \theta \neq 0$ y

$$\sec \theta + \tan \theta > 0.$$

De otra manera, los símbolos no tienen sentido. Determinar dicho intervalo queda como ejercicio.) La expresión de la fórmula anterior es tan complicada que **no deberán memorizarla**. Conviene consultarla cuando sea necesario. Hay una fórmula parecida para la integral de $1/\operatorname{sen} \theta$, que se obtiene usando el prefijo co- en el lado derecho. La fórmula es:

$$\boxed{I = \int \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}\, d\theta = \int \csc \theta\, d\theta = -\log(\csc \theta + \cot \theta),}$$

que es similar a la respuesta dada antes para $\int (1/\cos \theta)\, d\theta$. Claro que la respuesta es en un intervalo donde la expresión dentro del logaritmo es positiva. De lo contrario se tiene que tomar el valor absoluto de esta expresión. La demostración es parecida, y también se puede verificar diferenciando el lado derecho para obtener $1/\operatorname{sen} \theta$.

Advertencia En el lado izquierdo tenemos seno en lugar de coseno, de manera que se elimina el prefijo co-. En el lado derecho tenemos la cosecante y la cotangente, de modo que se agrega el prefijo co-. *Se debe recordar que existe esta simetría*, pero siempre se debe verificar cuál es la relación correcta antes de usarla, ya que, al usar esta simetría, *aparecen ciertos signos menos*, así como el signo menos que aparece ahora en el lado derecho. No se intente memorizar en qué caso aparecen dicho signos menos; es mejor verificar cada vez que se necesite una fórmula similar, o verla en tablas de integrales.

Ejemplo. Evaluemos la integral

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Sean $x = \operatorname{sen}\theta$, $dx = \cos\theta\,d\theta$. Entonces

$$I = \int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\sqrt{\cos^2\theta}}\cos\theta\,d\theta.$$

Sobre un intervalo donde sea positivo $\cos\theta$, tenemos

$$\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta,$$

y, por lo tanto,

$$I = \int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta.$$

Esta integral se evaluó en el recuadro anterior.

XI, §3. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes.

1. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$ 2. $\int \cos^3 x\,dx$ 3. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$

Hallar el área de la región encerrada por las curvas siguientes.

4. $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ 5. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

7. Hallar el área de un círculo de radio $r > 0$.

8. Hallar las integrales

(a) $\int \sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ (b) $\int \sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$

[*Idea:* Escribir $\theta = 2u$. Esto deberá ayudar para hacer que la expresión bajo la raíz cuadrada sea un cuadrado perfecto.]

9. Para cualesquiera enteros m y n, probar las fórmulas:

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

[*Idea:* Expander el lado derecho y cancelar lo más posible. Usar las fórmulas de suma del capítulo IV, sección §3.]

10. Usar el ejercicio anterior para hacer éste.

(a) Mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x \cos 2x\,dx = 0.$$

(b) Mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x \cos 2x\,dx = 0.$$

11. Mostrar en general que, para cualesquiera enteros positivos m y n, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = 0.$$

12. Mostrar en general que, para enteros positivos m y n,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \pi, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

[*Idea:* Si $m \neq n$, usar el ejercicio 9. Si $m = n$, usar $\operatorname{sen}^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$.]

13. Hallar $\int \tan x\,dx$.

Hallar las integrales siguientes.

14. $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ 15. $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{2-4x^2}}\,dx$ 17. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,dx$

18. Sea f una función continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Definimos los números c_0, a_n y b_n para enteros positivos n mediante las fórmulas

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx.$$

Estos números, c_0, a_n y b_n, se llaman **coeficientes de Fourier** de f.

Ejemplo. Sea $f(x) = x$. Entonces el 0-ésimo coeficiente de Fourier de f es la integral:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Estos coeficientes a_n y b_n están dados por las integrales

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} nx\,dx.$$

Deberán evaluarse estas integrales usando integración por partes. Calcular los coeficientes de Fourier de las funciones siguientes. (Si se hace primero el 19, es posible que se tenga menos trabajo.)

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = |x|$
(d) $f(x) = \cos x$ (e) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (f) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$
(g) $f(x) = \cos^2 x$ (h) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ (i) $f(x) = |\cos x|$
(j) $f(x) = 1$

19. (a) Sea f una función par [esto es $f(x) = f(-x)$]. Mostrar que sus coeficientes de Fourier b_n son iguales a 0.
(b) Sea f una función impar [esto es $f(x) = -f(-x)$]. ¿Qué se puede decir acerca de sus coeficientes de Fourier?

XI, §3. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}\,dx$
2. $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$
3. $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} e^x\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^6 x\,dx$
7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 2x\,dx$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x\,dx$
10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^4 x\,dx$
11. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

En los ejercicios siguientes, sea a un número positivo.

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx$
24. $\displaystyle\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

XI, §4. FRACCIONES PARCIALES

Queremos estudiar las integrales de cocientes de polinomios.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios. Queremos investigar la integral

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx.$$

Usando la división, se puede reducir el problema al caso en que el grado de f es menor que el grado de g. El ejemplo siguiente ilustra esta reducción.

Ejemplo. Considerar los dos polinomios $f(x) = x^3 - x + 1$ y

$$g(x) = x^2 + 1.$$

Al dividir f entre g (deben saber esto desde la secundaria) obtenemos un cociente de x con residuo $-2x+1$. Así,

$$x^3 - x + 1 = (x^2+1)x + (-2x+1).$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x + \frac{-2x+1}{x^2+1}.$$

Para hallar la integral de $f(x)/g(x)$ integramos x y el cociente de la derecha, que tiene la propiedad de que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

De ahora en adelante, *supondremos que, cuando se considere un cociente $f(x)/g(x)$, el grado de f será menor que el grado de g.* Lo suponemos porque el método que se describirá trabaja sólo en este caso. Factorizando una constante, de ser necesario, supondremos además que $g(x)$ se puede escribir

$$g(x) = x^d + \text{términos de orden menor.}$$

Comenzaremos estudiando casos especiales, y después describiremos cómo se puede reducir a éstos el caso general.

Primera parte. Factores lineales en el denominador

Caso 1. Si a es un número y n es un entero ≥ 1, entonces

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx &= \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} && \text{si} \quad n \neq 1,\\ &= \log(x-a) && \text{si} \quad n = 1.\end{aligned}}$$

Esto es bien conocido; y sabemos cómo hacerlo. De hecho, tenemos

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \int (x-a)^{-n}\,dx = \int u^{-n}\,du.$$

Suponer que $n \neq 1$. Entonces, por la sustitución $u = x - a$, $du = dx$, obtenemos

$$\int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$$

porque

$$u^{-n+1} = u^{-(n-1)} = \frac{1}{u^{n-1}}.$$

Suponer que $n = 1$. Entonces la integral tiene la forma

$$\int \frac{1}{u}\,du = \log u,$$

y, por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log(x-a).$$

Caso 2. A continuación consideramos integrales de expresiones como

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx \quad \text{o} \quad \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx,$$

donde el denominador está formado por un producto de términos de la forma

$$(x-a_1)\cdots(x-a_n)$$

para algunos números $a_1, \ldots, a_n$ que no necesariamente son distintos. El procedimiento equivale a escribir la expresión bajo la integral como una suma de términos, como en el caso 1.

Ejemplo. Deseamos hallar la integral

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx.$$

Para hacer esto, queremos escribir

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x-3}$$

con algunos números c_1 y c_2 que debemos despejar. Se coloca la expresión de la derecha sobre un común denominador y se tiene

$$\frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x-3} = \frac{c_1(x-3) + c_2(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Así, $(x-2)(x-3)$ es el común denominador, y

$$\text{numerador} = c_1(x-3) + c_2(x-2) = (c_1 + c_2)x - 3c_1 - 2c_2.$$

Queremos que la fracción sea igual a $1/(x-2)(x-3)$, por lo que el numerador debe ser igual a 1; esto es, debemos tener

$$(c_1 + c_2)x - 3c_1 - 2c_2 = 1.$$

Entonces basta resolver las ecuaciones simultáneas

$$c_1 + c_2 = 0,$$
$$-3c_1 - 2c_2 = 1.$$

Despejando c_1 y c_2 se tiene $c_2 = 1$ y $c_1 = -1$. Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \frac{-1}{(x-2)}\,dx + \int \frac{1}{(x-3)}\,dx$$
$$= -\log(x-2) + \log(x-3).$$

Ejemplo. Hallar la integral

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx.$$

Queremos hallar números c_1, c_2, c_3 tales que

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{x-2}.$$

Nótese que $(x-1)^2$ aparece en el denominador del cociente original. Para tomar esto en cuenta es necesario incluir dos términos con $(x-1)$ y $(x-1)^2$ en sus denominadores, que aparecieron como

$$\frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2}.$$

Por otro lado, $(x-2)$ aparece sólo a la primera potencia en el cociente original, de modo que da lugar únicamente a un término

$$\frac{c_3}{x-2}$$

en la descomposición en fracciones parciales. (La regla general se enuncia al final de esta sección.)

Describimos ahora cómo hallar las constantes c_1, c_2, c_3, que satisfacen la relación

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{x-2}$$
$$= \frac{c_1(x-1)(x-2) + c_2(x-2) + c_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}.$$

Aquí pusimos la fracción de la derecha sobre el común denominador

$$(x-1)^2(x-2).$$

Tenemos

$$x + 1 = \text{numerador} = c_1(x-1)(x-2) + c_2(x-2) + c_3(x-1)^2$$
$$= (c_1 + c_3)x^2 + (-3c_1 + c_2 - 2c_3)x + 2c_1 - 2c_2 + c_3.$$

Así que, para hallar las constantes c_1, c_2, c_3, que satisfacen la relación deseada, tenemos que resolver las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} c_1 \qquad + c_3 &= 0, \\ -3c_1 + c_2 - 2c_3 &= 1, \\ 2c_1 - 2c_2 + c_3 &= 1. \end{aligned}$$

Éste es un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas, que se puede resolver para determinar c_1, c_2 y c_3. Se halla que $c_1 = -3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx &= \int \frac{-3}{x-1}\,dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{3}{(x-2)}\,dx \\ &= -3\log(x-1) + \frac{2}{x-1} + 3\log(x-2). \end{aligned}$$

Éste es un teorema algebraico con el cual, si se sigue el procedimiento anterior para escribir una fracción en términos de fracciones más sencillas de acuerdo con el método ilustrado en los ejemplos, siempre se podrán despejar los coeficientes $c_1, c_2, c_3, \ldots$. No se puede dar la *demostración* en el nivel de este curso, pero en la práctica, a menos que ustedes o yo cometamos algún error, tan sólo despejamos numéricamente en cada caso. Si tenemos potencias de orden superior de algún factor en el denominador, entonces tenemos que usar también potencias de orden superior en las fracciones más simples del lado derecho.

Ejemplo. Podemos descomponer

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{(x-1)^3} + \frac{c_4}{x-2}.$$

Al poner el lado derecho sobre un denominador común, e igualando el numerador con $x+1$, podemos despejar los coeficientes

$$c_1, c_2, c_3, c_4.$$

Segunda parte. Factores cuadráticos en el denominador

Caso 3. Queremos hallar la integral

$$\boxed{I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx}$$

cuando n es un entero positivo. Si $n = 1$, no hay nada nuevo: la integral es $\arctan x$. Si $n > 1$, usaremos integración por partes. Habrá un pequeño giro en el procedimiento usual, porque si integramos por partes I_n de la manera natural, hallamos que el exponente n crece en una unidad. Hagamos el caso $n = 1$ como ejemplo, de modo que comenzamos con

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

Sea

$$u = \frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}, \qquad dv = dx,$$

$$du = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,dx, \qquad v = x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ (*) \qquad &= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx. \end{aligned}$$

En la última integral de la derecha escribimos $x^2 = x^2 + 1 - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \arctan x - I_2. \end{aligned}$$

Si ahora sustituimos esto en la expresión $(*)$, obtenemos

$$I_1 = \frac{x}{x^2+1} + 2\arctan x - 2I_2.$$

Entonces podemos despejar I_2 en términos de I_1, y hallamos que

$$\begin{aligned} 2I_2 &= \frac{x}{x^2+1} + 2\arctan x - I_1 \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2\arctan x - \arctan x \\ &= \frac{x}{x^2+1} + \arctan x. \end{aligned}$$

Al dividir entre 2 se obtiene el valor de I_2:

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x.}$$

El mismo método funciona en general. Queremos reducir I_n para hallar I_{n-1}, donde

$$I_{n-1} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx.$$

Sea

$$u = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \quad \text{y} \quad dv = dx.$$

Entonces,

$$du = -(n-1)\frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx \quad \text{y} \quad v = x.$$

Así,

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Escribimos $x^2 = x^2 + 1 - 1$. Obtenemos

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx - 2(n-1)\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

o, en otras palabras,

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)I_n.$$

Por lo tanto,

$$2(n-1)I_n = \frac{n}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1},$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx &= \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\\ &\quad + \frac{(2n-3)}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx,\end{aligned}}$$

o, usando la abreviación I_n, hallamos:

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.}$$

Esto nos da una fórmula de recursión que baja el exponente n del denominador hasta que llega a $n = 1$. En ese caso sabemos que

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x.}$$

Si se quiere hallar I_3, se usa la fórmula para reducirla a I_2, después se usa la fórmula de nuevo para reducirla a I_1, que es $\arctan x$. Esto da una fórmula completa para I_3. Una fórmula completa para I_n lleva n pasos. Está claro que no se deberá memorizar la fórmula anterior; sólo se deberá recordar el método mediante el cual se obtiene y aplicarlo a un caso particular, digamos para hallar I_3 o I_4.

