

---

## Primer parcial

13/15/2022

---

El examen tiene una duración de 3 horas y un total de 50 puntos. No se puede utilizar ni material ni calculadora. Se deben justificar formalmente todas las respuestas. Éxitos!

### Ejercicio 1 (35%)

Considerar las siguientes matrices:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- 1.) Halle (si se puede y justifique sino) la suma y multiplicación entre M y N. ¿qué dimensiones tienen los resultados, en caso de poder hacerse?
- 2.) Dada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times m}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Probar que  $\det(\lambda A) = \lambda^m \det(A)$ . Justificar cada paso.
- 3.) Halle para qué valores de  $a$  la matriz P tiene determinante igual a 1. Halle también para qué valores de  $a$  no existe la inversa de P.
- 4.) ¿Qué tipos de soluciones puede tener un sistema de ecuaciones? Enunciarlas y explicarlas.
- 5.) Decir qué tipo de sistema es según  $k \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (k - 5)z = k \end{cases}$$

### Ejercicio 2 (35%)

Sea el punto  $P_1 = (1, 1, 1)$  y el vector director  $\vec{v}_1 = (2, 4, -1)$ .

- 1.) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de  $r_1$  , la recta definida por  $P_1$  y  $\vec{v}_1$ . ¿El punto  $Q = (5, 9, -1)$  pertenece a  $r_1$ )?
- 2.) Hallar posición relativa entre  $r_1$  y  $r_2$  definida por el punto  $P_2 = (3, 1, 0)$  y el vector director  $\vec{v}_2 = (4, 8, -2)$ .
- 3.) Definir producto escalar para  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  y  $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ .
- 4.) Hallar el producto escalar entre  $\vec{v}_1$  y  $\vec{w} = (2, -1, 0)$ . ¿Cómo es el ángulo entre los vectores?
- 5.) Hallar las ecuaciones paramétricas y reducidas del plano  $\pi_1$  definido por  $P_1$ ,  $\vec{v}_1$  y  $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ . ¿El punto  $R = (3, -1, 2)$  pertenece a  $\pi_1$ )?
- 6.) La intersección entre  $\pi_1$  y  $\pi_2 : x - y + z = 2$  es una recta  $t$ ), hallar sus ecuaciones paramétricas.

**Ejercicio 3 (30%)**

- 1.) Dado un espacio vectorial  $\{V, \mathbb{K}, +, \cdot\}$ , definir subespacio vectorial.
- 2.) Sea  $S = \{(x, y, z) : ax + by + cz = 0\}$  mostrar por qué es subespacio vectorial de  $\{\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot\}$ .
- 3.) Dado el conjunto de vectores  $U = v_1, v_2, \dots, v_n$ . ¿Cuál es la condición para que este sea linealmente independiente?
- 4.) Dado el conjunto de vectores

$$U = \{(1, 0, 0), (3, 2, 2), (-2, 2, 1)\}$$

¿Es base de  $\mathbb{R}^3$ ? Justificar. En caso afirmativo, mostrar.