Teoría de circuitos
Examen

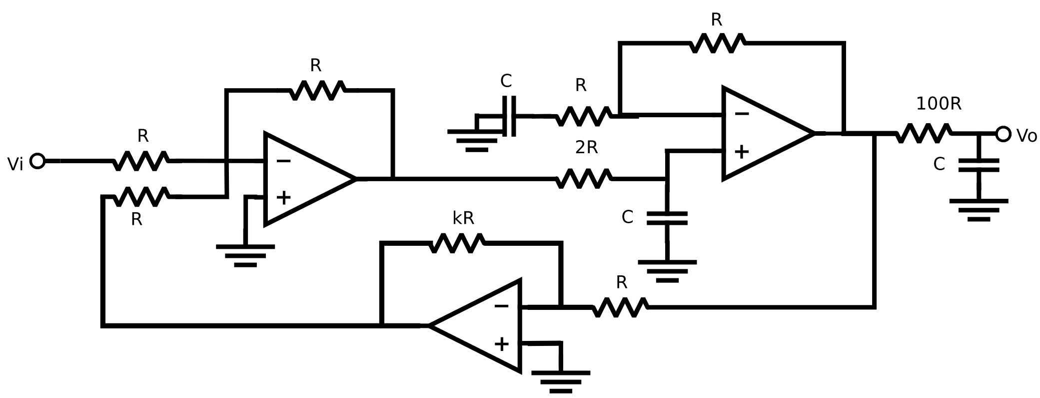
CURE

26 de Julio de 2013

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deber comenzar en una hoja nueva.Se evaluar explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1



(a) Identifique bloques y demuestre que la transferencia del circuito de la figura es:

$$H = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\omega_0^2}{100(s + (1-k)\omega_0)(s + \omega_0/100)}$$

considerando $1/RC = \omega_0$.

(b) Discuta la estabilidad del sistema según k, con $k \geq 0$.

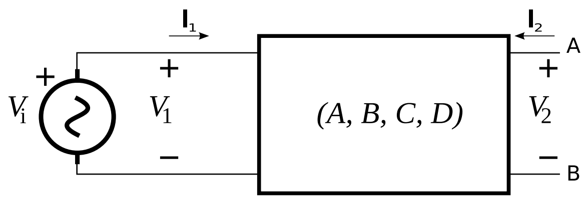
(c) Realice el diagrama de Bode para la transferencia calculada y tomando el menor valor de k que asegura la estabilidad. Bosqueje el asintótico.

(d) Calcule la salida en régimen para una entrada de la forma $V_i = \cos(\frac{\omega_0}{100}t)$

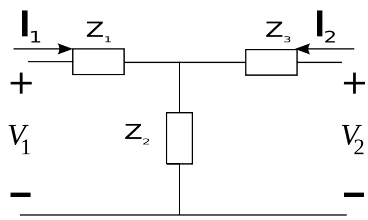
(e) Indique a que tipo de filtro corresponde.

Problema 2

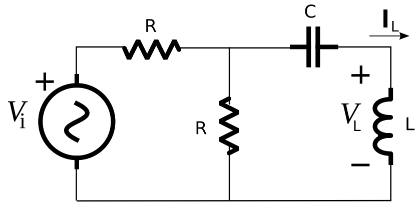
En este problema nos interesa la respuesta en régimen del sistema, por lo tanto trabajaremos con fasores.



(a) Halle el equivalente de thevenin del circuito de la figura en función de las constantes generales del cuadripolo.



(b) Calcule las constantes generales del cuadripolo de la figura en función de Z_1, Z_2 y Z_3. En particular demuestre que $B = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}$.



(c) Calcule los fasores V_L e I_L.
Datos: $v_i(t) = V_i \cos(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t)$, $1/LC = \omega_0^2$, $R/L = 1/RC = \omega_0$.

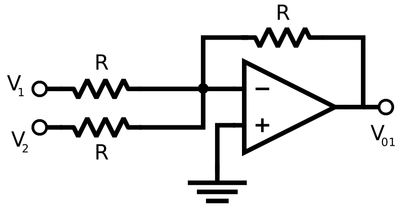
(d) Realice un diagrama fasorial incluyendo:V_i, V_L e I_L.

(e) Calcule las expresiones temporales $v_L(t)$ e $i_L(t)$.