Eliminación de constantes adicionales mediante sustitución

A veces hallamos una integral que es una ligera variación de una recién considerada, con una constante extra. Por ejemplo, si b es un número, hallar

$$\int \frac{1}{(x^2+b^2)^n}\,dx.$$

Usando la sustitución $x = bz$, $dx = b\,dz$, se reduce la integral a

$$\int \frac{1}{(b^2z^2+b^2)^n}b\,dz = \int \frac{b}{b^{2n}(z^2+1)^n}\,dz$$
$$= \frac{1}{b^{2n-1}}\int \frac{1}{(z^2+1)^n}\,dz.$$

Tenemos

$$\int \frac{1}{(z^2+1)^n}\,dz = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

porque las dos integrales difieren sólo en un cambio de letras. Esto muestra cómo usar una sustitución para reducir el cálculo de la integral con b al de la integral cuando $b = 1$, tratado antes.

Caso 4. Hallar la integral

$$\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx.$$

Esto es pan comido. Hagamos la sustitución

$$u = x^2 + b^2 \quad \text{y} \quad du = 2x\,dx$$

Entonces

$$\boxed{\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}\,du,}$$

que sabemos cómo evaluar, y así hallamos

$$\boxed{\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(x^2+b^2) & \text{si } n = 1,\\ \dfrac{1}{2(-n+1)}\dfrac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1.\end{cases}}$$

Ejemplo. Hallar

$$\int \frac{5x-3}{(x^2+5)^2}\,dx.$$

Escribimos

$$\int \frac{5x-3}{(x^2+5)^2}\,dx = 5\int \frac{x}{(x^2+5)^2}\,dx - 3\int \frac{1}{(x^2+5)^2}\,dx.$$

Entonces:

$$5\int \frac{x}{(x^2+5)^2}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+5)^2}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{5u^{-1}}{2-1} = -\frac{5}{2}\frac{1}{x^2+5}.$$

Para la segunda integral de la derecha podemos poner

$$x = \sqrt{5}t \quad \text{y} \quad dx = \sqrt{5}\,dt.$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{(x^2+5)^2}\,dx = \int \frac{1}{(5t^2+5)^2}\sqrt{5}\,dt = \frac{\sqrt{5}}{25}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$$

y ya antes calculamos

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \arctan t\right).$$

Juntando todo, y usando $t = x/\sqrt{5}$, hallamos:

$$\int \frac{5x-3}{(x^2+5)^2}\,dx = -\frac{5}{2}\frac{1}{x^2+5} - 3\frac{\sqrt{5}}{25}\frac{1}{2}\left(\frac{x/\sqrt{5}}{(x/\sqrt{5})^2+1} + \arctan\frac{x}{\sqrt{5}}\right).$$

Tercera parte. El cociente general $f(x)/g(x)$

Si nos dan un polinomio del tipo x^2+bx+c, entonces **factorizamos o completamos el cuadrado.** Así, el polinomio se puede escribir en la forma

$$(x-\alpha)(x-\beta) \qquad \text{o} \qquad (x-\alpha)^2+\beta^2$$

para números adecuados α y β. Surgen dos casos. Por ejemplo:

Caso 1. $\quad x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3).$

Caso 2. $\quad x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 2^2.$

En el caso 1 hemos factorizado el polinomio en dos factores y cada factor tiene grado 1.

En el caso 2 no hemos factorizado el polinomio. Por medio de un cambio de variables podemos cambiarlo a una expresión t^2+1. A saber, sea

$$x - 1 = 2t \qquad \text{de modo que} \qquad x = 2t+1.$$

Entonces

$$(x-1)^2 + 2^2 = 2^2t^2 + 2^2 = 2^2(t^2+1).$$

Hicimos el cambio de variables de modo que 2^2 saliera como factor. Notemos que en el caso 2 no podemos factorizar más el polinomio.

Se puede probar el siguiente resultado general, pero la demostración es larga y no se puede dar en este curso.

Sea $g(x)$ un polinomio con números reales como coeficientes. Entonces $g(x)$ siempre se puede escribir como producto de términos del tipo

$$(x-\alpha)^n \qquad y \qquad [(x-\beta)^2+\gamma^2]^m,$$

donde n y m son enteros ≥ 0, y algún factor constante.

Puede ser bastante difícil hacer esto de manera explícita, pero en los ejercicios la situación está preparada para que sea fácil.

Ejemplo. Al completar el cuadrado escribimos

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = (x+1)^2 + (\sqrt{2})^2.$$

Podemos entonces evaluar la integral:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx.$$

Sea $x+1 = \sqrt{2}t$ y $dx = \sqrt{2}\,dt$. Entonces

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}\,dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan t$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

Ejemplo. Hallemos

$$\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx.$$

Escribimos

$$\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx.$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3).$$

Juntando esto con el ejemplo anterior, hallamos:

$$\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx = \tfrac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ejemplo. Hallar la integral

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+1)^2(x-3)}\,dx.$$

Podemos hallar números $c_1, c_2, \ldots$ tales que el cociente sea igual a

$$\frac{2x+5}{(x^2+1)^2(x-3)} = \frac{c_1+c_2x}{x^2+1} + \frac{c_3+c_4x}{(x^2+1)^2} + \frac{c_5}{x-3}$$
$$= \frac{c_1}{x^2+1} + c_2\frac{x}{x^2+1} + c_3\frac{1}{(x^2+1)^2}$$
$$+ c_4\frac{x}{(x^2+1)^2} + c_5\frac{1}{x-3}.$$

Hay un teorema del álgebra que afirma que siempre se pueden despejar las constantes c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 para obtener dicha descomposición de la fracción original en la suma de la derecha, que se llama **descomposición en fracciones parciales.** Observen que, en correspondencia con el término con x^2+1, se necesitan varios términos en el lado derecho, especialmente aquellos con x en el numerador. Si no se incluyeran se obtendría una fórmula incompleta, que no funcionaría. No se podrían calcular las constantes.

Calcularemos ahora las constantes. Colocamos el lado derecho de la descomposición sobre el denominador común

$$(x^2+1)^2(x-3).$$

El numerador es igual a

$$\begin{aligned} 2x+5 =& c_1(x^2+1)(x-3)+c_2x(x^2+1)(x-3)+c_3(x-3) \\ &+ c_4x(x-3)+c_5(x^2+1)^2. \end{aligned}$$

Igualamos los coeficientes de x^4, x^3, x^2, x y las constantes respectivas y obtenemos un sistema de cinco ecuaciones lineales en cinco incógnitas, el cual se puede resolver. Es tedioso hacerlo aquí y lo dejamos como ejercicio, pero escribimos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
c_2 \qquad\qquad + c_5 &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x^4),\\
c_1 - 3c_2 \qquad\qquad &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x^3),\\
-3c_1 + c_2 \qquad + c_4 + 2c_5 &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x^2),\\
c_1 - 3c_2 + c_3 - 3c_4 \qquad &= 2 \quad \text{(coeficiente de } x),\\
-3c_1 \qquad - 3c_3 \qquad + c_5 &= 5 \quad \text{(coeficiente de } 1).
\end{aligned}$$

Para la integral obtenemos entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{(x^2+1)^2(x-3)}\,dx =& c_1 \arctan x + \tfrac{1}{2}c_2 \log(x^2+1) \\ &+ c_3 \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx - \tfrac{1}{2}c_4 \frac{1}{x^2+1} + c_5 \log(x-3). \end{aligned}$$

La integral que dejamos en pie es precisamente la del caso 3, de modo que hemos mostrado cómo hallar la integral deseada.

Ejemplo. Esta es una descomposición en fracciones parciales.

$$\begin{aligned} \frac{x^4+2x-1}{(x^2+2)^3(x-5)^2} =& \frac{c_1+c_2x}{(x^2+2)} + \frac{c_3+c_4x}{(x^2+2)^2} + \frac{c_5+c_6x}{(x^2+2)^3} \\ &+ \frac{c_7}{x-5} + \frac{c_8}{(x-5)^2}. \end{aligned}$$

Es tedioso calcular las constantes, y no lo haremos.

La regla general es como sigue: Supongan que tenemos un cociente $f(x)/g(x)$ con grado de $f <$ grado de g. Factorizamos g lo más que sea posible en términos como

$$(x-\alpha)^n \quad \text{y} \quad [(x-\beta)^2+\gamma^2]^m,$$

donde n y m son enteros ≥ 0. Entonces,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{suma de términos del tipo siguiente:}$$

$$\frac{c_1}{x-\alpha} + \frac{c_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(x-\alpha)^n}$$

$$+ \frac{d_1+e_1x}{(x-\beta)^2+\gamma^2} + \cdots + \frac{d_m+e_mx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^m}$$

para constantes adecuadas $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots, e_1\ e_2 \ldots$.

Una vez escrito el cociente $f(x)/g(x)$ como arriba, los casos 1, 2 y 3 nos permiten integrar cada término. Hallamos entonces que la integral incluye funciones del tipo siguiente:

Una función racional
Términos log
Términos arcotangente.

XI, §4. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes.

1. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)(x+7)}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-3)^2}\,dx$
3. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x+1)}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}\,dx$
9. Escribir completamente la integral
$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$
10. Ya sea mediante integración por partes repetida o viendo la fórmula general en el texto, obtener completamente las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^4}\,dx.$

Hallar las integrales siguientes.

11. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x^2+1)^2}\,dx$ 12. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+9)^2}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{4}{(x^2+16)^2}\,dx$ 14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

15. Hallar las constantes en la expresión del ejemplo que se encuentra en el texto:

$$\frac{2x+5}{(x^2+1)^2(x-3)} = \frac{c_1+c_2x}{x^2+1} + \frac{c_3+c_4x}{(x^2+1)^2} + \frac{c_5}{x-3}.$$

16. Usando sustitución, probar las dos fórmulas:

(a) $$\boxed{\int \frac{1}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}.}$$

(b) $$\boxed{\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\frac{x+a}{b}.}$$

Para los problemas siguientes, factorizar x^3-1 y x^4-1 en factores irreducibles.

17. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}\,dx$

18. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-2}{x^3-1}\,dx$

XI, §5. SUSTITUCIONES EXPONENCIALES

Esta sección tiene varios propósitos.

El primero es ampliar nuestras técnicas de integración mediante el uso de la función exponencial.

El segundo es practicar con la función exponencial y el logaritmo usándolos en un nuevo contexto, lo cual permitirá aprender más sobre estas funciones.

El tercero es introducir dos nuevas funciones

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

En el capítulo siguiente se verán estas funciones aplicadas a algunas situaciones físicas, para describir la ecuación de un cable colgante o de una pompa de jabón entre dos anillos. Dichas funciones se usarán también para hallar las integrales que dan la longitud de varias curvas. Aquí las usaremos de manera sistemática sólo para hallar integrales.

Comenzamos mostrando cómo hacer una sustitución sencilla.

Ejemplo. Hallemos

$$I = \int \sqrt{1-e^x}\,dx.$$

Hacemos $u = e^x$ y $du = e^x\,dx$, de modo que $dx = du/u$. Entonces

$$I = \int \sqrt{1-u}\frac{1}{u}\,du.$$

Ahora ponemos $1-u=v^2$ y $-du = 2v\,dv$ para librarnos del signo de la raíz cuadrada. Entonces $u = 1-v^2$ y obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{v}{1-v^2}(-2v)\,dv = 2\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv \\ &= 2\int \frac{v^2-1+1}{v^2-1}\,dv \\ &= 2\left[\int dv + \int \frac{1}{v^2-1}\,dv\right] \\ &= 2v + 2\int \frac{1}{(v+1)(v-1)}\,dv. \end{aligned}$$

Esta última integral se puede integrar mediante fracciones parciales para dar la respuesta final.

Hemos aprendido cómo integrar expresiones que incluyan

$$\sqrt{1-x^2}.$$

Sustituimos $x = \operatorname{sen}\theta$ para que la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada sea un cuadrado perfecto. Pero, ¿qué sucede si hemos de tratar con una integral como

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx?$$

Necesitamos hacer una sustitución que convierta la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada en un cuadrado perfecto. Hay dos tipos posibles de funciones que podemos usar. Primero, tratemos de sustituir $x = \tan\theta$ para deshacernos de la raíz cuadrada. Hallamos

$$\sqrt{1+\tan^2\theta} = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

sobre un intervalo donde $\cos\theta$ es positivo. Nuevamente, una potencia negativa de coseno no es de lo más agradable. Peor aún,

$$dx = \sec^2\theta\,d\theta,$$

de modo que

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sec^3\theta\,d\theta = \int \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta,$$

que se puede hacer, pero no es sencillo, así que no lo haremos.

