Resolución del Parcial ①

1) Las matrices $A_{n \times m}$ y $B_{k \times L}$ serán conformables si $m = k$, es decir la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B.

2) Det [A]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$= 1.0.3 + -2.-1.1 + 1.2.1$

$0 + 2 + 2 = 4$

$1.0.1 + 1.-1.1 + 3.2.-2$

$= 0 - 1 - 12 = -13$

$4 - -13 = \underline{\underline{17}}$

$\text{Det}[A] = 17$

$$\Rightarrow A^{-1} : \frac{1}{\text{Det}[A]} [\text{Cof}(A)]^t =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0 - -1] = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)[-6-1] = 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [2-0] = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \, [6 - -1] = -7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3-1) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \, [-1-2] = 3$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(2-0) = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1\,[1 - -2] = -3$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 1.(0 - -4) = 4$

$$\text{Cof } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -7 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Cof}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 7 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/17 & -7/17 & 2/17 \\ 7/17 & 2/17 & -3/17 \\ 2/17 & 3/17 & 4/17 \end{pmatrix}$$

2) $(A \times B)^t =$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1.1+2.1+1.1 & 1.2+2.1+1.2 & 1.3+2.1+1.3 \\ -2.1+0.1+1.1 & -2.2+0.1+1.2 & -2.3+0.1+1.3 \\ 1.1-1.1+1.3 & 1.2-1.1+3.2 & 1.3-1.1+3.3 \end{pmatrix}}_{A \times B}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(A \times B)^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 6 & -2 & 7 \\ 8 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

3) Det (B) dado que B tiene dos filas iguales $\underline{\text{Det}[B] = 0}$

$\Rightarrow$ como el det (B) = 0 no existe su inversa B^{-1}

4) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + kz = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & k & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & k & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k-3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 3F_1} \quad \overset{F_3 - F_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k-3-2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k-5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{si } k = 5 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

sistema compatible indeterminado

$x + y + z = 0$ acepta $x = y = z = 0$ pero
$y + 2z = 0$ también otras soluciones por (∞) por que es indeterminado.

$y = -2z \quad x - 2z + 2z = 0$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -2z \\ z &= z \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \quad \text{Ej} \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

es solución.

si $k \neq 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k-5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow (k-5) \cdot z = 0$$

$$z = \frac{0}{k-5} \quad (k \neq 5 \Rightarrow k-5 \neq 0)$$

$$\boxed{z=0}$$

$y + 2z = 0$

$y + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

si $k \neq 5$ solo acepta la solución trivial

$x + \underset{=0}{y} + \underset{=0}{z} = 0$

$\boxed{x=0}$

$\Rightarrow k = 5$ para que tenga otras soluciones no triviales.

5) tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones:

$\Rightarrow$ solución de un sistema de ec: es un conjunto ordenado de números $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ que si se sustituye $x = \alpha_1$, ~~x~~ $x_2 = \alpha_2$ ..., $x_n = \alpha_n$ se verifican simultaneamente las ecuaciones.

- si el número de soluciones es 1 el sistema es compatible determinado, al escalerizar la matriz voy a obtener una matriz escalerizada usual

- si el número de soluciones es mayor a 1 el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones) Al escalerizar la matriz ampliada voy a obtener una fila de ceros o de entrada tengo menos ecuaciones que incognitas

- Si el número de soluciones es 0 el sistema es incompatible (no tiene solución)

Al escalonar la matriz ampliada voy a obtener una fila que tiene 0 del lado de las variables y un número del lado del término independiente

Ej
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow 0x + 0y + 0z = 3$$

↳ no tiene sentido

Ejercicio 2:

1) Dado un punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ y dos vectores directores $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$; $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$

se obtiene $\pi : A + \lambda \bar{v} + \mu \bar{w}$ con λ y μ números reales

- Dados 3 puntos A, B, C puede escribirse

$\bar{v} : (B - A)$ $\quad\quad$ $\bar{w} : (C - A)$

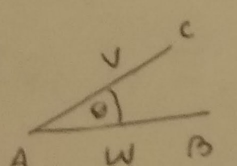
y construir con $A, \bar{v}, \bar{w}$ la ec ~~explícita~~ paramétrica del plano

$$\pi : A + \lambda (\overline{B - A}) + \mu (\overline{C - A})$$

2) Producto escalar

Dados dos vectores $\bar{w}$ y $\bar{v}$ de $\mathbb{R}^n$ llamaremos producto escalar de $\bar{w}$ por $\bar{v}$ al número $\|w\| \|v\| \cos\theta$

