Teoría de circuitos
Primer Parcial

CURE

29 de mayo de 2017

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [17 pts.]

Dado el circuito de la figura:

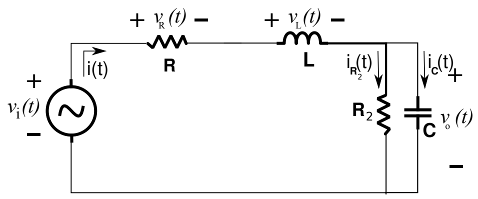


Figura 1

con los siguientes parámetros:

- $v_i(t) = V \cos \omega_0 t$
- $V = 220V$
- $\omega_0 = 2\pi * 20$
- $L = 50mHy$
- $R = 4\Omega$
- $R_2 = 16\Omega$
- $C = 470\mu F$

(a) Calcule los fasores I, V_R, V_L, V_o, I_{R_2} e I_C.

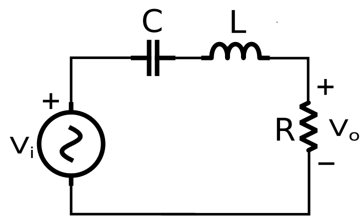
(b) Realice un diagrama fasorial con los fasores calculados en la parte anterior e incluya al fasor asociado a la fuente.

(c) Calcular la potencia activa, reactiva y aparente entregada por la fuente.

(d) Calcular la potencia activa consumida por R y R2. ¿Qué relación tiene con la potencia activa entregada por la fuente?

(e) Compensar el circuito para que no consuma potencia reactiva. Indicar cual elemento colocaría y como lo conectaría al circuito

Problema 2 (17 pts.)



Dado el circuito de la figura, se pide:

(a) Halle la transferencia del circuito $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}$.

(b) Sean $\omega_2 = \frac{R}{L}$ y $\omega_1 = \frac{1}{RC}$, exprese la transferencia en función de ω_1 y ω_2.

(c) Considerando que $\omega_1 << \omega_2$, y usando la identidad $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ para hallar la raíz de menor módulo, pruebe que las raíces del denominador pueden aproximarse por $-\omega_1$ y $-\omega_2$. Verifique que la transferencia queda de la forma:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_2(j\omega)}{(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_2)}$$

(d) Realice el diagrama asintótico de módulo y fase de Bode.

(e) Calcule el valor de la transferencia (módulo y fase) a frecuencia ω_1 y ω_2. Bosqueje el diagrama real de Bode.

(f) De que tipo de filtros se trata? Explique interpretando el diagrama de Bode en función de la frecuencia.

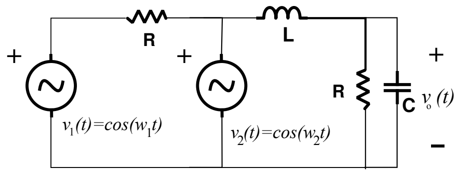
(g) Si la entrada es $v_i(t) = 10sin(\omega_2 t)$, halle la salida $v_o(t)$.

(h) Si la entrada vale ahora $v_i(t) = 10sin(\frac{\omega_1}{10}t)$, cual será ahora la salida? Que aproximación realizó?

Pregunta (6 pts.)

¿Cual es la definición de fasor asociado a una señal sinusoidal?

Explique como utilizar el método de los fasores para un circuito con mas de una fuente como el de la figura.



Solución

Problema 1

(a)

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j16.9314\Omega$$

$$Z_eq = \frac{R_2 Z_C}{R_2 + Z_C} = 8.4522 - j7.9872\Omega$$

$$I = \frac{V_i}{R + Lj\omega + Z_{eq}} = 17.3428 + j2.3733A$$

$$V_R = RI = 69.3714 + j9.4932V$$

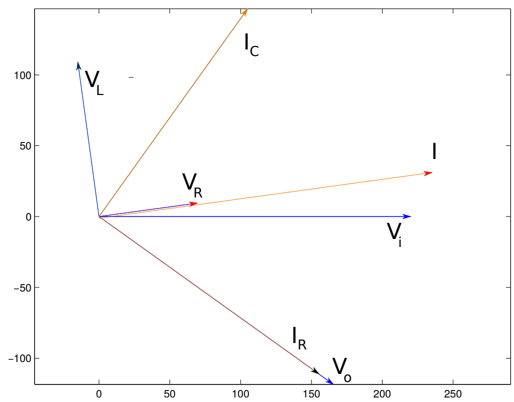
$$V_L = j\omega LI = -14.912 + j108.97V$$

$$V_o = Z_eqI = 165.54e + 02 - j118.46V$$

$$I_R = \frac{V_i}{R_2} = 10.3463 - j7.4038A$$

$$I_C = I - I_R = 6.9966 + j9.7771A$$

(b)