Damos aquí una mejor manera de deshacernos de ese espantoso signo de raíz cuadrada. Necesitamos un mejor par de funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tales que

$$1 + f_1(t)^2 = f_2(t)^2.$$

Dichas funciones se hallan fácilmente usando la función exponencial e^t. A saber, hacemos

$$f_1(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{y} \quad f_2(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Si se multiplica, se hallará inmediatamente que estas funciones satisfacen la relación deseada. Estas funciones tienen un nombre: se llaman **seno hiperbólico y coseno hiperbólico**, y se denotan por **senh** y **cosh**. (senh se pronuncia sench, mientras que cosh se pronuncia cosh.) Así, **definimos**

$$\boxed{\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.}$$

Efectuando las operaciones se muestra que

$$\boxed{\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1.}$$

Más aún, las reglas usuales de la diferenciación muestran que

$$\boxed{\frac{d\cosh t}{dt} = \operatorname{senh} t} \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{d\operatorname{senh} t}{dt} = \cosh t.}$$

Estas fórmulas son muy parecidas a las del seno y coseno ordinarios, excepto por algunos cambios de signo, y nos permiten tratar algunos casos de integrales que no podíamos hacer antes, y en particular deshacernos de los signos de raíz cuadrada como sigue.

Ejemplo. Hallar

$$I = \int \sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

Hacemos la sustitución

$$x = \operatorname{senh} t \quad \text{y} \quad dx = \cosh t\, dt.$$

Entonces $1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$, de modo que $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \cosh t \cosh t\, dt \\ &= \int \frac{e^t + e^{-t}}{2} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\, dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right).$$

Es obvio que la respuesta está dada en términos de t. Si la queremos en términos de x, necesitaremos estudiar la *función inversa*, que podemos llamar **arcsenh (arcoseno hiperbólico)**, y podemos escribir

$$t = \operatorname{arcsenh} x.$$

Al principio parece que estamos en una situación parecida a la del seno y del coseno, donde no pudimos dar una fórmula explícita para la función inversa. Simplemente llamamos a esas funciones inversas arcoseno y arcocoseno. Es asombroso que aquí podamos dar una fórmula como sigue

$$\boxed{\textit{Si} \quad x = \operatorname{senh} t, \quad \textit{entonces} \quad t = \log(x + \sqrt{x^2+1}).}$$

Demostración. Tenemos

$$x = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Sea $u = e^t$. Entonces

$$x = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right).$$

Multiplicamos esta ecuación por $2u$ y obtenemos la ecuación

$$u^2 - 2ux - 1 = 0.$$

Podemos entonces despejar u en términos de x mediante la fórmula cuadrática y obtener

$$u = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}$$

de modo que

$$u = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Pero $u = e^t > 0$ para todo t. Como $\sqrt{x^2+1} > x$, se sigue que no podemos tener el signo menos en esta relación. Por lo tanto, finalmente,

$$e^t = u = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Tomamos ahora el log para hallar

$$t = \log(x + \sqrt{x^2+1}),$$

lo cual prueba la fórmula deseada.

Así, a diferencia de los casos del seno y el coseno, obtenemos aquí una fórmula explícita para la función inversa del seno hiperbólico.

Si ahora sustituimos $t = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ en la integral indefinida hallada antes, obtenemos la respuesta explícita:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1})^2 &+ 2\log(x + \sqrt{x^2+1}) \\ &- \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1})^{-2}\Big]. \end{aligned}}$$

Quizá queramos también hallar una integral definida.

Ejemplo. Sea $B > 0$. Hallar

$$\int_0^B \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Sustituimos B en la integral indefinida, sustituimos 0 y restamos, para hallar:

$$\int_0^B \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^{\log(B+\sqrt{B^2+1})}$$

$$= \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{2}(B+\sqrt{B^2+1})^2 + 2\log(B+\sqrt{B^2+1})$$
$$- \tfrac{1}{2}(B+\sqrt{B^2+1})^{-2}]$$

porque, cuando sustituimos 0 en lugar de t en la expresión entre corchetes, obtenemos 0.

En los casos en que se tenga que usar una función inversa para cosh, podemos confiar en la siguiente afirmación.

> *Para $x \geq 0$, la función $x = \cosh t$ tiene una función inversa, dada por*
>
> $$t = \log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Esto se prueba precisamente como la afirmación análoga para senh. Hagan los ejercicios 3 y 6, que en realidad están resueltos en la sección de respuestas, pero antes de consultar esa sección, para así aprender mejor el tema.

Observación. Las integrales como

$$\int \sqrt{1+x^3}\,dx \quad \text{y} \quad \int \sqrt{1+x^4}\,dx$$

son mucho más complicadas, y no se pueden hallar mediante las funciones elementales de este curso.

XI, §5. EJERCICIOS

Hallar las integrales.

1. $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$
5. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{senh} x = y$.
   (a) Mostrar que f es estrictamente creciente para todo x.
   (b) Trazar la gráfica de f.
   Sea $x = \operatorname{arcsenh} y$ la función inversa.

   (c) ¿Para qué números y está definido $\operatorname{arcsenh} y$?
   (d) Sea $g(y) = \operatorname{arcsenh} y$. Mostrar que

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

En el texto se mostró que $x = g(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$.

6. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x = y$.
   (a) Mostrar que f es estrictamente creciente para $x \geq 0$.
   Entonces existe la función inversa en este intervalo. Denotar esta función inversa por $x = \operatorname{arccosh} y$.
   (b) Trazar la gráfica de f.
   (c) ¿Para qué números y está definido el $\operatorname{arccosh} y$?
   (d) Sea $g(y) = \operatorname{arccosh} y$. Mostrar que

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

   (e) Mostrar que $x = g(y) = \log(y + \sqrt{y^2-1})$. En consecuencia se puede dar en realidad una expresión explícita para esta función inversa en términos del logaritmo. Éste es otro aspecto en el que las funciones hiperbólicas se comportan de manera más sencilla que el seno y el coseno, pues no podemos dar una fórmula explícita para el arcoseno y el arcocoseno.

Hallar las integrales siguientes.

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-\sqrt{x^2+1}}\,dx$
10. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$
11. Hallar el área entre el eje x y la hipérbola
$$x^2 - y^2 = 1$$
en el primer cuadrante, entre $x = 1$ y $x = B$, con $B > 1$. Para la gráfica de la hipérbola ver el capítulo II, sección §9.
12. Hallar el área entre el eje x y la hipérbola
$$y^2 - x^2 = 1$$
en el primer cuadrante, entre $x = 0$ y $x = B$.
13. Sea a un número positivo y sea $y = a\cosh(x/a)$. Mostrar que
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$
[Ésta es la ecuación diferencial del cable colgante. Ver el apéndice después de la sección §3 del capítulo siguiente.]
14. Verificar que, para cualquier número $a > 0$, tenemos
$$\boxed{\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})].}$$

CAPÍTULO XII

Aplicaciones de la integración

Las matemáticas consisten en el descubrimiento y descripción de ciertos objetos y estructuras. Es esencialmente imposible dar una descripción que abarque a todos esos objetos y estructuras. Luego, en lugar de dicha definición, diremos simplemente que los objetos estudiados por las matemáticas, tal como las conocemos, son los que se encuentran en las revistas de matemáticas de los últimos dos siglos. Hay muchas razones para estudiar estos objetos, entre las cuales hay razones estéticas (a algunas personas les resultan agradables) y razones prácticas (algunos resultados son aplicables).

La física, por otro lado, consiste en la descripción del mundo empírico mediante las estructuras matemáticas. El mundo empírico es el mundo con el que entramos en contacto a través de nuestros sentidos, mediante experimentos, mediciones, etc. Lo que caracteriza a un buen físico es su habilidad para elegir, entre muchas estructuras y objetos matemáticos, aquellos que se pueden usar para describir el mundo empírico. Por supuesto, las afirmaciones anteriores deben ser aclaradas en dos sentidos; primero: la descripción de situaciones físicas mediante estructuras matemáticas sólo puede hacerse dentro del grado de precisión que permitan los aparatos de experimentación. Segundo: la descripción deberá satisfacer ciertos tipos de criterio estético (sencillez, elegancia). Después de todo, una lista completa de la totalidad de los resultados de los experimentos que han sido realizados sería una descripción del mundo físico; pero otra cosa muy distinta es enunciar un solo principio que involucre simultáneamente a todos los resultados de esos experimentos.

Por razones psicológicas, es imposible (para la mayoría de las personas) aprender ciertas teorías matemáticas sin ver primero una interpretación geométrica o física. Por eso, en este libro, antes de introducir un concepto matemático hemos

dado con frecuencia alguna de sus interpretaciones geométricas o físicas. Sin embargo, no deben confundirse estos dos campos. Con este fin, podemos formar dos columnas, como se muestra más adelante.

Por lo que respecta al desarrollo lógico de nuestro curso, podríamos omitir completamente la segunda columna, pero no lo hacemos porque se usa para muchos fines: para motivar el aprendizaje de los conceptos de la primera columna (porque nuestro cerebro es de naturaleza tal, que necesita la segunda columna para comprender la primera); o para dar aplicaciones de la primera columna, aparte de la satisfacción puramente estética (que pueden sentir aquellos a quienes agrada la materia).

Matemáticas	Física y geometría
Números	Puntos de una recta
Derivada	Pendiente de una recta Razón de cambio
$\dfrac{df}{dx} = Kf(x)$	Decaimiento exponencial
Integral	Longitud Área Volumen Trabajo

De todos modos es importante tener en mente que la derivada, como el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

y la integral, como el número único entre la suma superior y la inferior, no se deben confundir con una pendiente o con un área, respectivamente. Es simplemente nuestra mente la que interpreta el concepto matemático en términos físicos o geométricos. Además, es frecuente que asignemos varias de dichas interpretaciones al mismo concepto matemático (por ejemplo, la integral se puede interpretar como un área o como el trabajo realizado por una fuerza.)

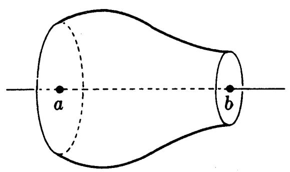
Y, a propósito, las observaciones anteriores acerca de física y matemáticas no pertenecen ni a la física ni a las matemáticas. Pertenecen a la filosofía.

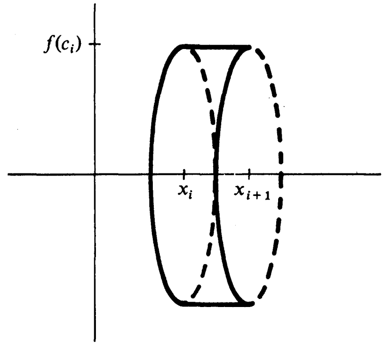
La experiencia muestra que, para un curso de un periodo sobre integración y fórmula de Taylor, falta tiempo para cubrir *todas* las aplicaciones de la integración dadas en el libro, así como los cálculos relacionados con la fórmula de Taylor y un estimado del residuo. Sin embargo, no se pueden omitir las aplicaciones básicas como la longitud de una curva, volúmenes de revolución y área en coordenadas polares. Después, cada quién debe escoger entre las demás, las que traten con conceptos geométricos (área de revolución) o conceptos físicos (trabajo). Como ya se dijo en el prefacio, tengo la impresión de que, excepto por la sección sobre trabajo, si falta tiempo es mejor omitir otras aplicaciones a fin de tener tiempo suficiente para manejar los cálculos que resultan de la fórmula de Taylor.

XII, §1. VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN

Comenzamos nuestras aplicaciones con volúmenes de revolución. La razón principal es que las integrales que deben evaluarse son más fáciles que las de otras aplicaciones. Pero al final deduciremos sistemáticamente las longitudes, áreas y volúmenes de todas las figuras geométricas usuales.

Sea $y = f(x)$ una función de x, continua en algún intervalo $a \leq x \leq b$. Supongamos que $f(x) \geq 0$ en este intervalo. Si se gira la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x, se obtiene un sólido cuyo volumen queremos calcular.





Tomemos una partición de $[a, b]$, digamos

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

Sea c_i un mínimo de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y sea d_i un máximo de f en ese intervalo. Entonces el sólido de revolución en ese pequeño intervalo está entre un cilindro pequeño y un cilindro grande. El ancho de estos cilindros es $x_{i+1} - x_i$ y el radio es $f(c_i)$ para el cilindro pequeño y $f(d_i)$ para el grande. Por lo tanto, el volumen de revolución, denotado por V, satisface las desigualdades

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi f(c_i)^2 (x_{i+1} - x_i) \leq V \leq \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(d_i)^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Entonces es razonable definir este volumen como

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f(x)^2\, dx.}$$

Ejemplo. Calcular el volumen de la esfera de radio 1.

