2. Problemas lineales

En este apartado presentamos varios aspectos relacionados con los problemas lineales. Estudiaremos la manera de pasar de un problema no lineal a uno lineal en algunos casos particulares; veremos los fundamentos matemáticos en que se basa el tratamiento de este tipo de problemas e introduciremos algunos de los algoritmos más frecuentes asociados a éstos.

2.1. Optimización matemática: conceptos elementales

En este subapartado ofrecemos una serie de resultados e ideas básicas de la teoría de la optimización matemática clásica. Con eso queremos sustentar con un cierto grado de rigor los diferentes aspectos referentes a la programación lineal que presentamos.

1) Problema de optimización matemática

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y f una función real con dominio en A, es decir: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Llamamos **problema de optimización matemática** a todo problema que responda a la formulación siguiente:

$$\underset{\mathbf{X}}{[\text{OPT}]}\ f(\mathbf{X}) \tag{1}$$

$$\text{s.a}$$

$$\mathbf{X} \in B,\ B \subseteq A.$$

La expresión s.a quiere decir 'sujeto a:'.

El conjunto B se suele denominar **conjunto de restricciones del problema**, mientras que el vector X se llama **óptimo del problema** o, sencillamente, **punto óptimo**, donde tenemos que:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La condición anterior, a efectos operativos, se suele formular mediante un conjunto de restricciones, algunas de las cuales se presentarán en forma de igualdad y otras en forma de desigualdad, según la naturaleza del problema. Así pues, tendremos:

Nota

De ahora en adelante no identificaremos las variables sobre las que optimizamos porque en esta asignatura optimizamos siempre sobre todas las variables del problema. Conviene darse cuenta, sin embargo, de que puede haber situaciones en las cuales no optimicemos sobre todas las variables.

$$\underset{\mathbf{X}}{[\text{OPT]}}\ f(\mathbf{X}) \qquad\qquad \underset{x_1,x_2,\ldots,x_n}{[\text{OPT}]}\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$\text{s.a} \qquad\qquad \text{s.a}$$

$$\begin{aligned}
h_i(\mathbf{X}) &= 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m_1\}, & h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m_1\},\\
g_j(\mathbf{X}) &\leq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m_2\}, & g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m_2\},\\
k_s(\mathbf{X}) &\geq 0 \quad \forall s \in \{1, \ldots, m_3\}, & k_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0 \quad \forall s \in \{1, \ldots, m_3\},
\end{aligned}$$

que significa que se busca el vector X que optimiza una función de n variables sujeta a m_1 restricciones de igualdad (=), m_2 restricciones de desigualdad menor o igual (≤) y m_3 restricciones de desigualdad superior o igual (≥).

Tipos de restricciones

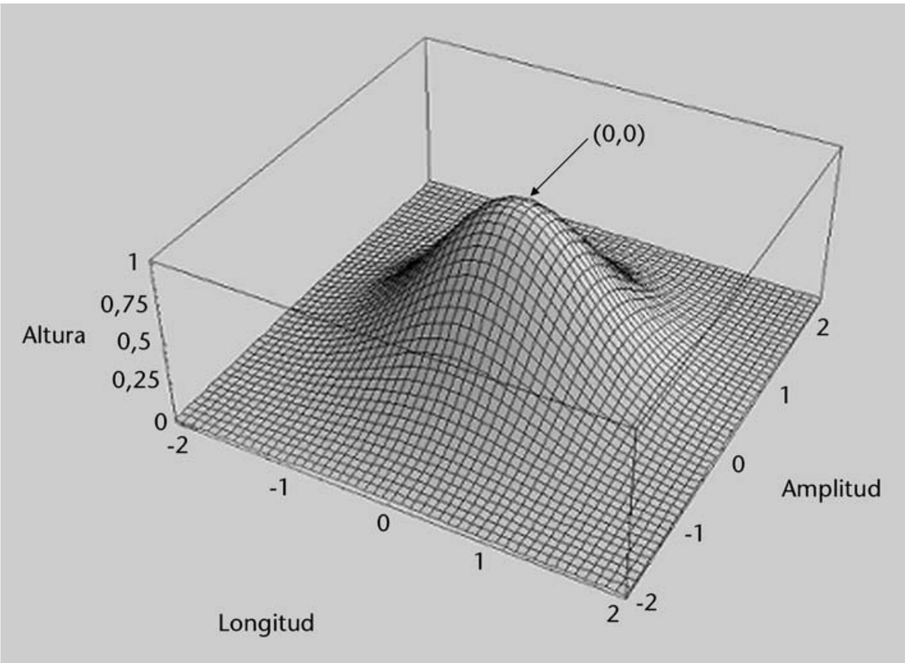
Las restricciones de un problema de optimización se pueden dar en forma de igualdad y/o de desigualdad.