Con



$\bar{w} = \overline{AB}$

$\bar{v} = \overline{AC}$

θ el ángulo encerrado $B\hat{A}C$

3) $N = (3, -2, 6)$ $\quad$ $P = (1, 1, 0)$

$\Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$ $\quad$ (A, B, C) vector normal

$3x - 2y + 6z + D = 0$ $\quad$ si el plano incluye al punto $(1, 1, 0)$

$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + D = 0$

$$3 - 2 + 0 + D = 0$$
$$1 + D = 0$$
$$D = -1$$
$$\Rightarrow 3x - 2y + 6z - 1 = 0$$
$$3x - 2y + 6z = 1$$

4) recordando $\langle u, v\rangle = \|u\| \, \|v\| \cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} =$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\langle (1,2,3), (0,1,1)\rangle}{\|(1,2,3)\| \, \|(0,1,1)\|}$$

$$\langle (1,2,3), (0,1,1)\rangle = 1.0 + 2.1 + 3.1 = 5$$

$$\|(1,2,3)\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|(0,1,1)\| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{2}\,\underbrace{\sqrt{14}}_{\sqrt{2.7}}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

5) Desigualdad Triangular

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\|u+v\| = \|(1,2,3) + (0,1,1)\| = \|(1,3,4)\| = \sqrt{1^2+3^2+4^2}$$
$$= \sqrt{26}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|u\| = \sqrt{14} \\ \|v\| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \text{(ejercicio anterior)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{26} \leq \sqrt{14} + \sqrt{2}$$

Ejercicio 3

Dado el espacio vectorial $\{V, \mathbb{R}, +, \cdot\}$, sea S un subconjunto no vacío de de V, diremos que S es subespacio si se cumple.

1) $s_1 + s_2 \in S$ con $s_1, s_2 \in S$ (cerrado en la suma)

2) $\lambda s_i \in S$ con $s_i \in S$ $\lambda \in K$ (cerrado en el producto)

(*) al final se prueba que el plano que pasa por origen es subespacio

2) A conjunto de vectores $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

Combinacion Lineal:

dados los vectores $V_1, V_2, V_3 \ldots V_n$

Decimos que $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots \alpha_n V_n$ es una combinación Lineal de los mismos.

Conjunto generador

Decimos que A es el conjunto generador de S si cualquier elemento de S es combinación lineal de los elementos de A. $\Rightarrow A \xrightarrow{g} S$.

3) $A \{(4,2,1,1), (8,4,2,2), (0,2,1,0)\}$

Si $(0,1,2,3)$ puede escribirse como CL de los vectores de A $\Rightarrow$ existirán $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que

$$\alpha_1 (4,2,1,1) + \alpha_2 (8,4,2,2) + \alpha_3 (0,2,1,0) =$$

$$= (0,1,2,3)$$ $\Rightarrow$ esto define un sistema de ecuaciones para hallar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1\alpha_3 = 2 \\ 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{1/4\,F_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{F_2-2F_1}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{F_3-F_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{F_4-F_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

sistema incompatible $\Rightarrow$ no existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que $(0,1,2,3)$ es combinación lineal de los vectores de A.

Ej 3

1) comprobar: Plano que pasa por el origen es subespacio de $\mathbb{R}^3$

$\pi = ax + by + cz = 0$

suma de dos puntos $\in \pi$?

$$P_1 + P_2 = \underbrace{a x_1 + b y_1 + c z_1}_{=0} + \underbrace{a x_2 + b y_2 + c z_2}_{=0} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{sí}}}$$

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = 0 \quad \hookrightarrow P_1 + P_2 \in \pi$$

$\lambda P_1 \in \pi$? siendo $a x_1 + b y_1 + c z_1 = 0$

$$\lambda (x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

Pregunto si $a \lambda x_1 + b \lambda y_1 + c \lambda z_1 \stackrel{?}{=} 0$

$$\lambda (\underbrace{a x_1 + b y_1 + c z_1}_{0}) \stackrel{?}{=} 0$$

$\lambda 0 = 0$ ✓ $\underline{\underline{\text{sí}}} \Rightarrow \lambda P_1 \in \pi$

Compruebo que $\pi \neq \phi$ o que $(0,0,0) \in \pi$. $\underline{\underline{\text{sí}}}$