Tomamos la función $y = \sqrt{1 - x^2}$ entre 0 y 1. Si rotamos esta curva alrededor del eje x obtendremos la semiesfera. Entonces su volumen es

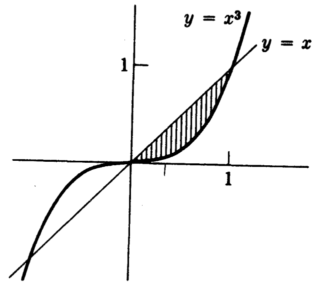
$$\int_0^1 \pi(1 - x^2)\, dx = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Entonces el volumen de la esfera completa es $\frac{4}{3}\pi$.

Ejemplo. Hallar el volumen obtenido al rotar la región entre $y = x^3$ y $y = x$ en el primer cuadrante alrededor del eje x.

La gráfica de la región se ilustra en la figura. Tomamos sólo la parte que se encuentra en el primer cuadrante, de modo que $0 \leq x \leq 1$. El volumen requerido V es igual a la diferencia de los volúmenes obtenidos al rotar $y = x$ y $y = x^3$. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$. Entonces

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 f(x)^2\, dx - \pi \int_0^1 g(x)^2\, dx \\ &= \pi \int_0^1 x^2\, dx - \pi \int_0^1 x^6\, dx \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$



Ejemplo. Podemos hacer chimeneas sólidas infinitas y ver si tienen volumen finito. Considerar la función

$$f(x) = 1/\sqrt{x}.$$

Sea

$$0 < a < 1.$$

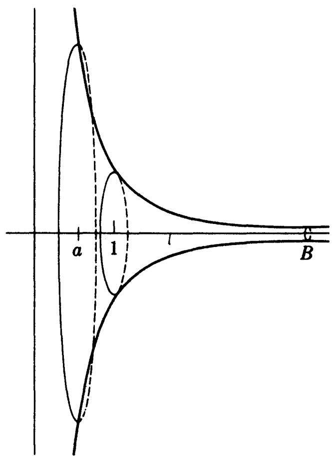
El volumen de revolución de la curva

$$y = 1/\sqrt{x}$$

entre $x = a$ y $x = 1$ está dado por la integral

$$\int_a^1 \pi \frac{1}{x}\,dx = \pi \log x \Big|_a^1$$
$$= -\pi \log a.$$

Cuando a tiende a 0, $\log a$ se vuelve negativo muy grande, de modo que $-\log a$ se vuelve positivo muy grande, y el volumen se vuelve arbitrariamente grande. Ilustramos la chimenea en la figura siguiente.



Sin embargo, si se calcula el volumen de la curva

$$y = \frac{1}{x^{1/4}}$$

entre a y 1, hallaremos que tiende a un límite cuando $a \to 0$. Resolver el ejercicio 12.

En el cálculo anterior determinamos el volumen de una chimenea cerca del eje y. Podemos también hallar el volumen de la chimenea yendo hacia la derecha, digamos entre 1 y un número $B > 1$. Suponiendo que la chimenea está definida por $y = 1/\sqrt{x}$, el volumen de revolución entre 1 y B está dado por la integral

$$\int_1^B \pi \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int_1^B \pi \frac{1}{x}\,dx = \pi \log B.$$

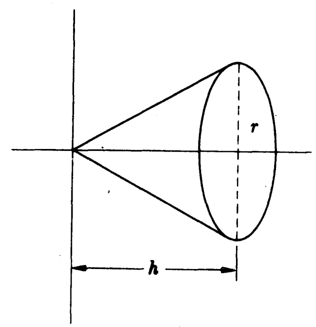
Cuando $B \to \infty$ vemos que este volumen se vuelve arbitrariamente grande. Sin embargo, usando otra función, como la del ejercicio 13, ¡se hallará un volumen finito para la chimenea infinita!

XII, §1. EJERCICIOS

1. Hallar el volumen de una esfera de radio r.

Hallar los volúmenes de revolución con los datos siguientes:

2. $y = 1/\cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$
3. $y = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$
4. $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$
5. La región entre $y = x^2$ y $y = 5x$
6. $y = xe^{x/2}$ entre $x = 0$ y $x = 1$
7. $y = x^{1/2}e^{x/2}$ entre $x = 1$ y $x = 2$
8. $y = \log x$ entre $x = 1$ y $x = 2$
9. $y = \sqrt{1+x}$ entre $x = 1$ y $x = 5$
10. (a) Sea B un número > 1. ¿Cuál es el volumen de revolución de la curva $y = e^{-x}$ entre 1 y B? ¿Tiende a algún límite este volumen cuando B se vuelve grande? De ser así, ¿cuál es ese límite?
(b) La misma pregunta para la curva $y = e^{-2x}$.
(c) La misma pregunta para la curva $y = \sqrt{x}e^{-x^2}$.
11. Hallar el volumen de un cono cuya base tiene radio r y altura h, formado al rotar un recta que pasa por el origen, alrededor del eje x. ¿Cuál es la ecuación de la recta?



12. Calcular el volumen de revolución de la curva
$$y = \frac{1}{x^{1/4}}$$
entre a y 1. Determinar el límite cuando $a \to 0$.
13. Calcular el volumen de revolución de la curva
$$y = 1/x^2$$
entre $x = 2$ y $x = B$ para cualquier número $B > 2$. ¿Tiende este volumen a un límite cuando $B \to \infty$? De ser así, ¿a qué límite?

14. ¿Para qué números $c > 0$ el volumen de revolución de la curva

$$y = 1/x^c$$

entre 1 y B tenderá a un límite cuando $B \to \infty$? Hallar este límite en términos de c.

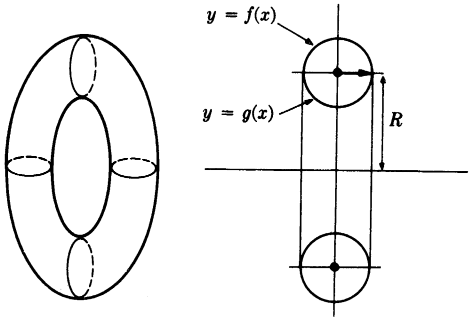
15. ¿Para qué números $c > 0$ el volumen de revolución de la curva

$$y = 1/x^c$$

entre a y 1 tenderá a un límite cuando $c \to 0$? Hallar este límite en términos de c.

XII, §1. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. Hallar el volumen de una dona como la que se muestra en la figura. La dona se obtiene al rotar un círculo de radio a alrededor de una recta, digamos el eje x.



(a) La dona (b) Sección transversal de la dona

Sea R la distancia de la recta al centro del disco. Suponemos que $R > a$. Se puede reducir este problema al caso estudiado en esta sección, como sigue. Sea $y = f(x)$ la función cuya gráfica es la mitad superior del círculo y sea $y = g(x)$ la función cuya gráfica es la mitad inferior del círculo. Escribir explícitamente f y g. Entonces se tendrá que restar el volumen obtenido al rotar el semicírculo inferior del volumen obtenido al rotar el semicírculo superior.

Hallar los volúmenes de los sólidos obtenidos al rotar cada región indicada alrededor del eje x.

2. $y = x^2$, entre $y = 0$ y $x = 2$
3. $y = \dfrac{4}{x+1}$, $x = -5$, $x = -2$, $y = 0$
4. $y = \sqrt{x}$, el eje x y $x = 2$
5. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 3$ y el eje x

6. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$
7. La región acotada por la recta $x + y = 1$ y los ejes coordenados
8. La elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$
9. $y = e^{-x}$, entre $x = 1$ y $x = 5$
10. $y = \log x$, entre $x = 1$ y $x = 2$
11. $y = \tan x$, $x = \pi/3$ y el eje x

En los siguientes problemas se pide hallar un volumen de revolución de una región entre ciertas cotas y determinar si el volumen tiende a un límite cuando la cota B se vuelve muy grande. De ser así, dar el límite.

12. La región acotada por $1/x$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = B$ para $B > 1$.
13. La región acotada por $1/x^2$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = B$ para $B > 1$.
14. La región acotada por $1/\sqrt{x}$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = B$ para $B > 1$.

En los problemas siguientes, hallar el volumen de revolución determinado por las cotas que incluyen un número $a > 0$ y determinar si este volumen tiende a un límite cuando a tiende a 0. De ser así, decir qué límite.

15. La región acotada por $y = 1/\sqrt{x}$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = 1$, para $0 < a < 1$.
16. La región acotada por $y = 1/x$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = 1$, con $0 < a < 1$.
17. La región acotada por $(\cos x)/\sqrt{\operatorname{sen} x}$, el eje x, entre $x = a$ y $x = \pi/4$, con $0 < a < \pi/4$.

XII, §2. ÁREA EN COORDENADAS POLARES

Supongan que nos dan una función continua

$$r = f(\theta)$$

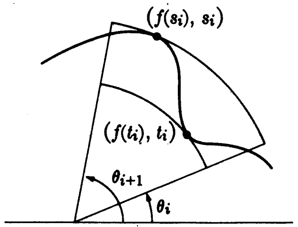
definida en algún intervalo $a \leq \theta \leq b$. Suponemos que $f(\theta) \geq 0$ y $b \leq a + 2\pi$.

Queremos hallar una expresión integral para el área abarcada por la curva $r = f(\theta)$ entre las dos cotas a y b.

Tomar una partición de $[a, b]$, digamos

$$a = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_n = b.$$

La figura entre θ_i y θ_{i+1} podría verse como se muestra en la página siguiente.



Sea s_i un número entre θ_i y θ_{i+1} tal que $f(s_i)$ sea un máximo en ese intervalo, y sea t_i un número tal que $f(t_i)$ sea un mínimo en ese intervalo. En la figura hemos trazado los círculos (más bien los sectores) de radios $f(s_i)$ y $f(t_i)$, respectivamente. Sea

$$\begin{aligned} A_i &= \text{área entre} \quad \theta = \theta_i, \quad \theta = \theta_{i+1}, \quad \text{y acotada por la curva} \\ &= \text{área del conjunto de puntos } (r, \theta) \text{ en coordenadas polares tales que} \end{aligned}$$

$$\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1} \qquad \text{y} \qquad 0 \leq r \leq f(\theta).$$

El área de un sector que tiene ángulo $\theta_{i+1} - \theta_i$ y radio R es igual a la fracción

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi}$$

del área total del círculo de radio R, a saber, πR^2. Por lo tanto, tenemos la desigualdad

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi} \pi f(t_i)^2 \leq A_i \leq \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi} \pi f(s_i)^2.$$

Sea $G(\theta) = \frac{1}{2} f(\theta)^2$. Vemos que la suma de las pequeñas piezas de área A_i satisface las desigualdades

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(t_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} A_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} G(s_i)(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Así, el área deseada está entre la suma superior y la suma inferior asociada con la partición, de modo que es razonable que el área en coordenadas polares esté dada por

$$\boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2} f(\theta)^2 \, d\theta.}$$

Ejemplo. Hallar el área acotada por un lazo de la curva

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \qquad (a > 0).$$

Si $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, entonces $\cos 2\theta \geq 0$. Así, podemos escribir

$$r = \sqrt{2} a \sqrt{\cos 2\theta}.$$

Por lo tanto, el área es

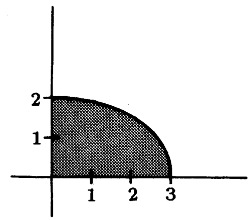
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} 2a^2 \cos 2\theta \, d\theta = a^2.$$

Ejemplo. Hallar el área acotada por la curva

$$r = 2 + \cos \theta,$$

en el primer cuadrante.

Primero trazamos el área en el primer cuadrante, i.e. para θ entre 0 y $\pi/2$. Se ve así:



El área está dada por la integral

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 + \cos \theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta.$$

Todos los términos se integran fácilmente. La respuesta final es

$$\frac{1}{2}\left(2\pi + 4 + \frac{\pi}{4}\right).$$

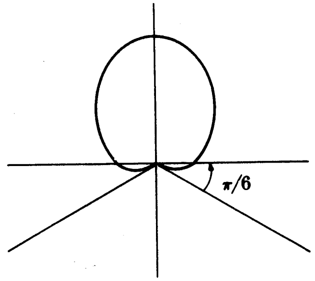
Ejemplo. Hallar el área encerrada por la curva dada en coordenadas polares por

$$r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta.$$

Notar que para $-\pi/6 \leq \theta \leq 7\pi/6$, y sólo para esos θ, se tiene que

$$1 + 2 \operatorname{sen} \theta \geq 0.$$

La curva se ve como en la figura de la página siguiente.



El área es, pues, igual a

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} (1 + 2\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/2} (1 + 4\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta.$$

Usamos la identidad

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}.$$

Entonces la integral se evalúa fácilmente, y dejamos eso para el lector.