2) Puntos óptimos

Los puntos óptimos se clasifican de la manera siguiente:

a) Óptimos globales: diremos que $X^* \in B$ es un **máximo (mínimo) global del problema de optimización** si $\forall X \in B$, $f(X^*) \geq f(X)$ ($f(X^*) \leq f(X)$ Si la desigualdad es estricta hablaremos de **óptimo global estricto** (máximo o mínimo), y, en caso contrario, de **óptimo global relativo** (máximo o mínimo).

Ilustramos el concepto de óptimo global mediante el gráfico siguiente, correspondiente a la función $f(x,y) = \exp[-(x^2 + y^2)]$, que alcanza un máximo global estricto no restringido (si la función no está sometida a ninguna restricción) en el punto (0,0):



b) Óptimos locales: diremos que X* es un **máximo (mínimo) local de un problema de optimización** si $\exists \varepsilon > 0$, $\forall X \in B$, $\|X^* - X\| < \varepsilon$, $X^* - X \neq 0$, se tiene $f(X^*) \geq f(X)$ ($f(X^*) \leq f(X)$ (en caso de mínimo) siendo $\| \;\; \|$ la norma euclidiana. Si la desigualdad es estricta, hablaremos de **óptimo local estricto** (máximo o mínimo), y, en caso contrario, de **óptimo local relativo** (máximo o mínimo).

Norma euclidiana

Recordad de otros cursos de matemáticas que sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se define la norma euclidiana de la manera siguiente:

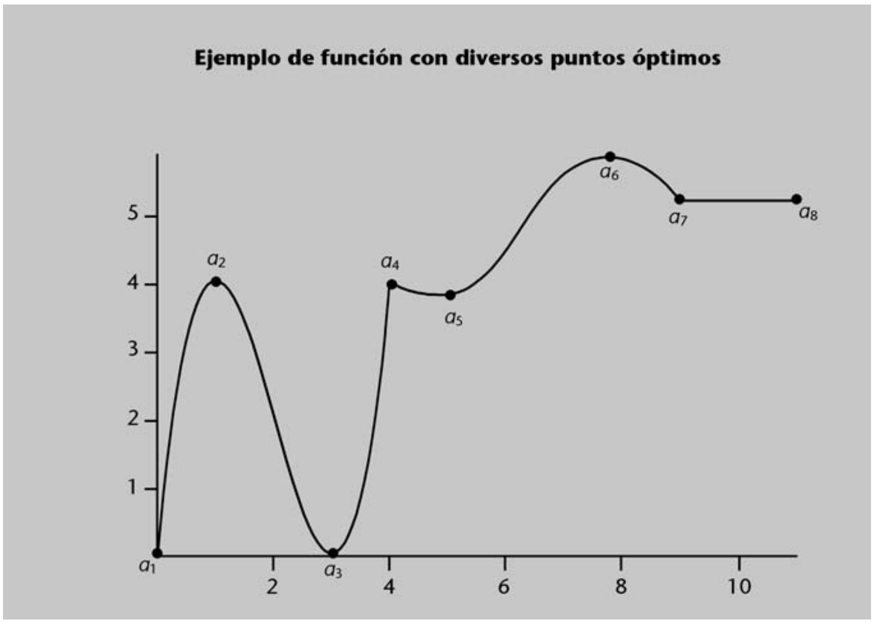
$$\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n, \| \mathbf{A} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Ejemplo de puntos óptimos de una función

Consideremos la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-3)^2 & \text{si } x \leq 4 \\ \sin(x) - \sin(4) + 4 & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \\ \sin(9) - \sin(4) + 4 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}$$

Si representamos gráficamente esta función en el intervalo [0,11], podemos observar que tiene diferentes puntos óptimos:



Los tipos de puntos óptimos que se observan son los siguientes:

- Mínimos globales referentes a a_1 y a_3 (a_1 es relativo, ya que hay otro punto, en este caso a_3, para el cual la función alcanza el mismo valor, y viceversa).
- Máximos locales referentes a a_2 y a_4 (son locales porque la función, en otros puntos del intervalo considerado, alcanza valores superiores).
- Mínimo local estricto en a a_5.
- Máximo global estricto en a_6 (dado que es el punto donde, a lo largo del intervalo considerado, la función alcanza un valor más alto).
- Mínimos locales referentes al intervalo $[a_7,a_8]$ (observad que también es correcto afirmar que los puntos del intervalo $[a_7,a_8]$ corresponden a máximos locales relativos).

