Teoría de circuitos
Examen

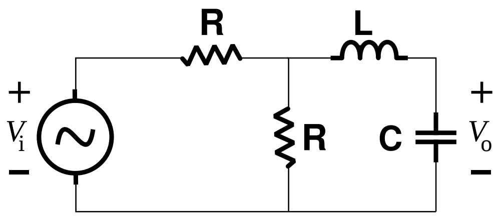
CURE

22 de diciembre de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deber comenzar en una hoja nueva.Se evaluar explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1



Dado el circuito de la figura se pide:

(a) Calcular la transferencia del sistema

Datos:

- $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$
- $\frac{R}{L} = \omega_0$

(b) Realizar el diagrama asintótico de Bode de módulo y fase. Bosquejar el real

(c) Calcular la salida en régimen para una entrada $v_i(t) = cos(\omega_0 t)$ y compararla con la información del diagrama de Bode

(d) Calcular la potencia consumida en régimen por el capacitor C

Problema 2

El circuito de la figura 1 está en régimen cuando en cierto $t = 0$ se abre la llave LL.
Tómese durante todo el problema: $\frac{1}{RC} = \frac{R}{L} = \omega_0$; $\frac{1}{R_1 C} = 5\omega_0$:

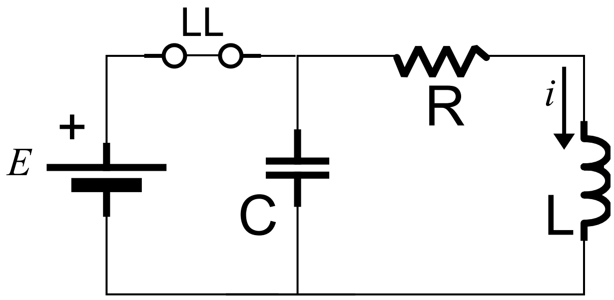


Figura 1:

(a) Halle $i(t)$ para todo $t > 0$. ¿Qué sucede con $i(t)$ cuando el tiempo se hace muy grande?.

Luego de un gran intervalo de tiempo (tómese $t \to \infty$), se vuelve a cerrar la llave del circuito conectándolo esta vez a una fuente desconocida $v_i(t)$. Ver figura 2:

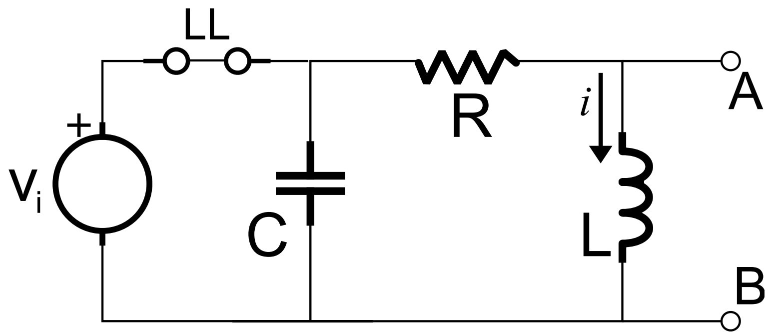


Figura 2:

(b) Calcule el equivalente thévenin del mismo desde los terminales A y B.

Se tiene ahora el circuito de la figura 3:

(c) Reconozca bloques y halle la transferencia del sistema $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

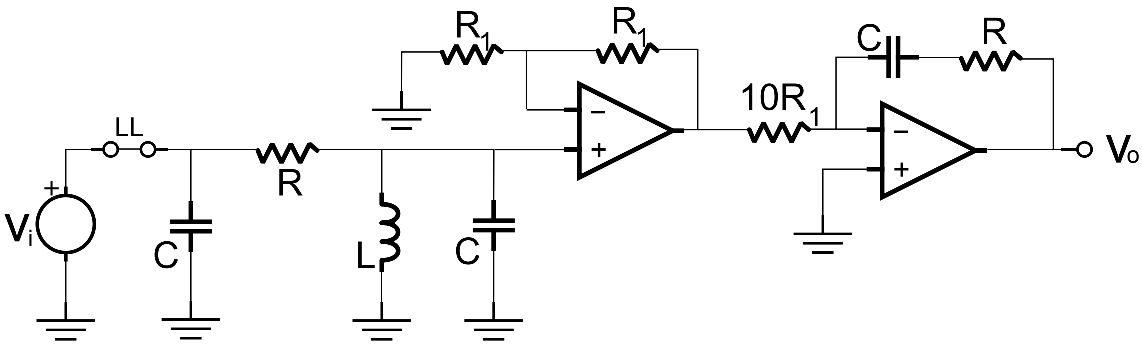


Figura 3:

Solución

Problema 1

(a) Sea: $Z_{eq} = (Ls + \frac{1}{Cs})||R = \frac{(LCs^2+1)R}{LCs^2+RCs+1}$; llamaremos $V_1(s)$ a:

$$V_1(s) = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq}+R}V_i(s) = \frac{(LCs^2+1)}{2LCs^2+RCs+2}V_i(s)$$

Vemos entonces que:

$$V_o(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs}+Ls}V_1(s) = \frac{1}{LCs^2+1}V_1(s) = \frac{1}{2LCs^2+RCs+2}V_i(s)$$

Finalmente:

$$H(s) = \frac{1}{2LCs^2+RCs+2} = \frac{\frac{1}{2}\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$$

$$\zeta = \frac{1}{4}$$

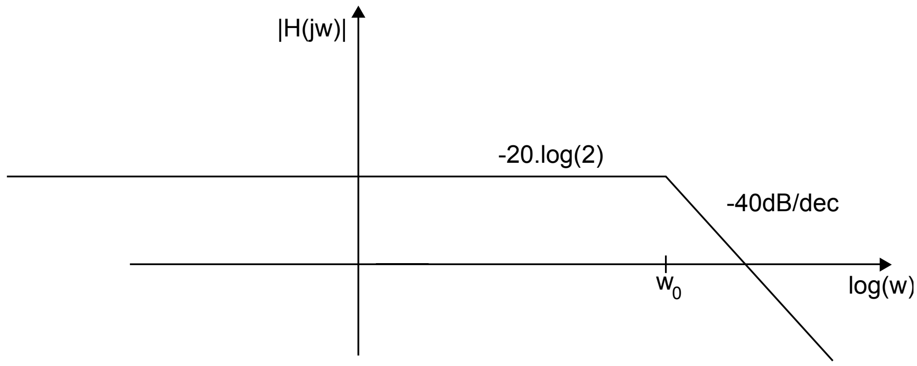
(b)

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}\omega_0^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_0 j\omega+\omega_0^2}$$

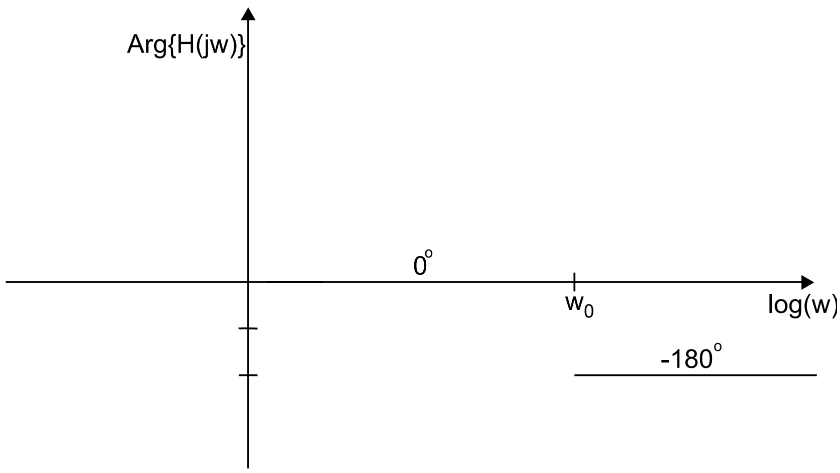
- $\omega \ll \omega_0$: $H(j\omega) \approx \frac{\frac{1}{2}\omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{2}$
  $|H(j\omega)|_{dB} = -20log(2)$
  $\angle H(j\omega) = 0$

- $\omega_0 \ll \omega$: $H(j\omega) \approx \frac{\frac{1}{2}\omega_0^2}{(j\omega)^2} = -\frac{\frac{1}{2}\omega_0^2}{\omega^2}$
  $|H(j\omega)|_{dB} = 20log(\frac{\omega_0^2}{2}) - 40log(\omega)$
  $\angle H(j\omega) = -\pi$

En la figura 4 se muestran los dos diagramas de bode asintóticos de módulo y fase.



