Teoría de circuitos
Segundo Parcial

CURE

13 de julio de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [26 pts.]

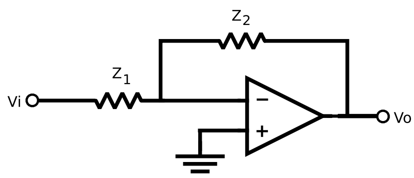


Figura 1

(a) Calcule la transferencia $H_1(s) = \frac{V_o}{V_i}$del circuito de la Figura 1 e indique de que configuración se trata.

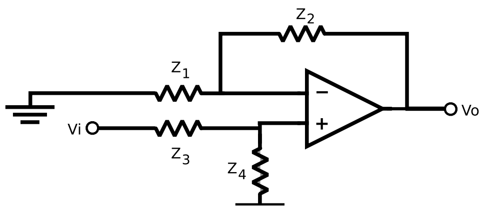


Figura 2

(b) Calcule la transferencia $H_2(s) = \frac{V_o}{V_i}$ del circuito de la Figura 2 e indique de que configuración se trata.

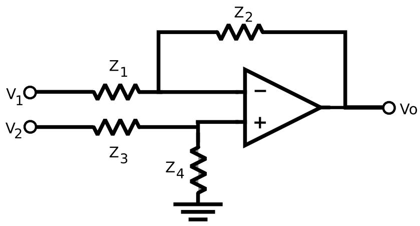


Figura 3

(c) El circuito de la Figura 3 consta de 2 entradas y una salida. Encuentra la expresión de la salida $V_o(s)$ en función de las entradas $V_1(s)$ y $V_2(s)$.

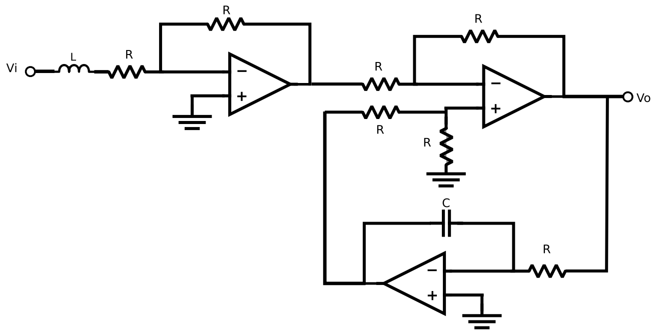


Figura 4

(d) Identifique los bloques del circuito de la figura 4. Calcule la transferencia $H_3(s) = \frac{V_o}{V_i}$ del circuito.

(e) Estudie la estabilidad BIBO del sistema de la figura 4. Justifique la respuesta.

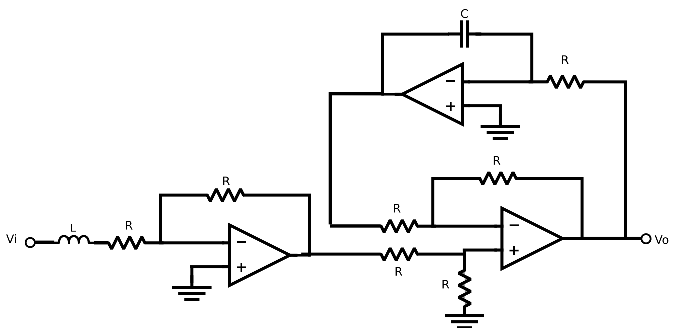


Figura 5

(f) ¿Qué sucede con la estabilidad del sistema con la interconexión de la figura 5?

Problema 2 [22 pts.]

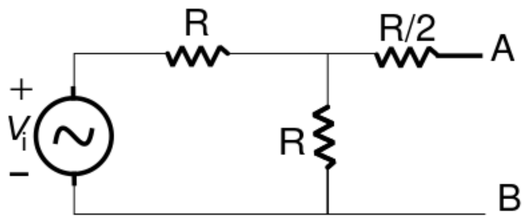


Figura 6

(a) Realizar el circuito equivalente de Thévenin desde las terminales A y B.

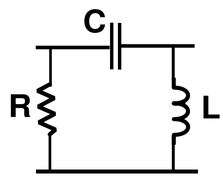


Figura 7

(b) Calcular las Constantes Generales para el cuadripolo de la figura 7 (todos los elementos tienen condiciones iniciales nulas).

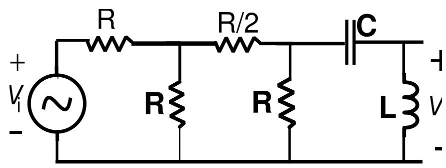


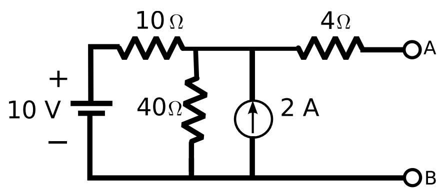
Figura 8

(c) Calcular la transferencia del circuito $H(s) = \frac{V_o}{V_i}$ si el secundario está abierto (corriente nula).