3) Puntos estacionarios

Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, con $f(\mathrm{X})$ continua y con derivadas parciales también continuas (es decir, de clase C^1); en este caso diremos que X^0 es un **punto estacionario** (también conocido como **punto crítico**) si pertenece al interior de A y su gradiente verifica $\nabla f(\mathrm{X}^0) = 0$, es decir, se verifica la relación que presentamos a continuación:

$$\left.\frac{\partial f(\mathrm{X})}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{X}=\mathrm{X}^0} = 0; \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Puntos estacionarios

Recordad que los puntos estacionarios son aquellos para los cuales las derivadas parciales de la función se anulan, es decir, satisfacen las denominadas *condiciones de primer orden* o C^1.

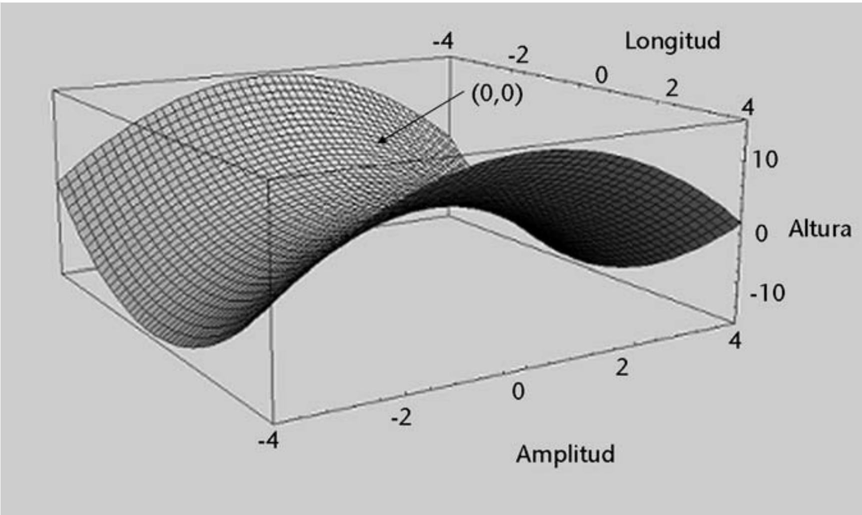
Teorema: sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, con $f(\mathrm{X})$ de clase C^1; entonces, si $\mathbf{X}^*$ es un óptimo local de esta función y pertenece al interior de este conjunto, también será un punto estacionario.

Este teorema tiene una especial relevancia para la caracterización analítica de los óptimos locales de funciones de clase C^1 (muy frecuentes en las aplicaciones económicas), aunque presenta los inconvenientes que mencionamos a continuación:

- No aporta ninguna información sobre la globalidad de este óptimo (que se puede encontrar tanto en los puntos interiores de A que son estacionarios como en los puntos que forman parte de la frontera de A).

- Una función puede no tener puntos estacionarios (por el hecho de que no sea diferenciable) y, sin embargo, tener un óptimo global.

- Puede haber puntos estacionarios que no sean óptimos locales (conocidos como **puntos de silla**, en un entorno cualquiera de los mismos hay puntos en los que la función toma valores superiores y otros en los cuales toma valores inferiores), tal como lo ilustra el gráfico de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$, con un punto de silla en (0,0):



A pesar de las dificultades anteriores, se pueden derivar condiciones de existencia del óptimo global de una función en ciertas condiciones, como lo ponen de relieve el teorema de Weierstrass y el teorema fundamental de la convexidad, que analizamos a continuación:

a) **Teorema de Weierstrass:** sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, con $f(\mathbf{X})$ continua sobre A, y A un conjunto compacto. En este caso la función tiene un máximo y un mínimo globales en A.

Conjunto compacto

Recordad de las asignaturas de matemáticas que los conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos cerrados y acotados.

Como veremos más adelante, en el caso de la programación lineal, el conjunto de restricciones siempre será un conjunto cerrado.

Si además se da el caso de que es acotado, la existencia de óptimos globales está garantizada por aplicación directa del teorema anterior. Y todavía más, si no es acotado, será muy sencillo discernir si está el óptimo global o no lo está.

Consultad el subapartado 4.6 de este módulo didáctico.

Finalmente, si tenemos en cuenta la equivalencia siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}[\text{OPT}]\ f(\text{X})\\ \quad \text{X}\\ \text{s.a}\\ \text{X} \in B,\ B \subseteq A\end{array}\right] \blacktriangleright \equiv \underset{\text{X}}{[\text{OPT}]}\ f(\text{X}),\ f: B \to \mathbb{R},$$

la aplicación del teorema de Weierstrass a problemas de optimización clásica con restricciones, como el que se ha descrito al principio de este subapartado, es inmediata.

b) Teorema fundamental de la convexidad: sea $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ y considerad el problema de optimización (1) que aparece al inicio del subapartado. En este caso, si el problema es de maximización (minimización), la función es cóncava (convexa) y el conjunto de restricciones es un conjunto convexo; entonces se tienen los resultados siguientes:

Repasad los conceptos de *conjunto convexo* y de *función cóncava* y *función convexa* en los materiales de los cursos de matemáticas.

