Teoría de circuitos
Solucion del Examen

CURE

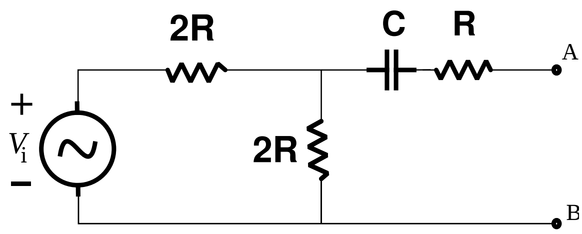
14 de setiembre de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deber comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

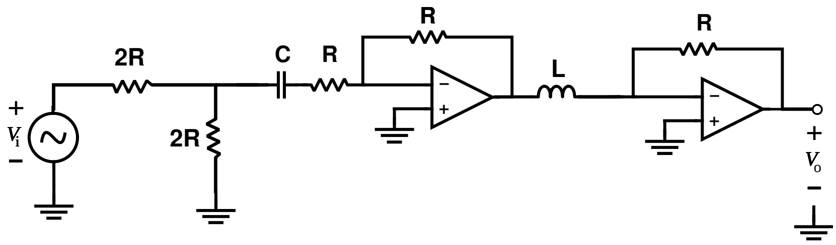
Problema 1

(a) Calcular el equivalente Thevenin desde las terminales A y B



(b) Identificar bloques y verificar que la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\omega_0}{(s+\omega_0)}$ Cumpliendose que:

- $\frac{R}{L} = 4\omega_0$
- $\frac{1}{2RC} = \omega_0$

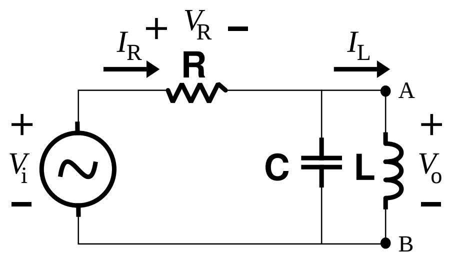


(c) Realizar un diagrama de Bode asintótico indicando los valores exactos en los puntos notables

(d) Observando el diagrama de Bode, indicar a que tipo de filtro corresponde y que ancho de banda tiene (caida a 3 dB).

(e) ¿Cuál será la salida en régimen para una entrada $v_i(t) = cos(100\omega_0 t)$?

Problema 2



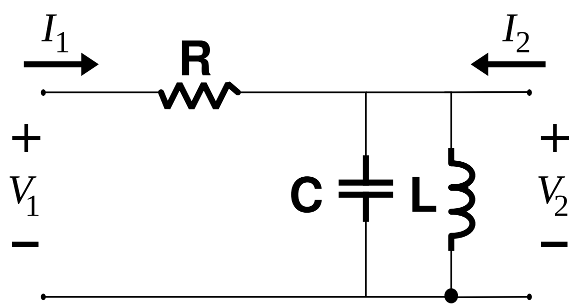
(a) Realizar un diagrama fasorial que incluya los fasores: V_i, V_o, V_R e I_R

Si se cumple que: $\frac{1}{RC} = \omega_0$ **y** $\frac{R}{L} = \omega_0$**:**

(b) Calcular los voltajes en régimen $v_o(t)$ y $v_R(t)$ siendo $v_i(t) = cos(\omega_0\sqrt{2}t)$

(c) Calcular la potencia activa, reactiva y aparente entregada por la fuente $v_i(t)$

(d) Dado el cuadripolo de la figura calcular las admitancias de vacio (Parametros Y)



(e) Calcular I_1 e I_2 cuando $v_i = cos(\omega_0 t)$ y el secundario esta en cortocircuito

Solución

Problema 1

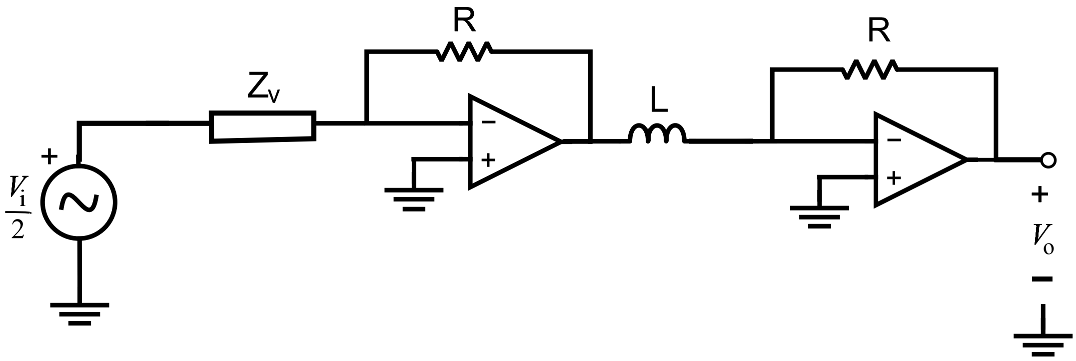
(a) Calculamos primero la impedancia vista Z_v.
Se puede observar que corresponde a la serie entre $\frac{1}{cs}$, R y $2R||2R$.