(d) Calcular la salida $v_o(t)$ cuando la entrada v_i es un escalón. Considerar que $\frac{R}{L} = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_n$.

Pregunta [12 pts.]

(a) Defina impedancia vista, voltaje de vacío y enuncie el teorema de Théve-nin.



(b) Calcule el equivalente Thevenin del circuito de la figura

(c) Ahora queremos calcular el equivalente Norton del circuito. Defina y calcule la corriente de cortocircuito.

(d) Que elemento colocaría entre A y B para que la corriente que lo atraviesa sea de $0.5A$. Justifique.

Solución

Problema 1

(a) Se trata de una configuración inversora por lo tanto $H_1(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}$. Esto parte de que se iguala el voltaje en los bornes de un amplificador ideal y no ingresa corriente al mismo. Tenemos entonces que, realizando un nudo en e_- (donde el voltaje es 0, por estar e_+ a tierra), se obtiene la relación:

$$\frac{V_i}{Z_1} = -\frac{V_o}{Z_2}$$

$$H_1(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

(b) Consideremos el circuito de la figura 2. En este caso tenemos la configuración no inversora. Como en la parte (a), utilizando el modelo de amplificador ideal, en ambos bornes del amplificador el voltaje se iguala y no ingresa corriente. Igualando el voltaje en e_+ y e_- obtenemos:

$$\frac{V_i Z_4}{Z_3 + Z_4} = \frac{V_o Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$H_2(s) = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

(c) Utilizando superposición, siendo V_1 y V_2 fuentes independientes entre sí, obtenemos los circuitos de las partes (a) y (b). Es decir que la salida será:

$$V_o = V_2 \frac{(Z_1 + Z_2) Z_4}{Z_1 (Z_3 + Z_4)} - V_1 \frac{Z_2}{Z_1}$$

(d) En la Figura 4, el primer amplificador está en la configuración inversora, el segundo en la configuración planteada en la parte (c) y el tercero en configuración inversora. Llamando V_1 la salida del primer amplificador y V_2 la salida del tercero, tenemos:

$$V_1 = -\frac{R}{R + Ls} V_i$$

$$V_2 = -\frac{\frac{1}{Cs}}{R} V_o = -\frac{1}{RCs} V_o$$

$$V_o = V_2 \frac{(R + R)R}{R(R + R)} - V_1 \frac{R}{R} = V_2 - V_1$$

$$V_o = \frac{R}{R + Ls} V_i - \frac{1}{RCs} V_o$$

$$V_o(1 + \frac{1}{RCs}) = \frac{R}{R + Ls}V_i$$

$$V_o = V_i\frac{R}{R + Ls}\frac{RCs}{1 + RCs}$$

$$H_3(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}}\frac{s}{\frac{1}{RC} - s}$$

(e) Para que se verifique el sistema es BIBO estable, es condición necesaria y suficiente que no tenga su transferencia polos en C^+. Dado que R, L y C son magnitudes físicas siempre mayores que 0, podemos decir que el sistema es BIBO estable.

(f) En este caso las entradas V_1 y V_2 del amplificador no inversor están invertidas. Es decir:

$$V_1 = -\frac{1}{RCs}V_o$$

$$V_2 = -\frac{R}{R + Ls}V_i$$

Por lo que tendremos:

$$V_o = -\frac{R}{R + Ls}V_i + \frac{1}{RCs}V_o$$

$$H_3(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}}\frac{s}{\frac{1}{RC} - s}$$

En este caso, tenemos un polo en $s = \frac{1}{RC}$, por lo que ese polo pertenece a C^+ (R y C siendo positivas) y el sistema no es BIBO estable.

Problema 2

(a) Anulando la fuente, consideramos la impedancia vista desde A y B:

$$Z_V = (R//R) + \frac{R}{2} = R$$

y el voltaje de vacío V_{AB} vale, haciendo un divisor de tensión:

$$V_{AB} = \frac{V_i}{2}$$

(b) Tenemos que las ecuaciones son:

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

Entonces, evaluando para $I_2 = 0$ tenemos:

$$\frac{V_1}{V_2} = A = \frac{Ls + \frac{1}{Cs}}{Ls} = 1 + \frac{1}{LCs^2}$$

$$\frac{I_1}{V_2} = C = \frac{I_1}{V_1}\frac{V_1}{V_2} = \frac{R + \frac{1}{Cs} + Ls}{RLs} = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{RLCs^2}$$

De manera similar, evaluando para $V_2 = 0$ tenemos:

$$\frac{V_1}{I_2} = B = \frac{1}{Cs}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = D = \frac{RCs + 1}{RCs}$$

(c) Usando la parte anterior, podemos reemplazar la primera mitad de circuito por su equivalente de Thevenin y utilizar las constantes generales para el cuadripolo de la segunda mitad.