- El conjunto de los máximos (mínimos) locales de la función en el conjunto de restricciones es un conjunto convexo.

- Todo máximo (mínimo) local es un máximo (mínimo) global sobre este conjunto de restricciones.

Del teorema resulta de especial interés la segunda aserción, dado que permite, cuando menos en el caso de las funciones de clase C^1, restringir la búsqueda de los candidatos a óptimo global en aquellos puntos que sean estacionarios. En cuanto a la convexidad del conjunto de máximos (mínimos) locales, eso asegura que, en el caso de que haya puntos óptimos, su combinación lineal convexa también lo será.

Problemas convexos

Los problemas de optimización que satisfacen las condiciones del teorema fundamental de la convexidad se denominan *problemas convexos*.

En el caso de la programación lineal, la aplicabilidad del teorema también es inmediata, ya que, como veremos, el conjunto de restricciones define siempre un conjunto que, además de ser cerrado, es convexo y la función lineal $f(\text{X})$, por el hecho de ser lineal, de forma simultánea, es cóncava y convexa.

Consultad el subapartado 4.6 de este módulo didáctico.

Teorema: sea $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, f: $A \to \mathbb{R}$ y el problema de optimización (1) que aparece al inicio del subapartado. En este caso, será un conjunto convexo si el conjunto de restricciones se formula en forma de igualdad y desigualdad y satisface las condiciones siguientes:

- Las funciones que definen las restricciones en forma de $\leq$ son convexas.

- Las funciones que definen las restricciones en forma de $\geq$ son cóncavas.

- Las funciones que definen las restricciones en forma de = son lineales.

Este teorema es interesante porque, a efectos operativos, facilita la determinación de la convexidad del conjunto de restricciones.

Especialmente, notad que todo problema lineal en forma estándar es un problema convexo.

2.2. Concepto de problema lineal

Un problema lineal tiene las características siguientes:

1) Una **función objetivo**, $f(\mathrm{X})$, que presenta lo que se quiere minimizar o maximizar. La función objetivo debe ser lineal.

2) Un **conjunto de restricciones**, $g_j(\mathrm{X})$, que representan las limitaciones existentes. Todas las restricciones también deben ser lineales.

Algunas de las restricciones...

... que nos podemos encontrar son, por ejemplo, que no se pueden utilizar más recursos de los disponibles, que se tienen que satisfacer unas cantidades mínimas, que se tienen que cumplir unos porcentajes mínimos, etc.

3) Todas las variables deben ser **variables no negativas**.

Un **problema lineal**, desde un punto de vista matemático, debe tener la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{OPT}]\ f(\mathbf{X}) \\
&\mathrm{s.a} \\
&g_j(\mathrm{X}) = 0; \quad \forall j \in \{1, 2, ..., m\}, \\
&\mathbf{X} \geq \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

donde **X** es un vector de variables y el operador [OPT] se tiene que sustituir por maximizar ([MAX]) o minimizar ([MIN]), según el caso.

Fijaos en que hemos utilizado el signo = en las restricciones, aunque también podemos encontrar restricciones del tipo ≤ o del tipo ≥, o combinaciones de las tres.

La condición de que la función objetivo y las restricciones sean lineales supone que éstas sean una suma de variables multiplicadas por parámetros, tal como se describe formalmente a continuación. Si alguna restricción y/o la función objetivo no son lineales, hablaremos de **problemas no lineales**.

La condición de no-negatividad de las variables impide que éstas puedan adoptar valores negativos. De todos modos, esta condición no reviste una especial trascendencia en la práctica, visto que no tiene sentido que la mayoría de las magnitudes económicas* adopte valores negativos. Adicionalmente, en algunas ocasiones podemos encontrar variables libres de signo (pueden tomar valores positivos y negativos) o que deben ser menores o iguales a cero.

*** Por ejemplo, cantidades de productos, número de personas, cantidades en litros, toneladas, metros, etc.**

Pese a todo, si fuera necesario trabajar con variables negativas o libres de signo, éstos siempre se podrán expresar como variables no negativas, tal como se describe más adelante.

Podéis consultar la manera de expresar variables negativas o libres de signo como variables no negativas en el subapartado 2.3.1 de este módulo didáctico.