$$Z_v = \frac{2RCs + 1}{Cs}$$

Para calcular el voltaje de vacío planteamos un divisor resistivo entre $2R$ y $2R$ ya que no pasa corriente por la rama del condensador:

$$V_{th} = V_i \frac{2R}{4R} = \frac{V_i}{2}$$

(b) Utilizando el equivalente Thevenin calculado en la parte anterior obtenemos el siguiente circuito:



Reconocemos en él dos bloques inversores.
Recuerdese que la trasferencia de un circuito inversor es de la forma:

$$H(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Concluímos entonces:

$$V_o = H_1(s).H_2(s).V_{th} = H_1(s).H_2(s).\frac{V_i}{2} = \frac{-R}{Z_v}\frac{-R}{Ls}\frac{V_i}{2}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$V_o = -\frac{R}{4L(s + \frac{1}{2RC})}V_i \Rightarrow H(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$

(c)

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega + \omega_0}$$

- $\omega \ll \omega_0$:

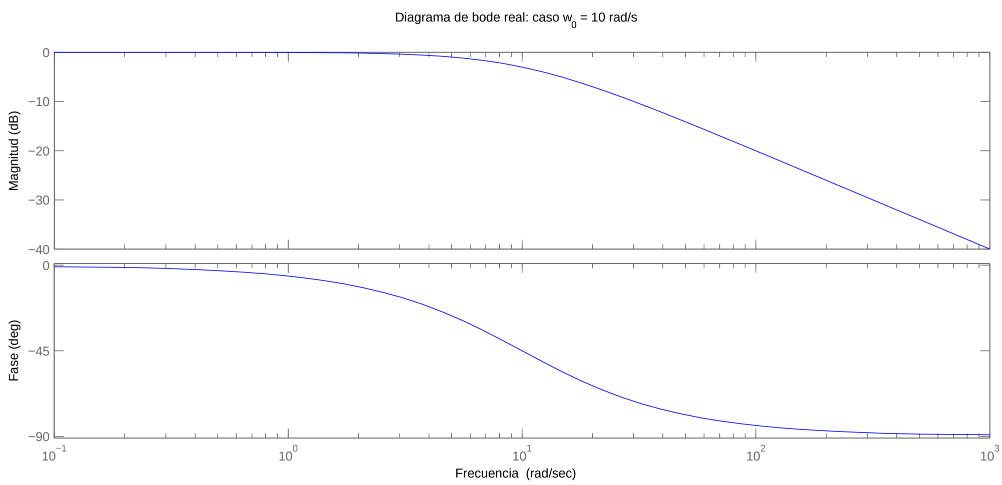
$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1$$

$|H(j\omega)|_{dB} = 0$
$Arg(H(j\omega)) = 0$

- $\omega \gg \omega_0$:

$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_0}{j\omega}$$

$|H(j\omega)|_{dB} = 20log(\omega_0) - 20log(\omega)$
$Arg(H(j\omega)) = -\frac{\pi}{2}$



(d) Es un filtro pasabajos y tiene un ancho de banda ω_0.

(e) Como buscamos la salida en régimen sinusoidal; podemos trabajar con fasores:

$$v_i = Re\{\bar{V}_i.\mathrm{e}^{\mathrm{j}100\omega_0\mathrm{t}}\}$$
$$\bar{V}_i = 1V$$

$$\Rightarrow \bar{V}_o = H(j100\omega_0).\bar{V}_i = \frac{\omega_0}{j100\omega_0 + \omega_0} \approx 0.01.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$v_0(t) = Re\{0.01\mathrm{e}^{j(100\omega_0 - \frac{\pi}{2})}\} = 0.01sen(100\omega_0 t)$$

Nótese que mirando el diagrama de bode se podría haber supuesto el resultado. Pues se cumple que $100\omega_0 \gg \omega_0$.

Problema 2

(a) Trabajamos con fasores:

$$v_i(t) = Re\{\bar{V_i}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}\}$$
$$\bar{V_i} = 1V$$

- $Z_{eq} = \frac{1}{Cj\omega}||Lj\omega = \frac{\frac{Lj\omega}{Cj\omega}}{\frac{1}{Cj\omega}+Lj\omega} = \frac{Lj\omega}{1+LC(j\omega)^2}$

Realizando los divisores de tensión entre Z_{eq} y R:

$$\bar{V_o} = \frac{Z_{eq}}{R+Z_{eq}}\bar{V_i} = \frac{Lj\omega}{R(1-LC\omega^2)+Lj\omega}\bar{V_i}$$

$$\left|\bar{V_o}\right| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2(1-LC\omega^2)^2+L^2\omega^2}}$$
$$\bar{V}_{o\angle} = \frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{L\omega}{R(1-LC\omega^2)})$$

$$\bar{V_R} = \frac{R}{R+Z_{eq}}\bar{V_i} = \frac{R(1-LC\omega^2)}{R(1-LC\omega^2)+Lj\omega}\bar{V_i}$$

$$\left|\bar{V_R}\right| = \left|\frac{R(1-LC\omega^2)}{\sqrt{R^2(1-LC\omega^2)^2+L^2\omega^2}}\right|$$
$$\bar{V}_{R\angle} = -Arctg(\frac{L\omega}{R(1-LC\omega^2)})$$