XII, §2. EJERCICIOS

Hallar el área encerrada por las curvas siguientes:

1. $r = 2(1+\cos\theta)$
2. $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta \quad (a > 0)$
3. $r = 2a\cos\theta$
4. $r = \cos 3\theta, \quad -\pi/6 \le \theta \le \pi/6$
5. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$
6. $r = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$
7. $r = 2 + \cos\theta$
8. $r = 2\cos 3\theta, \quad -\pi/6 \le \theta \le \pi/6$

XII, §2. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las áreas de las regiones siguientes acotadas por la curva dada en coordenadas polares.

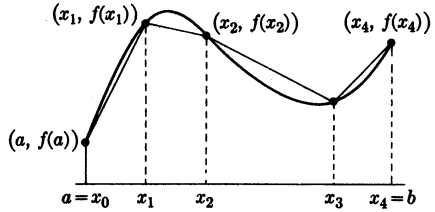
1. $r = 10\cos\theta$
2. $r = 1 - \cos\theta$
3. $r = \sqrt{1-\cos\theta}$
4. $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$
5. $r = \operatorname{sen}^2\theta$
6. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
7. $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$
8. $r = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$
9. $r = \cos 3\theta$
10. $r = 2 + \cos\theta$

Hallar el área entre las curvas siguientes dadas en coordenadas rectangulares.

11. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, entre $x = -2$ y $x = 2$
12. $y = 4 - x^2$, $y = 8 - 2x^2$, entre $x = -2$ y $x = 2$
13. $y = x^3 + x^2$, $y = x^3 + 1$, entre $x = -1$ y $x = 1$
14. $y = x - x^2$, $y = -x$, entre $x = 0$ y $x = 2$
15. $y = x^2$, $y = x + 1$, entre los dos puntos donde se intersecan las dos curvas.
16. $y = x^3$ y $y = x + 6$ entre $x = 0$ y el valor de $x > 0$ donde se intersecan las dos curvas.

XII, §3. LONGITUD DE CURVAS

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable sobre algún intervalo $[a, b]$ (con $a < b$) y suponer que su derivada f' es continua. Deseamos determinar la longitud de la curva descrita por la gráfica. La idea principal es aproximar la curva por pequeños segmentos de recta y sumarlos.



En consecuencia, consideramos una partición de nuestro intervalo:

$$a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b.$$

Para cada x_i tenemos el punto $(x_i, f(x_i))$ sobre la curva $y = f(x)$. Trazamos los segmentos de recta entre dos puntos sucesivos. La longitud de dicho segmento de recta es la longitud de la recta entre

$$(x_i, f(x_i)) \qquad \text{y} \qquad (x_{i+1}, f(x_{i+1})),$$

y es igual a

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$

Por el teorema del valor medio concluimos que

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i) f'(c_i)$$

para algún número c_i entre x_i y x_{i+1}. Al usar esto vemos que la longitud de nuestro segmento de recta es

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (x_{i+1}-x_i)^2 f'(c_i)^2}.$$

Podemos factorizar $(x_{i+1} - x_i)^2$ y ver que la suma de las longitudes de estos segmentos de recta es

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}(x_{i+1} - x_i).$$

Sea $G(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$. Entonces $G(x)$ es continua y vemos que la suma recién escrita es

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(c_i)(x_{i+1} - x_i).$$

El valor $G(c_i)$ satisface las desigualdades

$$\min_{[x_i, x_{i+1}]} G \leq G(c_i) \leq \max_{[x_i, x_{i+1}]} G$$

esto es, $G(c_i)$ está entre el mínimo y el máximo de G en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Así, la suma que hemos escrito está entre una suma inferior y una suma superior para la función G. Este tipo de sumas se conocen como sumas de Riemann. Esto es cierto para toda partición del intervalo. Sabemos de la teoría básica de la integración que hay exactamente un número que está entre toda suma superior y toda suma inferior, y que ese número es la integral definida. Por lo tanto, es razonable **definir**:

la longitud de una curva entre a y b

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ejemplo. Deseamos formar la integral para obtener la longitud de la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$. De la definición anterior vemos que la integral es

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Esta integral es del mismo tipo que las consideradas en el capítulo XI, sección §5. Primero hacemos

$$u = 2x, \qquad du = 2\, dx.$$

Cuando $x = 0$, entonces $u = 0$, y cuando $x = 1$, entonces $u = 2$. Por lo tanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\tfrac{1}{2}\, du = \tfrac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\, du.$$

La respuesta viene entonces del capítulo XI, sección §5.

Ejemplo. Queremos hallar la longitud de la curva $y = e^x$ entre $x = 1$ y $x = 2$. Tenemos que $dy/dx = e^x$ y $(dy/dx)^2 = e^{2x}$, de modo que, por la fórmula general, la longitud está dada por la integral

$$\int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx.$$

Esto se puede evaluar más rápidamente, así que realizamos el cálculo. Se hace la sustitución

$$1 + e^{2x} = u^2.$$

Entonces

$$2e^{2x}\, dx = 2u\, du.$$

Como $e^2x = u^2 - 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx = \int u\frac{u\, du}{u^2 - 1} &= \int \frac{u^2}{u^2 - 1}\, du\\ &= \int \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1}\, du\\ &= \int 1\, du + \int \frac{1}{u^2 - 1}\, du.\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}\right).$$

Por lo tanto,

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx = u + \tfrac{1}{2}\left[\log\frac{u - 1}{u + 1}\right].$$

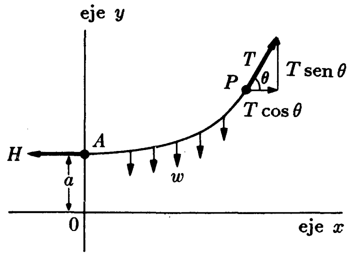
Cuando $x = 1$, $u = \sqrt{1 + e^2}$. Cuando $x = 2$, $u = \sqrt{1 + e^4}$. Por consiguiente, la longitud de la curva sobre el intervalo dado es igual a

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx &= u + \tfrac{1}{2}\left[\log\frac{u - 1}{u + 1}\right]\Bigg|_{\sqrt{1+e^2}}^{\sqrt{1+e^4}}\\ &= \sqrt{1 + e^4} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1 + e^4} - 1}{\sqrt{1 + e^4} + 1}\\ &\quad - \sqrt{1 + e^2} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1 + e^2} - 1}{\sqrt{1 + e^2} + 1}.\end{aligned}$$

Un poco complicada, pero ésta es la respuesta explícita.

APÉNDICE. EL CABLE COLGANTE

Queremos mostrar aquí cómo se puede determinar la ecuación de un cable colgante como el que se muestra en la figura.



Suponemos que el cable está fijo a un muro por su extremo izquierdo y está sujeto a una tensión T en una cierta dirección, en el otro extremo. Queremos hallar de manera explícita la altura del cable

$$y = f(x).$$

La respuesta es como sigue.

> *Si a es la altura en el extremo izquierdo y el cable tiene pendiente horizontal al tocar el muro, entonces*
>
> $$y = a \cosh(x/a).$$

Mostraremos esto deduciendo primero la ecuación diferencial que satisface el cable. Así, mostremos primero que

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.}$$

El cable está fijo al muro en el punto A, sujeto a una tensión horizontal constante, denotada por H. Sea w el peso por unidad de longitud y sea s la longitud. Entonces el peso W del cable de longitud s es ws.

La tensión en P tiene que balancear la tensión horizontal H y el peso W que jala hacia abajo. Esta tensión tiene una componente horizontal y una componente vertical, que están dadas por $T\cos\theta$ y $T\operatorname{sen}\theta$, respectivamente. Así, debemos tener

$$T\cos\theta = H, \qquad T\operatorname{sen}\theta = W = ws.$$

Al dividir obtenemos

$$\frac{T\operatorname{sen}\theta}{T\cos\theta} = \tan\theta = \frac{W}{H}.$$

Pero $\tan\theta$ es la pendiente del cable en el punto $P = (x, y)$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}s.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\frac{ds}{dx} = \frac{w}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ésta es la ecuación diferencial que queríamos.

Quizá ya resolvieron un ejercicio en el capítulo XI, sección §5, que mostraba que la función

$$y = a\cosh(x/a)$$

satisface la ecuación

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Probemos ahora el recíproco.

Teorema 3.1. *Si $y = f(x)$ satisface $(*)$, y además*

$$f(0) = a, \qquad f'(0) = 0,$$

entonces $y = a\cosh(x/a)$.

La condición $f(0) = a$ significa que el cable está colgado en el extremo izquierdo a una altura a sobre el eje x. La condición $f'(0) = 0$ significa que, en este punto, el cable es horizontal.

Sea

$$\frac{dy}{dx} = u.$$

Nuestra ecuación diferencial se puede escribir entonces como

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + u^2}.$$

Así,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\,du = \frac{1}{a}\,dx$$

e integramos mediante una sustitución como en el capítulo XI, sección §5. Hacemos

$$u = \operatorname{senh} t, \qquad \text{y} \qquad du = \cosh t\,dt.$$

Tenemos

$$\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t,$$

pues $\cosh t > 0$ para todo t. Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\, du = \int \frac{\cosh t}{\cosh t}\, dt = t.$$

Entonces

$$t = \frac{1}{a}x + C$$

para alguna constante C. Por lo tanto,

$$u = \operatorname{senh} t = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a} + C\right).$$

Pero, por hipótesis, $u = dy/dx = f'(x)$, y $f'(0) = 0$, por lo que,

$$\operatorname{senh} C = 0,$$

lo cual significa que $C = 0$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Integrando una vez más, obtenemos

$$y = f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

para alguna constante K. Pero $f(0) = a$, y $\cosh 0 = 1$, de modo que

$$a = f(0) = a \cdot 1 + K.$$

Por lo tanto, $K = 0$ y así, finalmente,

$$y = f(x) = a\cosh(x/a)$$

como se deseaba.

XII, §3. EJERCICIOS

Hallar las longitudes de las curvas siguientes:

1. $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 4$
2. $y = \log x$, $\frac{1}{2} \le x \le 2$
3. $y = \log x$, $1 \le x \le e^2$
4. $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$
5. $y = e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.
6. $y = x^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 3$.
7. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
8. $y = \log(1 - x^2)$, $0 \le x \le \frac{3}{4}$
9. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $-1 \le x \le 0$
10. $y = \log\cos x$, $0 \le x \le \pi/3$

XII, §4. CURVAS PARAMÉTRICAS

Hay otra manera en que podemos describir una curva. Suponiendo que vemos un punto que se mueve en el plano, sus coordenadas se pueden dar como función del tiempo t. Así, cuando damos dos funciones de t, digamos

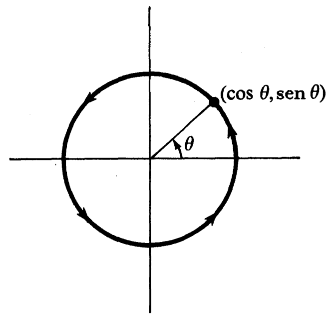
$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

podemos verlas como la descripción de un punto moviéndose a lo largo de una curva. Las funciones f y g dan las coordenadas del punto como funciones de t.

Ejemplo 1. Sea $x = \cos\theta$ y $y = \operatorname{sen}\theta$. Entonces

$$(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

es un punto sobre el círculo.



Conforme θ crece, vemos el punto moviéndose a lo largo del círculo, en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj. En realidad no importa la selección de la letra θ, y pudimos haber usado t. En la práctica, el ángulo θ mismo se expresa como función del tiempo. Por ejemplo, si se mueve un insecto alrededor del círculo con velocidad angular uniforme (constante), entonces podemos escribir

$$\theta = \omega t,$$

donde ω es constante. Entonces

$$x = \cos(\omega t) \qquad \text{y} \qquad y = \operatorname{sen}(\omega t).$$

Esto describe el movimiento de un insecto alrededor del círculo con velocidad angular ω.

Cuando (x, y) se describe mediante dos funciones de t, como se acaba de hacer, decimos que tenemos una **parametrización de la curva** en términos del **parámetro** t.

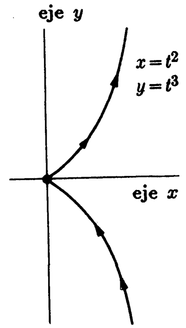
Ejemplo 2. Trazar la curva $x = t^2$, $y = t^3$.
Podemos hacer una tabla de valores de la manera acostumbrada.

t	x	y
0	0	0
1	1	1
2	4	8
−1	1	−1
−2	4	−8

Así, para cada número t podemos localizar el punto correspondiente (x, y). También investigamos en qué caso x y y son funciones de t crecientes o decrecientes. Por ejemplo, al tomar la derivada obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2.$$

Así, x crece cuando $t > 0$ y decrece cuando $t < 0$. La ordenada es creciente, pues $t^2 > 0$ (a menos que $t = 0$). Más aún, la abscisa siempre es positiva (a menos que $t = 0$), de modo que la gráfica se ve así:



La expresión paramétrica para la abscisa y la ordenada suele ser útil para describir el movimiento de un insecto (o una partícula), cuyas coordenadas están dadas como función del tiempo t. Las flechas trazadas en la figura sugieren dicho movimiento.