Si adoptamos una forma más explícita, podemos plantear un problema lineal tal como indicamos a continuación:

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{OPT}]\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
&\text{s.a} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\
&x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},
\end{aligned}
$$

Con el fin de agilizar la notación nos referiremos a la función objetivo como *z*.

que, representado en notación matricial, sería:

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{OPT}]\ z = \mathbf{c}'\mathrm{X} \\
&\text{s.a} \\
&\mathrm{AX} = \mathbf{b}, \\
&\mathrm{X} \geq \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

donde **c** es el vector de coeficientes de la función objetivo, **b** es el vector de los términos independientes de las restricciones, A es la matriz de coeficientes técnicos y X es el vector de las variables:

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplo de planteamiento matricial de un problema lineal

Tenemos el problema lineal siguiente:

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
&\text{s.a} \\
&8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 22, \\
&3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 30, \\
&x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.
\end{aligned}
$$

Entonces, los vectores y las matrices asociados a este problema son los siguientes:

$$\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 22 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

2.3. Problemas lineales y no lineales

Como ya hemos avanzado, cualquier problema de optimización matemática que no cumpla las condiciones de linealidad se deberá considerar como un problema no lineal; en este caso, los algoritmos que se pueden utilizar para resolverlo son diferentes.

Resolución analítica y resolución numérica

La resolución numérica de un problema hace referencia al hecho de que utilizando datos concretos se pueda obtener una solución específica. De forma contraria, la resolución analítica está más orientada a obtener la solución de manera genérica y a derivar las relaciones de optimidad entre las variables susceptibles de ser interpretadas económicamente y, aunque es fundamental para desarrollos teóricos, suele ser poco práctica para tomar decisiones concretas.

Si se quieren resolver problemas numéricamente, más que analíticamente, los **algoritmos de programación no lineal** son mucho más complejos que los de programación lineal; aún más: en muchos casos (según las características del problema) será difícil aplicar un algoritmo que garantice que la solución obtenida sea la óptima (la mejor), sino que sencillamente nos dará una "buena solución". Estos algoritmos se denominan *algoritmos heurísticos*, y se justifica su uso por el hecho de que a veces no hay un algoritmo de búsqueda de óptimo, o bien (si hay uno) porque es tan complejo que no vale la pena utilizarlo. En cambio, los **algoritmos de programación lineal**, y en concreto el algoritmo simplex, son comparativamente fáciles de aplicar y proporcionan soluciones óptimas.

2.3.1. Linealización de problemas no lineales

A veces podemos encontrar problemas que no sean lineales únicamente porque no cumplen las condiciones de no-negatividad de las variables. En estos casos los podemos convertir en problemas lineales, y beneficiarnos así de las facilidades de solución, introduciendo en los mismos pequeños cambios. A continuación presentamos la manera de hacer alguno de estos cambios.

Variables negativas

Si una o más variables del problema debe adoptar valores únicamente negativos o cero, podemos hacer la sustitución que explicamos a continuación. Sea x_k una variable tal que $x_k \leq 0$; entonces la sustituimos por $x'_k = -x_k$, y ahora ya se puede resolver como problema lineal.

Obviamente, cuando facilitemos la solución tendremos que deshacer el cambio para no perder el significado original de la variable.

Ejemplo de linealización de un problema con variables negativas

En el ejemplo de planteamiento matricial de un problema lineal, supongamos que x_2 debe ser negativa o cero. En este caso, procedemos a sustituirla y el problema lineal sería el siguiente:

Vea el "Ejemplo de planteamiento matricial de un problema lineal" en el subapartado 2.2 de este módulo didáctico.

$$\left.\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 22, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 30, \\ x_1, x_3 \geq 0,\ x_2 \leq 0. \end{array}\right] \quad \underset{\Rightarrow}{x_2 = -x'_2} \quad \left[\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 - 3x'_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 - 2x'_2 + 5x_3 \leq 22, \\ 3x_1 - 7x'_2 + 4x_3 \leq 30, \\ x_1, x'_2, x_3 \geq 0. \end{array}\right.$$

Ahora ya lo podemos resolver como problema lineal en donde:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}; \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_3 \end{bmatrix}; \qquad C' = [2\ -3\ 4].$$

y el vector **b** no cambia.

Variables libres de signo

Si una o más variables del problema pueden adoptar cualquier valor (positivo, negativo o cero), podemos hacer la sustitución que presentamos a continuación. Sea x_k una variable tal que $x_k \in \mathbb{R}$; entonces la sustituimos por $x_k = x_k' - x_k''$, donde definimos ambas variables como positivas.

Igual que en el caso anterior, una vez que hayamos obtenido la solución, tendremos que deshacer el cambio para no perder el significado real de las variables.