Viendo que la intensidad en el secundario es nula, podemos trabajar con las constantes generales A y C, y tenemos las ecuaciones siguientes:

$$V_AB = I_1 Z_v + V_1$$

$$AV_2 = V_1$$

$$CV_2 = I_1$$

Uniendolas y usando los resultados anteriores (valores de Z_V, V_AB, A y C) obtenemos:

$$\frac{V_i}{2} = V_2(Z_V C + A) = V_2\left(R\frac{LCs^2 + RCs + 1}{RLCs^2} + 1 + \frac{1}{LCs^2}\right)$$

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_2}{V_i} = \frac{s^2}{4\left(s^2 + \frac{R}{2L}s + \frac{1}{LC}\right)}$$

(d) Cuando la entrada es escalón, su transformada de Laplace vale: $V_i(s) = \frac{V}{s}$ con V constante.
La transferencia calculada es $H(s) = \frac{V_o}{V_i}$, por lo que podemos plantear la salida como:

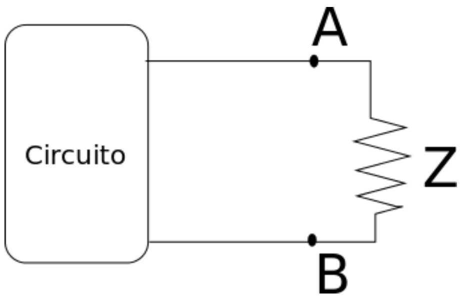
$$V_o = V_i H(s) = \frac{V}{s}$$

Para antitransformar, usamos la fórmula 17 de la tabla, tomando $\zeta = \frac{1}{4}$ y $\omega_n = \frac{R}{L} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ podemos ver que la salida vale:

$$v_o(t) = -\frac{V}{\sqrt{15}} e^{-\frac{\omega_n t}{4}} sen\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\omega_n t + tan^{-1}(\sqrt{15})\right)$$

Pregunta

(a) Dado un circuito como el de la figura, definiremos impedancia vista y voltaje de vacío.



El voltaje de vacío entre dos puntos A y B de un circuito, es el que aparece cuando no existe impedancia entre los puntos. Es decir, lo que mediría un voltímetro ideal entre estos puntos.

La impedancia vista Z_{AB} se obtiene cuando se anulan todas las fuentes del circuito y se aplica una tensión E entre A y B, que genera una corriente I en el circuito. La relación $Z_{AB} = \frac{E}{I}$, que no depende de E (que puede ser cualquiera), es lo que se llama impedancia vista.

El teorema de Thévénin enuncia que "la corriente que pasa por la impedancia Z conectada entre los bornes A y B es $I = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}+Z}$".

Por más información dirigirse a la Unidad 3 (Teoremas de Circuitos) del material del curso de Sistemas Lineales 2, disponible en EVA.

(b) Primero calculemos la impedancia vista. Esta es equivalente a la serie entre la resistencia de 4 ohmios y el paralelo entre la resistencia de 10 ohmios y la de 40 ohmios (verificar anulando las fuentes):

$$Z_{AB} = 4 + \frac{10 * 40}{10 + 40} = 4 + 8 = 12\Omega$$

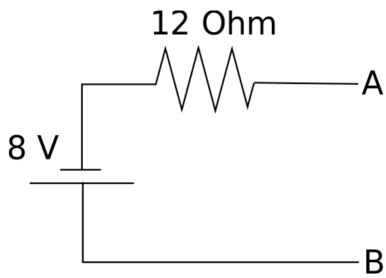
Luego, aplicamos superposición para ver cuanto vale el voltaje de vacío. Anulando primero la fuente de corriente, obtenemos un circuito con una malla y las resistencias de valor 10 Ohm y 40 Ohm. Realizamos un divisor de tensión entre la impedancia de 10 ohmios y la de 40 ohmios (cuyo voltaje es V_{AB}^{V}):

$$V_{AB}^{V} = 10\frac{40}{40 + 10} = 8V$$

Por otro lado, anulando la fuente de tensión, obtenemos un circuito con la fuente de corriente y el paralelo entre las resistencias de 10 y 40 ohmios. El valor (ya calculado) de este paralelo es de 8 Ohm. Cuidando de mantener coherencia en el sentido de la intensidad y voltaje, vemos que el voltaje V_{AB}^{I} vale:

$$V_{AB}^{I} = -2A * 8\Omega = -16V$$

El circuito equivalente de Thévenin será entonces:



(c) La corriente de cortocircuito es la que pasa entre A y B si cortocircuitamos esos dos puntos (es decir, "conectarlos por un cable"). La corriente de cortocircuito además vale:

$$I_{cc} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{-8}{12} = -0.75A$$

Es decir 75 mA que van "desde B hacia A".

(d) Tenemos el circuito equivalente de Thévenin que nos permite simplificar el problema. Dado que tenemos una sola malla, con una fuente de 8 Volts y una resistencia de 12 Ohms, tenemos que sumar un elemento para lograr una corriente en la malla de $0.5A$. Colocando una resistencia de valor 4Ω entre A y B, logramos una resistencia total de 16 Ohms, y por ende una corriente entre A y B de $0.5A$, como se pide en la letra.