A veces podemos transformar una curva dada en forma paramétrica, en una definida por una ecuación, quizá con algunas desigualdades adicionales.

Ejemplo 3. Los puntos (t^2, t^3) satisfacen una ecuación "ordinaria"

$$y^2 = x^3, \qquad \text{o} \qquad y = x^{3/2}.$$

Sin embargo, pudimos haber escrito la ecuación

$$y^4 = x^6,$$

la cual satisfacen todos los puntos de nuestra curva. Pero en este caso hay soluciones de esta ecuación que no están dadas por nuestra parametrización, y

que corresponden a valores negativos de x, por ejemplo,

$$x = -2, \qquad y = \pm 2\sqrt{2}.$$

Así, si queremos describir el conjunto de todos los puntos de la curva parametrizada con esta última relación, debemos añadir una desigualdad $x \geq 0$. Entonces es correcto decir que el conjunto de todos los puntos sobre la curva parametrizada es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación

$$y^4 = x^6$$

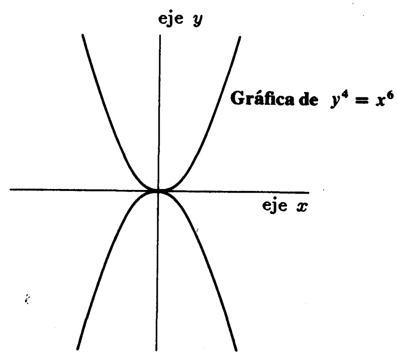
que satisfacen la desigualdad $x \geq 0$.

De igual manera, también es correcto decir que el conjunto de todos los puntos sobre la curva parametrizada es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación

$$y^8 = x^{12}$$

que satisfacen la desigualdad $x \geq 0$. Y así sucesivamente.

La gráfica de la ecuación $y^4 = x^6$ es como se muestra en la figura.



Es simétrica respecto a ambos ejes, el x y el y. Sin embargo, en la curva parametrizada,

$$x = t^2, \qquad y = t^3,$$

sólo se presenta el lado derecho de esta gráfica.

Ejemplo 4. Sea

$$x(t) = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \qquad \text{y} \qquad y(t) = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Ya sea que hayan verificado que

$$x(t)^2 - y(t)^2 = 1,$$

o que lo verifiquen ahora realizando la multiplicación y la resta, verán entonces que el punto

$$\big(x(t), y(t)\big) = \big(\tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})\big)$$

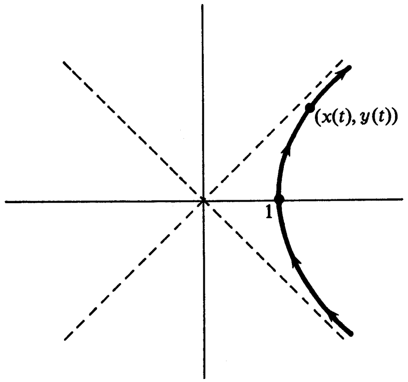
está sobre la hipérbola definida por la ecuación

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Pero nótese que $x(t) > 0$, en otras palabras, la abscisa dada por la anterior función de t, siempre es positiva. Así, nuestras funciones

$$(x(t), y(t)) = \left(\tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right)$$

describen un punto sobre la rama derecha de la hipérbola.



Cuando t es negativo grande, entonces $x(t)$ es positivo grande, y $y(t)$ es negativo grande. Cuando t es positivo grande, entonces $x(t)$ es positivo grande y $y(t)$ también es positivo grande.

Conforme crece t, la ordenada $y(t)$ crece de negativo grande a positivo grande, por lo que un insecto que se mueve a lo largo de la hipérbola de acuerdo con la parametrización anterior se mueve hacia arriba en la parte derecha de la hipérbola.

Longitud de curvas parametrizadas

Determinaremos ahora la longitud de una curva dada por una parametrización.

Supongamos que nuestra curva está dada por

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

con $a \le t \le b$, y que tanto f como g tienen derivadas continuas. Consideramos una partición del intervalo de valores t, $[a, b]$:

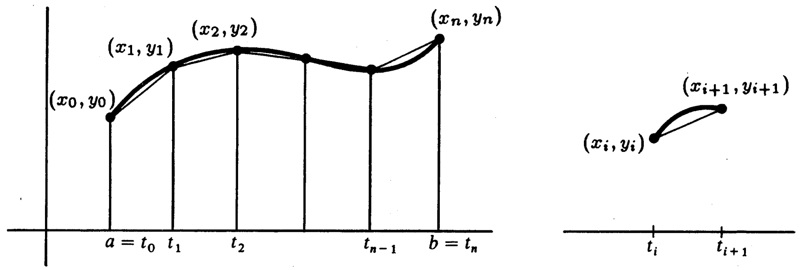
$$a = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n = b.$$

Entonces obtenemos los puntos

$$(x_i, y_i) = (f(t_i), g(t_i))$$

sobre la curva. La distancia entre dos puntos sucesivos es

$$\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} = \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}.$$



La suma de las longitudes de los segmentos de recta da una aproximación de la longitud de la curva cuando la partición es lo suficientemente fina, esto es cuando los números t_i, t_{i+1} están lo suficientemente cerca entre sí. Por lo tanto, la suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}$$

da una aproximación a la longitud de la curva. Usamos el teorema del valor medio para f y g. Existen números c_i y d_i entre t_i y t_{i+1} tales que

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(c_i)(t_{i+1} - t_i),$$

$$g(t_{i+1}) - g(t_i) = g'(d_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Al sustituir estos valores y factorizar $(t_{i+1} - t_i)$, vemos que la suma de las longitudes de nuestros segmentos de recta es igual a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Sea

$$G(t) = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}.$$

Entonces nuestra suma es casi igual a

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(c_i)(t_{i+1} - t_i),$$

que sería una suma de Riemann para G. No lo es porque no es necesariamente cierto que $c_i = d_i$. No obstante, lo que hemos hecho hace que sea bastante razonable **definir la longitud de nuestra curva (en forma paramétrica) como**

$$\boxed{\ell_a^b = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt.}$$

Una justificación completa de que esta integral es un límite, en un sentido adecuado, de nuestras sumas, requeriría algo más de teoría, lo cual es irrelevante porque sólo queremos que se vea razonable el hecho de que la integral anterior representa lo que entendemos físicamente por longitud.

Observen que, cuando se da una curva en su forma usual $y = f(x)$, podemos hacer

$$t = x = g(t) \quad \text{y} \quad y = f(t).$$

Esto muestra cómo ver la forma usual como un caso especial de la forma paramétrica. En ese caso, $g'(t) = 1$ y la fórmula para la longitud en forma paramétrica se ve igual que la fórmula que obtuvimos antes para una curva $y = f(x)$.

También es conveniente poner la fórmula en la otra notación usual para la derivada. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = g'(t).$$

Por lo tanto, la longitud de la curva se puede escribir en la forma

$$\boxed{\ell_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.}$$

Es costumbre hacer

$$s(t) = \text{longitud de la curva como función de } t.$$

Así, podemos escribir

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Esto da lugar a

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}.$$

A veces escribimos simbólicamente

$$\boxed{(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,}$$

para sugerir el teorema de Pitágoras.

Ejemplo. Hallar la longitud de la curva

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t$$

entre $t = 0$ y $t = \pi$.

La longitud es la integral

$$\int_0^\pi \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}\, dt.$$

En vista de la relación $(-\operatorname{sen} t)^2 = (\operatorname{sen} t)^2$ y de una fórmula básica que relaciona al seno y al coseno, obtenemos

$$\int_0^\pi dt = \pi.$$

Si integramos entre 0 y 2π, obtendremos 2π. Ésta es la longitud del círculo de radio 1.

Ejemplo. Hallar la longitud de la curva

$$x = \cos^3\theta, \qquad y = \operatorname{sen}^3\theta$$

para $0 \le \theta \le \pi/2$.

Tenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = 3\cos^2\theta(-\operatorname{sen}\theta) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{d\theta} = 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta.$$

Por lo tanto,

$$\ell_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^4\theta\operatorname{sen}^2\theta + 9\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \qquad (\text{porque } \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1)$$

$$= 3\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta \qquad (\text{porque } \operatorname{sen}\theta\cos\theta \ge 0 \text{ para } 0 \le \theta \le \pi/2).$$

Integramos esto haciendo $u = \operatorname{sen}\theta$, $du = \cos\theta\, d\theta$, de modo que la integral es de la forma

$$\int u\, du = u^2/2.$$

Entonces

$$\ell_0^{\pi/2} = 3\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = 3/2.$$

Ejemplo. Hallar la longitud de la misma curva como en el ejemplo anterior, pero para $0 \le \theta \le 2\pi$.

El mismo argumento que el anterior conduce a la fórmula de la longitud

$$\ell_0^{\pi} = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta.$$

Sin embargo, si A es un número, **la fórmula**

$$\sqrt{A^2} = A$$

es válida sólo si A es positivo. Si A es negativo, entonces

$$\sqrt{A^2} = -A = |A|.$$

Así pues, al tomar la raíz cuadrada se deberá tener cuidado de los intervalos donde $\cos\theta\operatorname{sen}\theta$ es positivo o negativo. Tenemos que separar la integral en una suma:

$$\ell_0^{2\pi} = 3\int_0^{\pi/2} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta - 3\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$+ 3\int_{\pi}^{3\pi/2} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta - 3\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Ahora éstas se pueden evaluar fácilmente, como antes, para dar la respuesta final 6. Por otro lado, observar que

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Aquí se obtiene el valor 0 porque a veces la función es positiva y a veces es negativa, sobre el intervalo más grande $0 \le \theta \le 2\pi$, y hay cancelaciones.

Coordenadas polares

Hallemos ahora una fórmula para la longitud de las curvas dadas en coordenadas polares. Digamos que la curva es

$$r = f(\theta),$$

con $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$. Sabemos que

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}}$$

Esto hace que la curva esté en forma paramétrica, como en las consideraciones precedentes. En consecuencia, podemos aplicar la definición como antes, y vemos que la longitud es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Se puede calcular $dx/d\theta$ y $dy/d\theta$ usando la regla para la derivada de un producto. Si se hace esto, se hallará que se cancelan varios términos y resulta que:

La longitud de una curva expresada en coordenadas polares por $r = f(\theta)$ está dada por la fórmula

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta.}$$

Los lectores deberán obtener esto por sí mismos, pero para que quede constancia, lo haremos todo aquí. Traten de no verlo antes de hacerlo por sí solos.

Tenemos:

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= f(\theta)^2\operatorname{sen}^2\theta - 2f(\theta)f'(\theta)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + f'(\theta)^2\cos^2\theta \\ &\quad + f(\theta)^2\cos^2\theta + 2f(\theta)f'(\theta)\cos\theta\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= f(\theta)^2 + f'(\theta)^2\end{aligned}$$

pues $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y los términos de enmedio se cancelan. La fórmula se obtiene al sustituir.

Ejemplo. Hallar la longitud de la curva dada en coordenadas polares por $r = \operatorname{sen}\theta$, entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Usamos la fórmula recién deducida y vemos que la longitud está dada por la integral

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi/2.$$

Ejemplo. Hallar la longitud de la curva dada en coordenadas polares por $r = 1 - \cos\theta$ para $0 \le \theta \le \pi/4$.

Hacemos $f(\theta) = 1 - \cos\theta$. La fórmula da la longitud como

$$\begin{aligned}\ell_0^{\pi/4} &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\, d\theta.\end{aligned}$$

Hacer $\theta = 2u$. Recordando que la fórmula $1 - \cos 2u = 2\operatorname{sen}^2 u$, entonces

$$1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2).$$

Y así, la integral es

$$\begin{aligned}\ell_0^{\pi/4} &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)}\, d\theta. \\ &= 2\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \qquad (\text{ porque } \operatorname{sen}(\theta/2) \ge 0 \text{ si } 0 \le \theta \le \pi/4) \\ &= -4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = 4\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right].\end{aligned}$$

XII, §4. EJERCICIOS

1. Realizar los cálculos dando la longitud en coordenadas polares.
2. Hallar la longitud de un círculo de radio r.
3. Hallar la longitud de la curva $x = e^t\cos t$, $y = e^t\operatorname{sen} t$ entre $t = 1$ y $t = 2$.

4. Hallar la longitud de la curva $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$ (a) entre $t = 0$ y $t = \pi/4$ y (b) entre $t = 0$ y $t = \pi$.

Hallar la longitud de las curvas en el intervalo indicado.

5. $x = 2t + 1$, $y = t^2$, $0 \le t \le 2$

6. $x = 4 + 2t$, $y = \frac{1}{2}t^2 + 3$, $-2 \le t \le 2$

7. $x = 9t^2$, $y = 9t^3 - 3t$, $0 \le t \le 1/\sqrt{3}$

8. $x = 3t$, $y = 4t - 1$, $0 \le t \le 1$

9. $x = 1 - \cos t$, $y = t - \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$

10. $x = a(1 - \cos t)$, $y = a(t - \operatorname{sen} t)$, con $a > 0$, y $0 \le t \le \pi$.