(a) Diagrama de bode de módulo.



(b) Diagrama de bode de fase.

Figura 4: Diagramas de bode asintóticos.

(c) Como estamos trabajando en régimen sinusoidal:

$$v_o(t) = |H(j\omega_0)|cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)) = cos(\omega_0 t - \pi/2)$$

Ver que en un diagrama de bode real es consistente. En $\omega = \omega_0$ el módulo de $H(j\omega)$ tiene un leve aumento gracias al pequeño valor de ζ. Ver también que en un diagrma de bode real, para $\omega = \omega_0$, la fase vale exactamente $-\pi/2$.

(d) En fasores:

$$S = \frac{\bar{V}.\bar{I}^*}{2} = \frac{|\bar{V}|^2}{2Z^*} = \frac{1}{2.\frac{1}{-Cj\omega_0}} = \frac{-Cj\omega_0}{2}$$

$$P = 0; \qquad Q = \frac{-C\omega_0}{2}$$

Decimos que C “consume” potencia reactiva.

Problema 2

(a) Trabajamos en Laplace. Obtenemos el modelo de la figura 5.

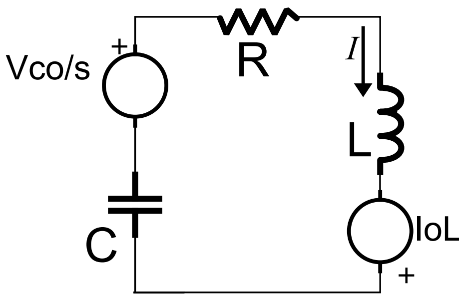


Figura 5:

$$V_{C0} = E$$
$$I_0 = \frac{E}{R}$$

$$\frac{E}{s} + L\frac{E}{R} = I(s)(Ls + R + \frac{1}{Cs}) = I(s)(\frac{LCS^2 + RCs + 1}{Cs})$$

$$I(s) = \frac{E(\omega_o + s)}{s^2 + \omega_o + \omega_o^2}$$

Antitransformando obtenemos:

$$i(t) = Y(t)\left[\frac{2E}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\omega_0}{2}t}\left[sen\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0}{2}t)\right) + sen\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0}{2}t + \pi - Arctg(\sqrt{3})\right)\right]\right]$$

$$lim_{t\to\infty} i(t) = 0$$

(b) Cuando $t \to \infty$, los datos previos se hacen nulos y podemos calcular el equivalente Thévenin del circuito.

$$V_{AB}(s) = \frac{Ls}{R+Ls}V_i(s)$$
$$Z_v(s) = R||Ls = \frac{RLs}{R+Ls}$$

Se obtiene el equivalente Thévenin de la figura 6, con los valores de $V_{AB}(s)$ y $Z_v(s)$ recién calculados.

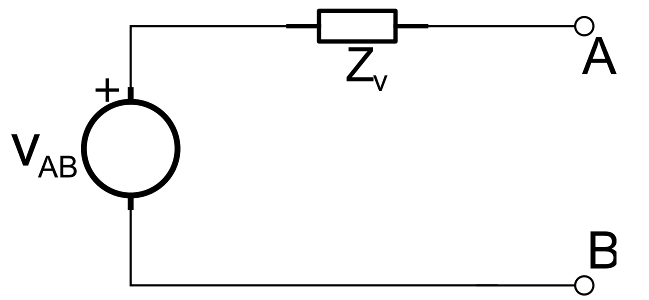


Figura 6:

(c) Si miramos la figura 7, podemos reconocer tres bloques: un bloque de transferencia H(s), un bloque no inversor y un bloque inversor.

