Ejercicio 1 Entregable 1 2021 M2 (1)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ conviene por fila 2 por que tiene muchos 0s.

$\Rightarrow 1.(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ (los que tienen 0 podria ni escribirlo)

$\Rightarrow -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1.1 - 2.1) = \boxed{1}$

1) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $|A^t| = |A| = 1$

$|A^3| = |A|^3 = 1$

↳ prop distributiva $|A.A.A| = |A||A||A|$

2) $A - A^t$ es antisimetrica

$A^t = -A$

$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A$

$\Rightarrow \underbrace{(A - A^t)}_{B}{}^t = -\underbrace{(A - A^t)}_{B} \Rightarrow$ antisimetrica

$B^t = -B$

3) Sea A matriz $\in M_{n \times n}$
Diremos que A es invertible $\rightarrow \exists B$ matriz $M_{n \times n}$
$A . B = I_{n \times n}$ y $B . A = I_{n \times n}$ [Apunte 2]
· Para que una matriz sea invertible su determinante debe ser $\neq 0$

La inversa de una matriz es única, es decir dada A con $|A| \neq 0$ (invertible) existe solo 1 matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_{n \times n}$

$\Rightarrow$ no pueden existir dos matrices inversas.

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } 11 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Adj } 12 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Adj } 22 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \text{Adj } 13 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{adj } 23 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \underbrace{\text{Adj } 21}_{\text{Cof } 21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{adj } 31 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Adj } 32 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Adj } 33 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{cof})^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{(\text{cof}(A))^T}{|A|} =$$

Con Adj me refiero a los cofactores

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Hacer las multip]

4) $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ②

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 1 \quad y = 1 \quad z = -1$

verifico
$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}} \checkmark$$

5) $\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&0\\1&1&3\\4&1&1\end{array}\right) F_1 - F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}\boxed{1}&-2&-3\\1&1&3\\4&1&1\end{array}\right) \Rightarrow F_2 - F_1$

$\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&-3\\\boxed{0}&3&0\\4&1&1\end{array}\right) \Rightarrow F_3 - 4F_1 \quad \left(\begin{array}{cc|c}1&-2&-3\\0&3&0\\\boxed{0}&9&13\end{array}\right) F_2/3 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&-2&-3\\0&1&0\\0&9&13\end{array}\right) F_1 + 2F_2$

$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-3\\0&1&0\\0&9&13\end{array}\right) \quad F_3 - 9F_2 = \left(\begin{array}{cc|c}1&0&-3\\0&1&0\\\hline 0&0&13\end{array}\right) \Rightarrow$ Absurdo

no tiene solucion.

6) Combinación lineal: Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal de $x_1, x_2 \dots x_n$ si $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que $\underline{X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots \lambda_n x_n}$

$x = (5, -6, 4, 1)$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$ escalonar y obtener $\lambda_1, \lambda_2\ \lambda_3$ si es posible si no es posible no es CL

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -3 \end{array}$$ $\rightarrow$ se puede y estos son los coef.

<u>Verifico</u>: $$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

7) Un conjunto es $A = \{x_1, x_2, \dots x_m\} \in \mathbb{R}^n$ se dice LD (linealmente dependiente) si $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ no todos nulos

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots \lambda_n x_n = 0$$

se dice LI (linealmente independiente) si $\exists\ \lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots \lambda_m x_m = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$ resuelvo "colgando" los vectores

$$F_1+F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right) F_2-F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right) F_3-F_1 \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & 0 \end{array}\right) F_1-F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & 0 \end{array}\right) F_2+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-2 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & 0 \end{array}\right) F_3-F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ Siempre son LI no importa k

8) $P = (1, 2, a)$ $\quad \vec{v} = (2, 1, 3)$

Param: $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 1\lambda + 2 \\ z = 3\lambda + a \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{x-1}{2} = \lambda$, $\quad y-2 = \lambda$, $\quad \dfrac{z-a}{3} = \lambda$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-a}{3} \quad \text{(reducida)}$$

9) Probar que las rectas son $\perp$: calculo vector director de c/ recta

$$r = \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 & \rightarrow n_1 = (2, 1, 2) \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 & \rightarrow n_2 = (2, -2, -1) \end{cases}$$

(haciendo el producto vectorial de los normales)

$$n_1 \wedge n_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 3i + 6j - 6k \rightarrow (3, 6, -6) = \vec{v}_1$$

$$Q \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 & \rightarrow n_1 = (1, 1, -3) \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 & \quad n_2 = (2, -1, -9) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -9 \end{pmatrix} = -12i + 3j - 3k = (-12, 3, -3) = \bar{n}_2$$

$\Rightarrow$ si n_1 y n_2 son $\perp$ $\quad \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$

$$(3, 6, -6)(-12, 3, -3) = 3 \cdot -12 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 0 \checkmark$$

10) Producto vectorial = Es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Se denota como $v \wedge w$

- $\|v \wedge w\| = \|v\| \, \|w\| \sin\theta$
- $(v \wedge w) = 0$; $(v \wedge w) \cdot w = 0$
- Si $v, w \neq 0$ se cumple regla de la mano derecha.

Para hallar un vector $\perp$ a $\bar{u}$ y $\bar{n}$ $\rightarrow$ producto vectorial

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 0i + 3j + 1k = (0, 3, 1) = \bar{w}$$

Para verificar $\bar{u} \cdot \bar{w} = \bar{n} \cdot \bar{w} = 0$ (prod escalar)

$\bar{u} \cdot \bar{w} = (-1, 0, 0)(0, 3, 1) = 0 \checkmark \Rightarrow \bar{u} \perp \bar{w}$

$\bar{n} \cdot \bar{w} = (1, -1, 3)(0, 3, 1) = 0 \checkmark \Rightarrow \bar{n} \perp \bar{w}$