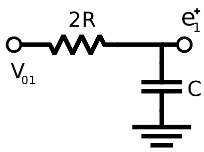
Solución

Problema 1

(a) Sumador inversor: $v_0 = -(v_1 + v_2)$

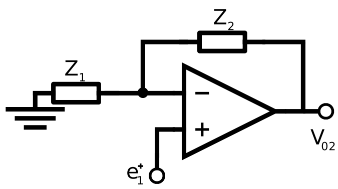


$H_1(s) = \dfrac{e_1^+}{v_{01}} = \dfrac{1/(2RC)}{s + 1/(2RC)}$

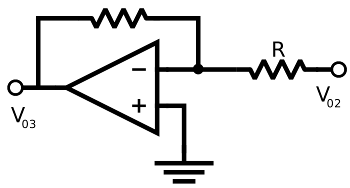


Amplificador no inversor: $H_2(s) = \dfrac{v_{02}}{e_1^+} = \dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_1}$

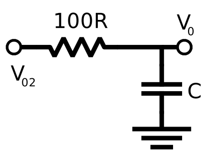
Con $Z_1 = \dfrac{RCs + 1}{Cs}$ y $Z_2 = R$, por lo tanto $H_2(s) = 1 + \dfrac{s}{s + 1/(RC)}$.



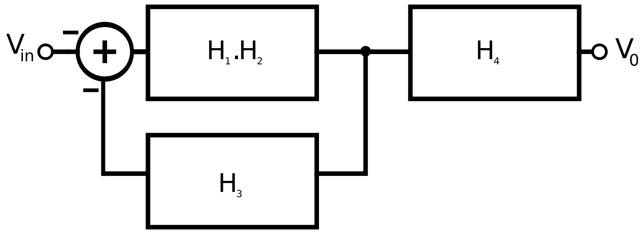
Amplificador inversor: $H_3 = -k$



$H_4(s) = \dfrac{v_0}{v_{02}} = \dfrac{1/(100RC)}{s + 1/(100RC)}$



Luego de identificar los bloques podemos ver que se tiene el siguiente sistema:



Cuya transferencia es,

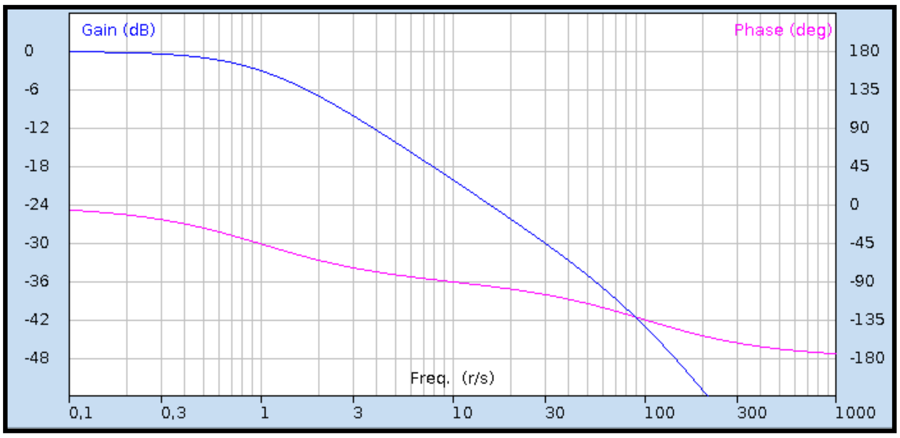
$$\frac{V_0}{V_{in}} = \left[\frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2 H_3} \right] H_4$$

Si tomamos $\omega_0 = 1/RC$ y operamos obtenemos,

$$H = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\omega_0^2}{100(s + (1-k)\omega_0)(s + \omega_0/100)}$$

(b) Notar que la transferencia anterior es real racional y estrictamente propia por lo tanto podemos afirmar que el sistema es estable si dicha transferencia no presenta polos en C^+. Tenemos dos polos, $-\omega_0/100$ y $\omega_0(k-1)$. El único polo que puede estar en C^+ es $\omega_0(k-1)$ pero solo si $k \geq 1$.
Por lo tanto para $k \geq 1$ el sistema es inestable y para $0 \leq k < 1$ el sistema es estable

(c) En siguiente figura el diagrama de Bode resultante si tomamos $k = 0$ y $\omega_0 = 100$.



Notar los polos en las frecuencias $\omega_0/100 = 1$ y $\omega_0 = 100$

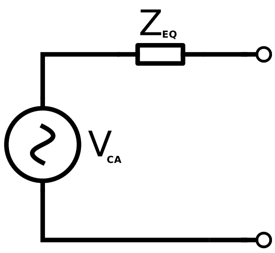
(d) Se tiene $\left|H(j\frac{\omega_0}{100})\right| \approx 0.7$ y $arg\left[H(j\frac{\omega_0}{100}\right] = \pi/4$, la salida es:

$$v_0(t) = \left|H(j\frac{\omega_0}{100})\right| \cos\left(\frac{\omega_0}{100}t + arg\left[H(j\frac{\omega_0}{100}\right]\right)$$

(e) El filtro atenúa las altas frecuencias, por lo tanto podemos clasificarlo como filtro pasabajos.