11. Trazar la curva $r = e^\theta$ (en coordenadas polares), y también la curva $r = e^{-\theta}$.

12. Hallar la longitud de la curva $r = e^\theta$ entre $\theta = 1$ y $\theta = 2$.

13. En general, dar la longitud de la curva $r = e^\theta$ entre dos valores θ_1 y θ_2.

Hallar la longitud de las curvas siguientes dadas en coordenadas polares.

14. $r = 3\theta^2$ de $\theta = 1$ a $\theta = 2$

15. $r = e^{-4\theta}$, de $\theta = 1$ a $\theta = 2$

16. $r = 3\cos\theta$, de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/4$

17. $r = 2/\theta$ de $\theta = \frac{1}{2}$ a $\theta = 4$ [*Idea:* Usar $\theta = \operatorname{senh} t$.]

18. $r = 1 + \cos\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/4$

19. $r = 1 - \cos\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$

20. $r = \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$

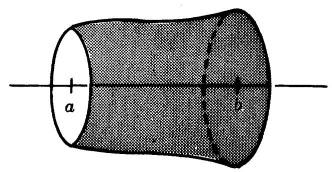
21. Hallar la longitud de un lazo de la curva $r = 1 + \cos\theta$

22. Igual, con $r = \cos\theta$, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

23. Hallar la longitud de la curva $r = 2/\cos\theta$ entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/3$.

XII, §5. SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Sea $y = f(x)$ una función continuamente diferenciable en un intervalo $[a, b]$. Queremos hallar una fórmula para el área de la superficie de revolución de la gráfica de f alrededor del eje x, según se ilustra en la figura.



Veremos que el área de la superficie está dada por la integral

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.}$$

La idea es aproximar la curva por medio de segmentos de recta, según se ilustró. Usamos una partición

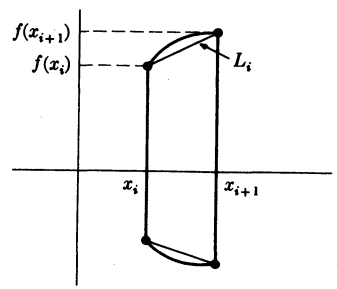
$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n = b.$$

En el intervalo pequeño $[x_i, x_{i+1}]$, la curva se aproxima mediante el segmento que une los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Sea L_i la longitud del segmento. Entonces

$$L_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$

La longitud de un círculo de radio y es $2\pi y$. Si rotamos el segmento de recta alrededor del eje x, entonces el área de la superficie de rotación estará entre

$$2\pi f(t_i) L_i \qquad \text{y} \qquad 2\pi f(s_i) L_i,$$



donde $f(t_i)$ y $f(s_i)$ son el mínimo y máximo de f, respectivamente, en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Esto se ilustra en la figura 1.

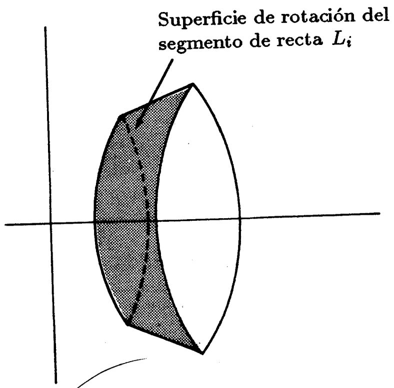


Figura 1

Por otro lado, por el teorema del valor medio, podemos escribir

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

para algún número c_i entre x_i y x_{i+1}. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L_i &= \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + f'(c_i)^2(x_{i+1} - x_i)^2} \\ &= \sqrt{1 + f'(c_i)^2}(x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Entonces la expresión

$$2\pi f(c_i)\sqrt{1 + f'(c_i)^2}(x_{i+1} - x_i)$$

es una aproximación de la superficie de revolución de la curva sobre el pequeño intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Ahora tomamos la suma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + f'(c_i)^2}(x_{i+1} - x_i).$$

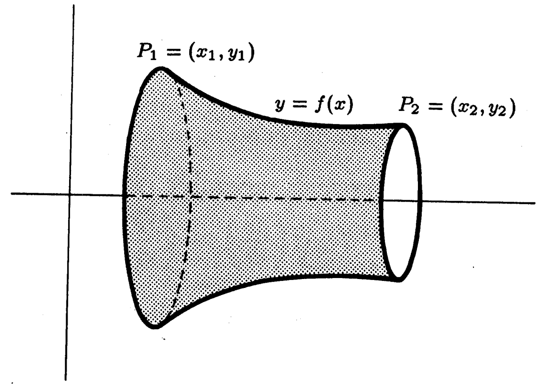
Ésta es una suma de Riemann, entre las sumas superior e inferior para la integral

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.}$$

Así, es razonable que el área de la superficie deba definirse por esta integral, como se quería mostrar.

Ejemplo físico. En la práctica sucede con frecuencia que se desea determinar un superficie de revolución minimal, obtenida al rotar una curva entre dos puntos dados $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ en el plano. A esto a veces se le llama el problema de la pompa de jabón. En efecto, dados dos anillos perpendiculares

al eje x, el problema es hallar una superficie de una pompa de jabón formada entre estos dos anillos.



La pompa de jabón será la superficie de revolución minimal. ¿Cuál es la ecuación de la curva $y = f(x)$? Resulta análoga a la del cable colgante, a saber,

$$y = b \cosh \frac{x - a}{b},$$

donde a y b son constantes que dependen de los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Aquí vemos otro uso de la función cosh.

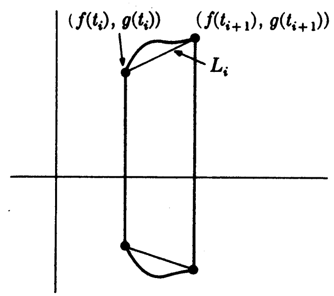
Área de revolución para curvas paramétricas

Como sucede con la longitud, también podemos tratar con curvas dadas en forma paramétrica. Supongamos que

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \le t \le b.$$

Tomamos una partición

$$a = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n = b.$$



Entonces la longitud L_i entre $(f(t_i), g(t_i))$ y $(f(t_{i+1}), g(t_{i+1}))$ está dada por

$$L_i = \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}$$
$$= \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2}(t_{i+1} - t_i),$$

donde c_i y d_i son números entre t_i y t_{i+1}. Por lo tanto,

$$2\pi g(c_i)\sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2}(t_{i+1} - t_i)$$

es una aproximación para la superficie de revolución de la curva en el pequeño intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. En consecuencia, es razonable que la superficie de revolución esté dada por la integral

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.}$$

Cuando $t = x$, ésta coincide con la fórmula hallada previamente. También es útil escribir esta fórmula simbólicamente

$$\boxed{S = \int 2\pi y\, ds,}$$

donde, simbólicamente, hemos usado

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Cuando se usa esta notación simbólica no se ponen límites de integración. Sólo cuando usamos el parámetro explícito t sobre un intervalo $a \le t \le b$, sí ponemos los valores a y b para t, abajo y arriba del signo de la integral. En este caso, el área de la superficie se escribe

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dt}\, dt.}$$

Ejemplo. Deseamos hallar el área de una esfera de radio $a > 0$. Es mejor contemplar la esfera como el área de revolución de un círculo de radio a y expresar el círculo en forma paramétrica,

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Entonces la fórmula produce:

$$S = \int_0^\pi 2\pi a \operatorname{sen}\theta \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta}\, d\theta$$
$$= \int_0^\pi 2\pi a^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$
$$= 2\pi a^2(-\cos\theta)\Big|_0^\pi$$
$$= 4\pi a^2.$$

Veamos ahora las superficies de revolución en términos de límites. Sea $y = f(x)$ una función positiva como la anterior, definida para todos los números positivos x. Sea:

V_B = volumen de revolución de la gráfica de f entre $x = 1$ y $x = B$;
S_B = área de revolución de la gráfica de f entre $x = 1$ y $x = B$.

Es un hecho, que usualmente resulta asombroso, que puede haber varios casos en que V_B tienda a un límite finito cuando $B \to \infty$ ¡mientras que S_B se vuelve arbitrariamente grande cuando $B \to \infty$!

Ejemplo. Sea $f(x) = 1/x$. Entonces, usando las fórmulas para volúmenes y superficies de revolución, hallamos:

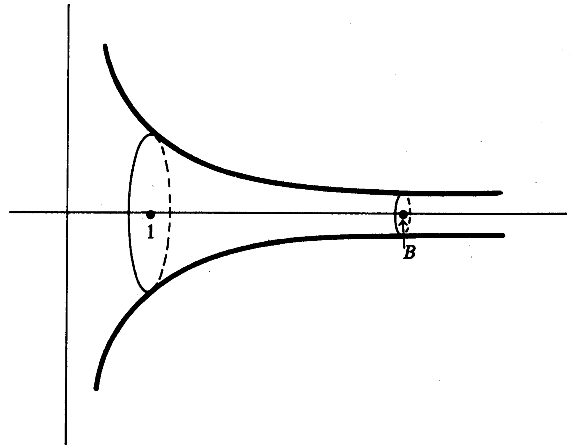
$$V_B = \int_1^B \frac{1}{x^2}\, dx = \pi\left(1 - \frac{1}{B}\right) \to \pi \qquad \text{cuando} \qquad B \to \infty.$$

$$S_B = \int_1^B 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Ahora bien, $f'(x)^2$ es un número positivo, de modo que la expresión bajo el signo de raíz cuadrada es ≥ 1. Entonces

$$S_B \ge 2\pi \int_1^B \frac{1}{x}\, dx = 2\pi \log B \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad B \to \infty.$$

Vemos aquí cómo el volumen tiende al límite finito π, mientras que la superficie de revolución se vuelve arbitrariamente grande.



En términos de una interpretación intuitiva, supongamos que se tiene una cubeta de pintura con π unidades cúbicas de pintura. Entonces es posible llenar el embudo dentro de la superficie de revolución con esta pintura. Pero, aunque parezca paradójico, no hay pintura suficiente para pintar la superficie de revolución, cuando $B \to \infty$. Esto muestra lo traicionera que puede ser la intuición.

XII, §5. EJERCICIOS

1. Hallar el área de la superficie obtenida al rotar la curva

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta$$

alrededor del eje x. [Trazar la curva. Hay alguna simetría. Determinar el intervalo apropiado de θ.]

2. Hallar el área de la superficie obtenida al rotar la curva $y = x^3$ alrededor del eje x, entre $x = 0$ y $x = 1$.

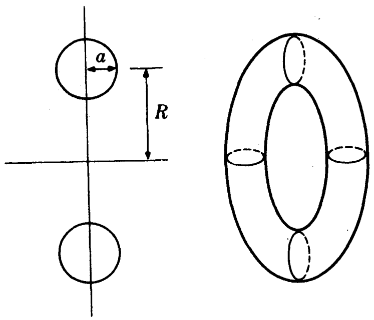
3. Hallar el área de la superficie obtenida al rotar la curva

$$x = \tfrac{1}{2}t^2 + t, \qquad y = t + 1$$

alrededor del eje x, de $t = 0$ a $t = 4$.

4. El círculo $x^2 + y^2 = a^2$ se rota alrededor de una recta tangente al círculo. Hallar el área de la superficie de rotación. [*Idea:* Formar unos ejes coordenados y una parametrización conveniente del círculo. Recordar cómo se ve la curva $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta$ en coordenadas polares. ¿Qué sucede si se rota esta curva alrededor del eje x?]

5. Un círculo como el que se muestra en la figura se rota alrededor del eje x para formar un toro (nombre elegante para la dona). ¿Cuál es el área del toro?



Sección transversal del toro   El toro

6. Hallar el área de la superficie obtenida al rotar un arco de la curva $y = x^{1/2}$ entre $(0,0)$ y $(4,2)$ alrededor del eje x.

XII, §6. TRABAJO

Supongan que una partícula se mueve sobre una curva y que la longitud de la curva se describe por una variable u.

Sea $f(u)$ una función. Interpretamos f como una fuerza que actúa sobre la partícula, en la dirección de la curva. Queremos hallar una expresión integral para el trabajo realizado por la fuerza entre dos puntos de la curva.