(c)

$$S = \frac{VI^*}{2} = 1907.7 - j261.06$$

$$P = Re[S] = 1907.7W$$

$$Q = Imag[S] = -261.06Var$$

(d)

$$P_R = Re[R|I|^2/2 = 612.8138W$$

$$P_R2 = Re[R|I|^2/2 = 1295W$$

La potencia activa entregada por la fuente es igual a la potencia activa consumida por ambas resistencias.

(e) Como $Q < 0$ el circuito entrega potencia reactiva, para compensar es necesario poner una bobina. Colocandola en paralelo con la fuente tenemos:

$$Q + Q_{comp} = 0$$

$$Q_{comp} = \frac{|V|^2}{\omega L} \rightarrow L = -\frac{|V|^2}{\omega Q} = 1475mHy$$

Problema 2

(a) Realizando un divisor de tensión obtenemos:

$$V_o = V_i \frac{R}{Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega}}$$

Operando, obtenemos:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{RCj\omega}{LC(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}$$

(b) Dividiendo numerador y denominador por LC, tenemos:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{R}{L}j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}j\omega + \frac{1}{LC}}$$

Reemplazando obtenemos:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_2 j\omega}{(j\omega)^2 + \omega_2 j\omega + \omega_2\omega_1}$$

(c) La raíz de mayor módulo será:

$$(j\omega) = \frac{-\omega_2 - \sqrt{\omega_2^2 - 4\omega_2\omega_1}}{2}$$

Usando que $\omega_2 >> \omega_1$ tenemos que $\omega_2^2 >> 4\omega_1\omega_2$, por lo que:

$$(j\omega) = -\omega_2$$

Por otro lado:
$$(j\omega) = \frac{-\omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 - 4\omega_2\omega_1}}{2}$$
Usando la sugerencia:
$$\frac{\omega_2^2 - 4\omega_1\omega_2 - \omega_2^2}{2(\omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 - 4\omega_2\omega_1})} = -\omega_1$$
Finalmente, factorizamos el denominador con las raíces halladas:
$$H(j\omega) = \frac{\omega_2 j\omega}{(j\omega + \omega_2)(j\omega + \omega_1)}$$

(d)

(e)
$$H(j\omega_1) = \frac{j\omega_1\omega_2}{(j\omega_1 + \omega_1)(j\omega_1 + \omega_2)}$$
Considerando $\omega_2 >> \omega_1$ tenemos:
$$H(j\omega_1) = \frac{j}{j+1} = \frac{j+1}{2}$$
El módulo vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y el argumento $\frac{\pi}{4}$.
Para ω_2:
$$H(j\omega_2) = \frac{j\omega_2^2}{(j\omega_2 + \omega_1)(j\omega_2 + \omega_2)}$$
Considerando $\omega_2 >> \omega_1$ tenemos:
$$H(j\omega_2) = \frac{1}{j+1} = \frac{1-j}{2}$$
El módulo vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y el argumento $-\frac{\pi}{4}$.

(f) Se trata de un filtro pasabanda. Atenua la salida a frecuencias menores a ω_1 y mayores a ω_2, copiando la entrada para las frecuencias intermedias.

(g) Usando lo hallado en la parte e), tenemos que la salida será:
$$v_o(t) = \frac{10}{\sqrt{2}} sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{4})$$

(h) Considerando que estamos trabajando a una década por debajo de ω_1, podemos usar el caso ya estudiado para construir el bode de $\omega << \omega_1$. La transferencia será entonces $H(j\frac{\omega_1}{10}) = \frac{j\omega_1}{10\omega_1}$. Tendremos entonces la salida:
$$v_o(t) = 10|H(\frac{j\omega_1}{10})| sin(\frac{\omega_1}{10}t + arg(H(\frac{j\omega_1}{10}))) = sin(\frac{\omega_1}{10}t + \frac{\pi}{2})$$