Problema 2

(a) Llamemos V_{CA}, I_{CC} y Z_{EQ}, voltaje de circuito abierto, corriente de cortocircuito y resistencia equivalente respectivamente. El equivalente thevenin es



Tenemos las siguientes relaciones: $\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$
Por lo tanto podemos afirmar que:

$$V_{CA} = V_2|_{I_2=0} = \frac{V_i}{A}$$

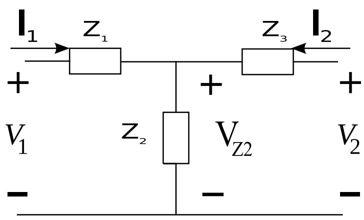
$$I_{CC} = -I_2|_{V_2=0} = \frac{V_i}{B}$$

Como $Z_{EQ} = \dfrac{V_{CA}}{I_{CC}}$ se tiene que:

$$Z_{EQ} = \frac{B}{A}$$

(b) Las constantes generales del cuadripolo se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \quad B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$
$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \quad D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$



Para la constante A se aplica un divisor de tensión y operando se encuentra que:

$$A = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}$$

Para la constante B se tiene que $V_2 = 0$ por lo tanto usando un divisor de tensión se encuentra que:

$$V_{Z2} = \frac{V_1.Z_2//Z_3}{Z_1 + Z_2//Z_3}$$

Como a su vez $V_{Z2} = -I_2 Z_3$ se tiene

$$\frac{V_1}{-I_2} = \frac{(Z_1 + Z_2//Z_3)Z_3}{Z_2//Z_3}$$

Luego de operar,

$$B = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}$$

Para la constante C como la corriente $I_2 = 0$ toda la corriente I_1 circula por la impedancia Z_2 y se tiene $V_{Z2} = V_2$ con lo cual:

$$C = \frac{1}{Z_2}$$

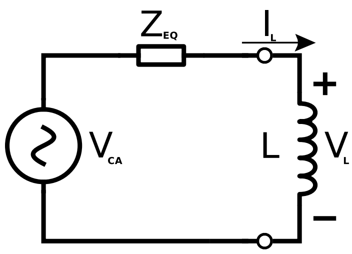
Para D como $V_2 = 0$ se puede utilizar un divisor de corriente para encontrar la relación entre I_1 y $-I_2$, luego de operar resulta:

$$D = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2}.$$

Resumiendo, los resultados son,

$$\begin{array}{ll} A = \dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_2}\ , & B = Z_1 + Z_3 + \dfrac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\ C = \dfrac{1}{Z_2}\ , & D = \dfrac{Z_2 + Z_3}{Z_2} \end{array}$$

(c) Para trabajar en fasores debemos tener en cuenta que $v_i(t) = V_i \cos(\omega t) = Re[V_i(j\omega)\ e^{j\omega t}]$ con lo cual $V_i(j\omega) = V_i$ es el fasor asociado a $v_i(t)$.
Reconociendo un caso particular del cuadripolo de la parte b) y utilizando el equivalente thevenin de la parte a) se tiene lo siguiente:



Donde $Z_1 = Z_2 = R$ y $Z_3 = 1/Cj\omega$. Por lo tanto:

$$Z_{EQ} = \frac{R(j\omega + \omega_0/2)}{j\omega} \ , \quad V_{CA} = V_i/2$$

Utilizando un divisor de tensión se puede afirmar que $V_L(j\omega) = \dfrac{V_{CA}Lj\omega}{Z_{EQ} + Lj\omega}$ entonces,

$$V_L(j\omega) = \frac{(V_i/2)(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + j\omega\omega_0 + \omega_0^2/2} = \frac{-(V_i/2)\omega^2}{\omega_0^2/2 - \omega^2 + j\omega\omega_0}$$

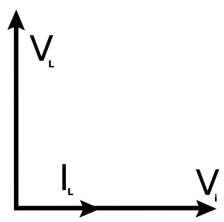
Como $\omega = \omega_0/\sqrt{2}$ se tiene

$$V_L(j\omega_o/\sqrt{2}) = \frac{jV_i}{2\sqrt{2}}$$

Además teniendo presente que $I_L(j\omega) = \dfrac{V_L}{Lj\omega}$ y que $L\omega_0 = R$,

$$I_L(j\omega_0/\sqrt{2}) = \frac{V_i}{2R}$$

(d)



(e) Llamemos $H(j\omega) = \dfrac{V_L(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ entonces se puede afirmar que

$$v_L(t) = \left|H(j\omega/\sqrt{2})\right| \cos\left(\omega_0 t/\sqrt{2} + arg\left(H(j\omega_0/\sqrt{2})\right)\right)$$

$$v_L(t) = \frac{V_i}{2\sqrt{2}} \cos\left(\omega_0 t/\sqrt{2} + \pi\right)$$

De igual manera

$$i_L(t) = \left(\frac{V_i}{2R}\right) \cos\left(\omega_0 t/\sqrt{2}\right)$$