Cualquiera que resulte ser nuestra expresión, es razonable esperar que el trabajo realizado satisfaga las propiedades siguientes:

Si a, b y c son tres números, con $a \le b \le c$, entonces el trabajo realizado entre a y c es igual al trabajo realizado entre a y b más el trabajo realizado entre b y c. Si denotamos el trabajo realizado entre a y b por $W_a^b(f)$, entonces deberemos tener

$$W_a^c(f) = W_a^b(f) + W_b^c(f).$$

Más aún, si tenemos una fuerza constante M actuando sobre la partícula, es razonable esperar que el trabajo realizado entre a y b sea

$$M(b-a).$$

Finalmente, si g es una fuerza más poderosa que f, digamos que $f(u) \le g(u)$ sobre el intervalo $[a,b]$, entonces realizaremos más trabajo con g que con f, lo cual significa que

$$W_a^b(f) \le W_a^b(g).$$

En particular, si hay dos fuerzas constantes m y M tales que

$$m \le f(u) \le M$$

en todo el intervalo $[a,b]$, entonces

$$m(b-a) \le W_a^b(f) \le M(b-a).$$

Veremos más adelante que el trabajo realizado por la fuerza f entre una distancia a y una distancia b está dado por la integral

$$W_a^b(f) = \int_a^b f(u)\,du.$$

Si la partícula u objeto se mueve a lo largo de una recta, digamos a lo largo del eje x, entonces f está dada como función de x y nuestra integral es simplemente

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Más aún, si la longitud de la curva u está dada como función del tiempo t (como sucede en la práctica, ver la sección §3) vemos que la fuerza se vuelve una función de t por la regla de la cadena, a saber, $f(u(t))$. Así, entre los tiempos t_1 y t_2, el trabajo realizado es igual a

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} f(u(t))\,\frac{du}{dt}\,dt.}$$

Ésta es la expresión más práctica para el trabajo, pues las curvas y las fuerzas se expresan con mayor frecuencia como funciones del tiempo.

Veamos ahora por qué el trabajo realizado está dado por la integral. Sea P una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n = b.$$

Sea $f(t_i)$ un mínimo para f en el pequeño intervalo $[u_i, u_{i+1}]$, y sea $f(s_i)$ un máximo para f en este mismo pequeño intervalo. Entonces, el trabajo realizado por la partícula en movimiento desde la longitud u_i a u_{i+1} satisface las desigualdades

$$f(t_i)(u_{i+1} - u_i) \leq W_{u_i}^{u_{i+1}}(f) \leq f(s_i)(u_{i+1} - u_i).$$

Al sumar esto hallamos

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(u_{i+1} - u_i) \leq W_a^b(f) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(u_{i+1} - u_i).$$

Las expresiones a la izquierda y a la derecha son las sumas inferior y superior para la integral, respectivamente. Como la integral es el único número entre las sumas inferior y superior, se sigue que

$$\boxed{W_a^b(f) = \int_a^b f(u)\,du.}$$

Ejemplo. Hallar el trabajo realizado al estirar un resorte desde su posición natural hasta una longitud de 10 cm de largo. Se puede suponer que la fuerza necesaria para estirar el resorte es proporcional al incremento en la longitud.

Visualizamos el resorte como horizontal, sobre el eje x. Así, existe una constante K tal que la fuerza está dada por

$$f(x) = Kx.$$

Entonces el trabajo realizado es

$$\int_0^{10} Kx\,dx = \tfrac{1}{2}K \cdot 100$$
$$= 50K.$$

Ejemplo. Suponer que la gravedad es una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. ¿Cuál es el trabajo realizado al levantar un peso de 2 tons desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 161 km sobre la Tierra? Suponer que el radio de la Tierra es de 6437 km.

Por hipótesis, existe una constante C tal que la fuerza de gravedad está dada por $f(x) = C/(x + 6437)^2$, donde x denota la altura sobre la Tierra. Cuando $x = 0$, nuestra hipótesis es que

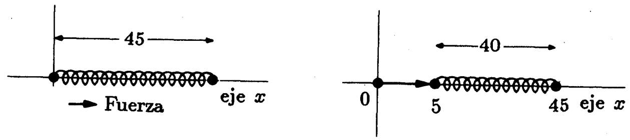
$$f(0) = 2\,\text{tons} = \frac{C}{(6450)^2}.$$

Por lo tanto, $C = 82.87 \times 10^6$ tons. El trabajo realizado es igual a la integral

$$\int_0^{100} f(x)\,dx = 32 \times 10^6 \left(-\frac{1}{(x + 6450)}\right)\Bigg|_0^{100}$$
$$= 32 \times 10^6 \left[\frac{1}{6450} - \frac{1}{6550}\right] \text{ton/km}.$$

XII, §6. EJERCICIOS

1. Un resorte tiene 45 cm de largo y se necesita una fuerza de 5 kg para mantener al resorte a una longitud de 40 cm. Si la fuerza está dada como $f(x) = kx$, donde k es una constante y x es el decrecimiento en la longitud, ¿cuál es la constante k? ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir el resorte de 40 cm a 30 cm?



(a) (b)

2. Suponiendo que la fuerza está dada como $k\,\text{sen}(\pi x/45)$, en el problema de la compresión del resorte, responder las dos preguntas del problema anterior para esta fuerza.
3. Una partícula atrae a otra partícula con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Sea C la constante de proporcionalidad. ¿Cuál es el trabajo realizado al mover la segunda partícula a lo largo de una recta, alejándola del origen, de una distancia r_1 a una distancia $r > r_1$ del origen?
4. En el ejercicio anterior, determinar si el trabajo tiende a un límite cuando r se vuelve muy grande, y hallar este límite si existe.
5. Dos partículas se repelen una a la otra con una fuerza inversamente proporcional al cubo de su distancia. Si una partícula está fija en el origen, ¿qué trabajo se realiza al mover la otra a lo largo del eje x de una distancia de 10 cm a una distancia de 1 cm hacia el origen?
6. Suponiendo, como es usual, que la gravedad es una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra, ¿cuál es el trabajo realizado al levantar un peso de 453.5 kg desde la superficie de la Tierra a una altura de 6437 km sobre la superficie? (Suponer que el radio de la Tierra es de 6437 km.)

7. Una barra de metal tiene longitud L y sección transversal S. Si se estira en x unidades, entonces la fuerza $f(x)$ requerida está dada por

$$f(x) = \frac{ES}{L} x$$

donde E es una constante. Si una barra de 30 cm de sección transversal uniforme de 10 cm^2 se estira en 25 cm, hallar el trabajo realizado (en términos de E).

8. Una partícula de masa M gramos en el origen atrae una partícula de masa m gramos en un punto a x cm del eje x con una fuerza de CmM/x^2 dinas, donde C es una constante. Hallar el trabajo realizado por la fuerza
(a) cuando m se mueve de $x = 1/100$ a $x = 1/10$;
(b) cuando m se mueve de $x = 1$ a $x = 1/10$.

9. Una unidad de carga positiva de electricidad en 0 repele a una carga positiva de cantidad c con una fuerza de c/r^2, donde r es la distancia entre las partículas. Hallar el trabajo realizado por esta fuerza cuando la carga c se mueve a lo largo de una recta que pasa por 0 desde una distancia r_1 hasta una distancia r_2 de 0.

10. Hay aire confinado en una cámara cilíndrica ajustada con un pistón. Si el volumen del aire a una presión de 20 lib/pulg^2 es de 75 pulg^3, hallar el trabajo realizado sobre el pistón cuando el aire se expande al doble de su volumen original. Usar la ley

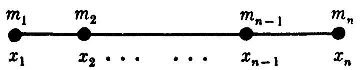
Presión · Volumen = Constante.

XII, §7. MOMENTOS Y CENTRO DE GRAVEDAD

Suponer que tenemos masas $m_1, \ldots, m_n$ y puntos $x_1, \ldots, x_n$ sobre el eje x. El **momento** total de estas masa se define como

$$m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

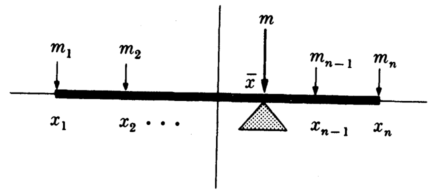
Podemos considerar que estas masas están distribuidas en alguna varilla de densidad uniforme, como se muestra en la figura.



La masa total es

$$m = m_1 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Deseamos hallar el punto de la varilla tal que, si balanceamos la varilla en ese punto, no se moverá hacia arriba ni hacia abajo. Llamar a este punto $\bar{x}$.



Entonces $\bar{x}$ es un punto tal que, si la masa total m se coloca en $\bar{x}$, tendrá el mismo efecto de balanceo que las otras masas m_i en x_i. La ecuación para esta condición es que

$$m\bar{x} = m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Así, podemos despejar $\bar{x}$ y obtener

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.}$$

Este punto $\bar{x}$ se llama **centro de gravedad,** o **centro de masa** de las masas $m_1, \ldots, m_n$.

Ejemplo. Sea $m_1 = 4$ en el punto $x_1 = -3$ y sea $m_2 = 7$ en el punto $x_2 = 2$. Entonces la masa total es

$$m = 4 + 7 = 11$$

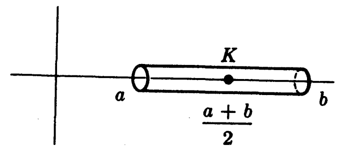
y el momento es

$$4 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 2.$$

Por lo tanto, el centro de gravedad está en el punto

$$\bar{x} = 2/11.$$

Supongamos ahora que tenemos una varilla delgada, colocada a lo largo del eje x en un intervalo $[a, b]$, como en la figura. Considerar que la varilla tiene densidad constante (uniforme) K.



La longitud de la varilla es $(b - a)$. La masa total de la varilla es entonces la densidad por la longitud, a saber

$$\text{masa} = K(b - a).$$

Es razonable definir el momento de la varilla como igual al de la masa total colocada en el centro de la varilla. Este centro tiene coordenadas en el punto medio del intervalo, a saber

$$\frac{a+b}{2}.$$

Por lo tanto, el **momento** de la varilla es

$$M_a^b = K\frac{(a+b)}{2}(b-a).$$

A continuación, suponer que la densidad de la varilla no es constante, pero varía continuamente, de manera que puede representarse mediante una función $f(x)$. Tratamos de hallar una aproximación de lo que entendemos por el momento de la varilla. Así tomamos una partición del intervalo $[a,b]$,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

En cada intervalo pequeño $[x_i, x_{i+1}]$ la densidad no variará mucho, y entonces una aproximación para el momento de la pieza de varilla a lo largo de este intervalo está dada por

$$f(c_i)c_i(x_{i+1} + x_i)$$

donde

$$c_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

es el punto medio de este pequeño intervalo. Sea

$$G(x) = xf(x).$$

Al tomar la suma de las aproximaciones anteriores se tiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)c_i(x_{i+1} - x_i)$$

que es una suma de Riemann para la integral

$$\int_a^b G(x)\,dx = \int_a^b xf(x)\,dx.$$

En consecuencia, es natural definir el **momento** de la varilla con densidad variable como la integral

$$\boxed{M_a^b(f) = \int_a^b xf(x)\,dx.}$$

Sea $\bar{x}$ la coordenada del centro de gravedad de la varilla. Esto significa que, si la masa de la varilla se coloca en $\bar{x}$, entonces tiene el mismo momento que la varilla misma y equivale a la ecuación

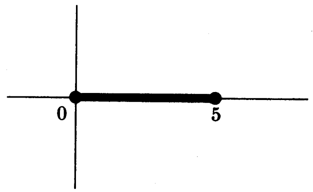
$$\bar{x}\cdot \text{masa total de la varilla} = \int_a^b xf(x)\,dx.$$

Por lo tanto, obtenemos una expresión para el centro de gravedad, a saber,

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.}$$

Ejemplo. Suponer que una varilla de 5 cm de longitud tiene densidad proporcional a la distancia desde un extremo. Hallar el centro de gravedad de la varilla.

Suponemos que la varilla está tendida de manera que un extremo está en el origen, como se muestra en la figura.



La hipótesis acerca de la densidad significa que existe una constante C tal que la densidad está dada por la función

$$f(x) = Cx.$$

(i) La masa total es

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 Cx\,dx = \frac{25C}{2}.$$

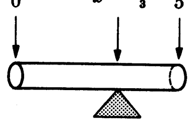
(ii) El momento es

$$\int_0^5 xf(x)\,dx = \int_0^5 Cx^2\,dx = \frac{125C}{3}.$$

Entonces

$$\bar{x} = \frac{125C/3}{25C/2} = \frac{10}{3}.$$

Este centro de gravedad es tal que, si balanceamos la varilla en una punta aguda en el punto $\bar{x}$, entonces la varilla no se inclinará hacia ningún lado.



Se puede realizar un análisis similar en espacios de dimensión superior para áreas planas y volúmenes sólidos. Para esto es mejor esperar hasta que hallamos estudiado integrales dobles y triples en dos o tres variables, en el curso siguiente.

XII, §7. EJERCICIOS

1. Suponer que la densidad de una varilla es proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen; la varilla mide 10 cm de largo, y está tendida a lo largo del eje x entre 5 y 15 cm del origen. Hallar su centro de gravedad.
2. Igual que en el ejercicio 1, pero suponer que la varilla tiene densidad constante C.
3. Igual que en el ejercicio 1, pero suponer que la densidad de la varilla es inversamente proporcional a la distancia al origen.

Parte cuatro

Fórmula de Taylor y series

En esta parte estudiamos la aproximación de funciones mediante ciertas sumas llamadas series. El capítulo sobre la fórmula de Taylor muestra cómo aproximar funciones mediante polinomios y cómo estimar el término de error para ver la calidad de la aproximación que podemos obtener.

Nótese que la deducción de la fórmula de Taylor es una aplicación de la integración por partes.