Ejemplo de linealización de un problema con variables libres de signo

Consideremos el "Ejemplo de planteamiento matricial de un problema lineal" y supongamos que la variable x_2 puede tomar cualquier valor. La manera de linealizar el problema es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 22, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 \leq 30, \\ x_1, x_3 \geq 0. \end{array}\right] \blacktriangleright \quad \begin{array}{c} x_2 = x_2' - x_2'' \\ \Rightarrow \end{array} \quad \blacktriangleleft \left[\begin{array}{l} [\text{MAX}]\ z = 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + 4x_3 \\ \text{s.a} \\ 8x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + 5x_3 \leq 22, \\ 3x_1 + 7x_2' - 7x_2'' + 4x_3 \leq 30, \\ x_1, x_2', x_2'', x_3 \geq 0. \end{array}\right.$$

En forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & -7 & 4 \end{bmatrix}; \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2' \\ x_2'' \\ x_3 \end{bmatrix}; \qquad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

y el vector b continúa siendo el mismo.

Esta sustitución implica tener que cambiar una variable por dos (habrá, por tanto, una variable adicional), con la particularidad de que las columnas correspondientes a la matriz A son las mismas, pero cambiadas de signo.

A modo de resumen,...

... podemos linealizar fácilmente los casos no lineales siguientes:

- Si tenemos una variable negativa, la sustituiremos por otra cambiada de signo, que será positiva $x_k' = -x_k$.
- Si tenemos una variable libre de signo, la reemplazamos por la diferencia de dos variables positivas $x_k = x_k' - x_k''$.

2.4. Tipos de problemas lineales y algoritmos existentes

Según las características de las variables, podemos clasificar los problemas lineales en los tipos siguientes:

1) Problemas lineales continuos (PLC): problemas como los que hemos visto hasta ahora, en los cuales las variables pueden adoptar cualquier valor real, es decir, $x_i \in \mathbb{R}$. La resolución generalmente se basa en las dos vías siguientes:

a) El **algoritmo simplex**, construido por George Dantzig en 1947.

b) El **algoritmo de Karmarkar** (1984), más reciente y más complejo, que se enmarca dentro de los algoritmos de carácter polinómico, y que proporciona mejores resultados que el algoritmo simplex cuando la estructura del problema presenta ciertas particularidades. Básicamente, es más eficiente que el algoritmo del simplex para problemas lineales de gran tamaño.

Recordad

Las siglas que presentamos a continuación hacen referencia a los diferentes tipos de problemas lineales que nos podemos encontrar:

- **PLC**: problema lineal continuo.
- **PLE**: problema lineal entero.
- **PLEP**: problema lineal entero puro.
- **PLEM**: problema lineal entero mixto.
- **PLB**: problema lineal binario.
- **PLBP**: problema lineal binario puro.
- **PLBM**: problema lineal binario mixto.

2) Problemas lineales enteros (PLE): problemas en los cuales todas las variables o parte de éstas tienen que adoptar valores enteros (por ejemplo, si el significado de una variable es un número de personas, no se pueden tener en cuenta valores que no sean enteros). Este tipo de problemas lineales se puede subdividir en dos categorías:

a) Problemas lineales enteros puros (PLEP): problemas lineales enteros en los cuales todas las variables tienen que ser enteras.

b) Problemas lineales enteros mixtos (PLEM): problemas lineales enteros en los cuales sólo una parte de las variables es entera y el resto no lo tiene que ser necesariamente (pero, obviamente, sí que debe ser real).

Variables enteras

Una variable entera adopta valores enteros. La existencia de una sola variable entera ya implica que el problema lineal sea entero y, por lo tanto, tendremos que recurrir a algoritmos diferentes de los PLC.

Hay que subrayar que la utilización de un algoritmo de PLC en un PLE sólo dará el óptimo en el caso de que la solución que se obtenga proporcione valores enteros para las variables que lo tienen que ser. En caso contrario, incluso redondeando los resultados al entero más próximo, estos resultados no nos servirán. Hay un elevado número de algoritmos específicos según las características particulares de cada problema, aunque debe destacarse el uso generalizado de los **algoritmos de ramificación y de acotación** (en inglés, *Branch and Bound*). Estos problemas, como los siguientes, no se considerarán en el desarrollo de la asignatura.