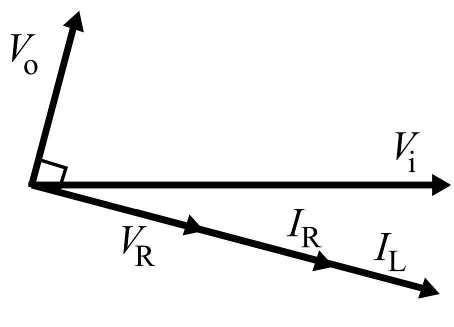
Luego; por ley de Ohm:

$$\bar{I_L} = \frac{1}{Lj\omega}.\bar{V_o}$$

$$\left|\bar{I_L}\right| = \frac{1}{\sqrt{R^2(1-LC\omega^2)^2+L^2\omega^2}}$$
$$\bar{I}_{L\angle} = -Arctg(\frac{L\omega}{R(1-LC\omega^2)})$$

$$\bar{I_R} = \frac{1}{R}.\bar{V_R}$$

$$\left|\bar{I_R}\right| = \left|\frac{(1-LC\omega^2)}{\sqrt{R^2(1-LC\omega^2)^2+L^2\omega^2}}\right|$$
$$\bar{I}_{R\angle} = -Arctg(\frac{L\omega}{R(1-LC\omega^2)})$$



(b)

- $\omega_0 = \frac{1}{RC}$
- $\omega_0 = \frac{R}{L}$
- ${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$

A esta frecuencia y con estos datos tenemos:

$$\left|\bar{V_o}\right| = \frac{\sqrt{2}L\omega_0}{\sqrt{R^2(1-\frac{2{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2})^2+2L^2{\omega_0}^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\bar{V}_{o\angle} = \frac{\pi}{2} - Arctg\left(\frac{\sqrt{2}L\omega_0}{R\left(1-\frac{2{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2}\right)}\right) = \frac{\pi}{2} - Arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{-1}\right) = Arctg\left(\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\bar{V_R}\right| = \left|\frac{R(1-\frac{2{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2})}{\sqrt{R^2(1-\frac{2{\omega_0}^2}{\omega_0}^2)^2+2L^2{\omega_0}^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\bar{V}_{R\angle} = -Arctg\left(\frac{\sqrt{2}L\omega_0}{R\left(1-\frac{2{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2}\right)}\right) = Arctg\left(\sqrt{2}\right) - \pi$$

$$v_o(t) = \left|\bar{V_o}\right|.cos(\sqrt{2}\omega_0 t + \bar{V}_{o\angle})$$
$$v_R(t) = \left|\bar{V_R}\right|.cos(\sqrt{2}\omega_0 t + \bar{V}_{R\angle})$$

(c) La potencia aparente será la potencia total compleja entregada por la fuente; mintras que la potencia activa y la potencia reactiva serán su parte real e imaginaria respectivamente. Sabemos además que la corriente por la fuente es I_R y el voltaje en sus bornes vale V_i. Si los suponemos ambos valores de pico tenemos:

$$\bar{S} = \frac{\bar{V_i}.\bar{I_R}^*}{2}$$

$$\left|\bar{S}\right| = \frac{1}{2\sqrt{3}}VA$$
$$\bar{S}_\angle = -Arctg(\sqrt{2}) + \pi$$

$$W = \frac{1}{2\sqrt{3}}.cos(-Arctg(\sqrt{2}) + \pi)W$$
$$Q = \frac{1}{2\sqrt{3}}.sen(-Arctg(\sqrt{2}) + \pi)Var$$

(d)

$$\bar{I_1} = Y_{11}.\bar{V_1} + Y_{12}.\bar{V_2}$$
$$\bar{I_2} = Y_{21}.\bar{V_1} + Y_{22}.\bar{V_2}$$

$$Y_{11} = \left.\frac{\bar{I_1}}{\bar{V_1}}\right|_{\bar{V_2}=0} = \frac{1}{R}$$

$$Y_{21} = \left.\frac{\bar{I_2}}{\bar{V_1}}\right|_{\bar{V_2}=0} = -\frac{1}{R}$$

$$Y_{12} = \left.\frac{\bar{I_1}}{\bar{V_2}}\right|_{\bar{V_1}=0} = -\frac{1}{R}$$

$$Y_{22} = \left.\frac{\bar{I_2}}{\bar{V_2}}\right|_{\bar{V_1}=0} = -\frac{R(1-LC\omega^2)+Lj\omega}{RLj\omega}$$

(e) Gracias a lo hallado en la parte anterior y al gran conocimiento que tenemos acerca del trabajo con fasores despejamos directamente:

$$i_1(t) = \tfrac{1}{R}.cos(\omega_0 t)$$
$$i_2(t) = -\tfrac{1}{R}.cos(\omega_0 t)$$