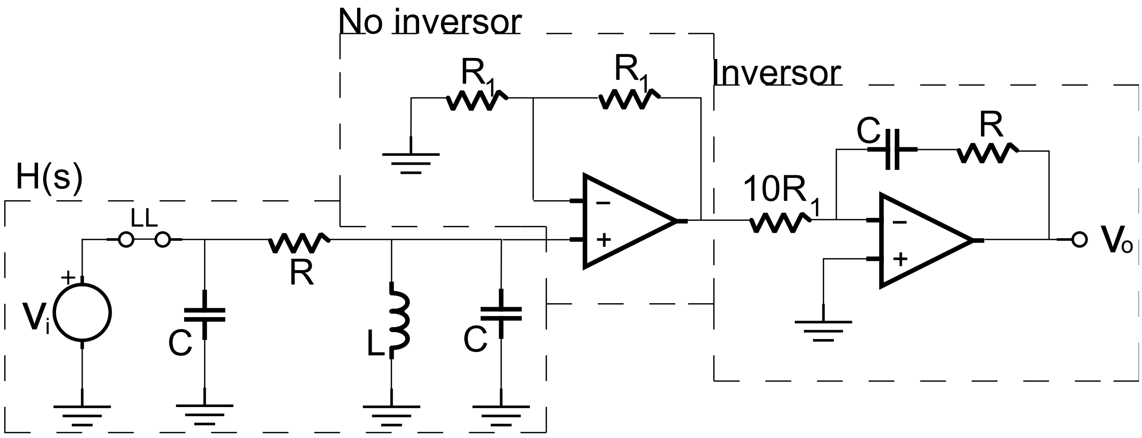


Figura 7:

Calculamos la transferencia bloque a bloque u luego, la transferencia final sera el productor de las tres. Sin embargo, antes podemos redibujar el bloque $H(s)$ utilizando el equivalente hallado en la parte (b). Ver figura 8.
Calculamos entonces la transferencia $H(s)$ como:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs} + Z_v}.V_{AB} = \frac{Ls}{RLCs^2 + Ls + R}$$

La transferencia $H_N(s)$ del bloque no inversor será:

$$H_N(s) = 2$$

y finalemente la transferencia $H_I(s)$ del bloque no inversor será:

$$H_I(s) = -\frac{R + \frac{1}{Cs}}{10R_1}$$

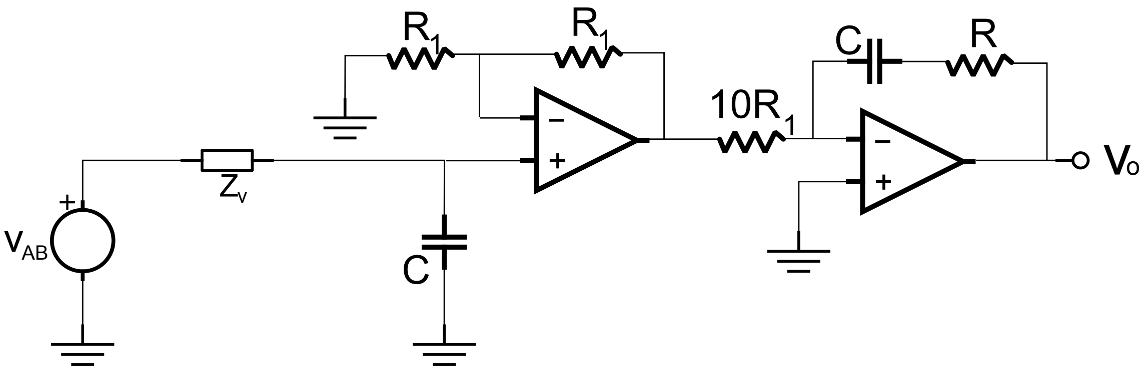


Figura 8:

Multiplicando obtenemos la transferencia total que llamaremos $G(s)$:

$$G(s) = H(s).H_N(s).H_I(s) = -2\frac{\left(R + \frac{1}{Cs}\right) Ls}{10R_1\left(RLCs^2 + Ls + R\right)} = -2\frac{\left(s + \frac{1}{Cs}\right) RCL}{10R_1 C.RCL\left(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right)}$$

Utilizando los valores para ω_0 dados en la letra:

$$G(s) = -\frac{\omega_0(s + \omega_0)}{s^2 + \omega_0 s + {\omega_0}^2}$$