3) Problemas lineales binarios (PLB): problemas lineales en los cuales todas las variables de que constan (**problemas lineales binarios puros, PLBP**) o parte de éstas (**problemas lineales binarios mixtos, PLBM**) son binarias. Las variables binarias se pueden considerar como un subconjunto de las variables enteras con la particularidad de que sólo pueden adoptar los valores 1 y 0. Son muy útiles para modelizar situaciones que impliquen una toma de decisión cualitativa, como colocar (1) o no colocar (0) un semáforo en un cruce, abrir (1) o no (0) un almacén determinado, comprar (1) o no comprar (0) un determinado componente, y un largo etcétera. Por norma general, se resuelven como un PLE añadiéndoles restricciones del tipo $x_i \leq 1$ para todas las variables que tengan que ser binarias. Si tenemos un PLBP, sin embargo, también se puede aplicar el **algoritmo de Balas.**

Variables binàries

Una variable es binaria si adopta únicamente los valores 0 ó 1. Un PLB puede ser tratado como un PLE con la restricción de que las variables binarias sean enteras e inferiores a 1 o iguales a 1.

Problemas particulares de la programación lineal entera

Como casos particulares dentro de la programación lineal entera podemos destacar dos problemas muy característicos:

- El **problema del transporte**, que de hecho es un PLEP con una estructura muy particular que permite la aplicación del algoritmo conocido con el nombre de *stepping stone*.

- El **problema de la asignación** o **problema de la afectación**, que es un PLBP también con una estructura muy particular. Para resolverlo se aplica el algoritmo húngaro, o algoritmo de Köning y Egervary.

Lectura complementaria

El desarrollo de los algoritmos de acotación y de ramificación, así como otros algoritmos específicos, por ejemplo el de Balas, se puede encontrar, por ejemplo, en la obra siguiente:
S. Ríos Insua (1996). *Investigación operativa* (3.ª ed.). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.

3. Formulación de problemas lineales

Aunque, como ya hemos comentado, la investigación operativa aplica el método científico, hay una parte de éste que se aleja de la ciencia y se acerca al arte: es la **modelización**. Esta conversión de una situación real en fórmulas matemáticas nunca la podemos considerar una cuestión banal, todavía más, le tendremos que dedicar la máxima concentración posible, dado que, si el modelo especificado es inadecuado, la resolución será superflua. El hecho de intentar aplicar una metodología, sin dar ningún otro paso, al caso que nos ocupa, la modelización de problemas lineales, no es suficiente. Hay aspectos muy importantes en este proceso, ajenos a concepciones científicas, de los cuales destacaremos dos, la creatividad y la experiencia:

El arte de la modelización

La práctica de modelizar problemas lineales correctamente tiene una vertiente de arte por el hecho de que requiere creatividad y experiencia.

a) En lo que respecta a la **creatividad**, queremos destacar el hecho de que para proceder a modelizar problemas lineales es preciso desprenderse de las ideas preconcebidas y de los procedimientos mecanicistas. Cada situación real es un problema completamente diferente de cualquier otro que se haya visto con anterioridad; por lo tanto, el hecho de aplicar un estándar dará sin duda unos resultados no deseados. En definitiva, se trata de conseguir el equilibrio entre la lógica y la inventiva.

b) La **experiencia** es, como en todo arte, una de las maneras de perfeccionarse. Esta idea, aplicada a nuestro contexto, implica la realización de una serie de planteamientos, los cuales constituyen buena parte de este apartado.

3.1. Metodología de formulación de problemas lineales

En este subapartado se desgranan las diferentes etapas que, a grandes rasgos, representa el proceso de modelización en problemas lineales. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que el procedimiento que describimos sólo constituye un intento de sistematización con fines pedagógicos de un conjunto de operaciones mucho más complejas y específicas en las cuales la creatividad y la intuición personal tienen, como ya hemos dicho, un papel fundamental.

Identificación del problema (o comprensión)

La primera fase es crucial. De ésta depende que cualquier cosa que hagamos con posterioridad sea útil o sea meramente un despilfarro de tiempo y recursos. Nos tenemos que situar mentalmente dentro del problema, comprenderlo, ver sus ramificaciones principales, conocer el entorno en que se mueve, sopesar los diferentes puntos de vista, elegir los datos que sean útiles, decidir cuáles se podrán adaptar y cuáles no podremos conocer. Se deben conocer los objetivos que se persiguen y, en definitiva, hay que tener muy claro qué se quiere hacer o a dónde se quiere llegar. Si nos situamos en la esfera en que nos moveremos a lo largo del apartado (y, más adelante, en los otros módulos), nos encontraremos unas situaciones adaptadas, muy simplificadas, en las que generalmente toda la información que se facilita es relevante. En definitiva, son situaciones que podríamos definir como ejemplos de laboratorio, cuyo objetivo único es introducir al estudiante en el proceso de aprendizaje.

Identificación de variables

El paso siguiente para la formulación de un problema lineal es la identificación de las variables y de los parámetros del problema.

Construcción de restricciones

Las restricciones consistirán en la formulación matemática de los acondicionamientos y las limitaciones a que nos enfrentamos. Si no conseguimos expresar las restricciones, lo más probable es que no hayamos identificado correctamente las variables, y habrá que volver atrás, a la fase de identificación de variables. El solo hecho de que no se recoja en una restricción una limitación invalidará, con respecto a la práctica, toda la resolución.

Construcción de la función objetivo

Una vez que se hayan construido las restricciones determinaremos la función objetivo, cuyo valor tenemos que optimizar. Si no conseguimos construir esta función, normalmente es porque no hemos identificado correctamente las variables, de manera que tendremos que volver atrás.

Recordad

Los pasos que hay que seguir a la hora de formular problemas lineales son los siguientes:

- Comprensión del problema.
- Identificación de las variables.
- Construcción de las restricciones.
- Construcción de la función objetivo.
- Comprobación de la coherencia interna.

Comprobación de la coherencia interna

Una vez formulado el problema, es recomendable estudiarlo de manera global, comprobar que se cumplen todas las restricciones, que la función objetivo representa realmente el objetivo perseguido, que la estructura matemática, a primera vista, es correcta (no hay restricciones redundantes evidentes, todas las variables están enlazadas entre sí, etc.) y, en definitiva, verificar cualquier cosa que nos haga dudar de su corrección. Esta faceta, como es previsible, mejora con el tiempo, es decir, a medida que se adquiere más experiencia.

3.2. Aplicación de la metodología: caso Metales del Ter

Para ver de manera práctica la metodología de problemas lineales que acabamos de explicar, en este subapartado desarrollamos un caso concreto.

Metales del Ter es una pequeña empresa metalúrgica que principalmente produce la taladradora de los chasis de aire condicionado como subcontratista de una gran empresa. El proceso de producción es el siguiente: se recogen los chasis de la fundición, se hacen en éstos unos agujeros y acto seguido se pulen. Para hacerlo se utilizan tres tipos de máquinas: una taladradora, una pulidora y una embaladora. Las disponibilidades para mañana de estas máquinas son de 720, 840 y 350 minutos, respectivamente. Mañana se pueden hacer dos modelos de chasis: uno grande y uno pequeño. Un chasis grande requiere cuatro minutos de taladradora, diez de aseado y cinco de embalaje, mientras uno pequeño necesita seis minutos de taladradora, seis de aseado y dos de embalaje.

Sabiendo que el beneficio que reporta un chasis grande es de 500 u.m. y que uno pequeño proporciona un beneficio de 300 u.m., ¿qué cantidad se tiene que producir de cada uno para que el beneficio total sea el máximo?

La manera de proceder es la siguiente:

1) En primer lugar definiremos las **variables**. Para descubrirlas es útil preguntarse: ¿qué podemos variar (decidir) para conseguir el objetivo? La respuesta es: la cantidad de chasis grandes y pequeños que hay que producir. Las variables serán, pues, las siguientes:

- x_1: número de chasis grandes a fabricar.
- x_2: número de chasis pequeños a fabricar.

2) Una vez definidas las variables, pasaremos a las **restricciones**. Lo que nos tenemos que preguntar es: ¿hay alguna limitación que no nos permita fabricar todo lo que queramos? En este caso tendremos tres restricciones de un mismo tipo: no podemos utilizar más recursos que aquellos de los que disponemos.

Así pues, si x_1 es el número de chasis grandes y cada uno requiere unos cuatro minutos, $4x_1$ será el tiempo total de taladradora que se utilizará con chasis grandes, y si le sumamos el de los pequeños ($6x_2$) obtendremos el tiempo total de taladradora que necesitaremos, que debe ser menor que el tiempo disponible (720 minutos). Expresado en forma de inecuación:

$$4x_1 + 6x_2 \leq 720.$$

Procederemos de la misma manera con las limitaciones de tiempo de la pulidora y de la embaladora:

$$10x_1 + 6x_2 \leq 840,$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 350.$$

Formalmente, también debemos explicitar que las variables no pueden adoptar valores negativos (no tiene sentido que haya cantidades negativas de productos):

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

y con eso ya tendremos todas las restricciones.

3) A continuación pasamos a la **función objetivo**. En este caso se trata de maximizar el beneficio añadido de los productos, de manera que será:

$$[\text{MAX}]\ z = 500x_1 + 300x_2.$$

Ahora ya tenemos planteado el problema, que, en conjunto y expresado con una estructura más formal, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&[\text{MAX}]\ z = 500x_1 + 300x_2\\
&\text{s.a}\\
&4x_1 + 6x_2 \le 720,\\
&10x_1 + 6x_2 \le 840,\\
&5x_1 + 2x_2 \le 350,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Antes de continuar la lectura de este módulo es conveniente que hagáis los ejercicios de autoevaluación 1 a 6 para asimilar bien el tema de la modelización.