Teoría de circuitos
Primer Parcial

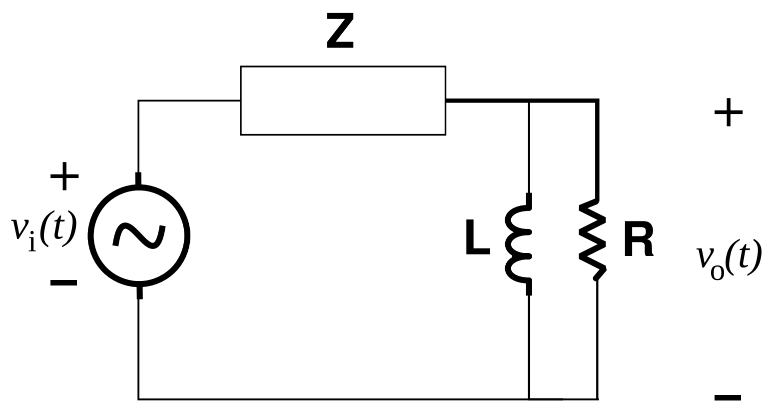
CURE

16 de mayo de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 (15 pts.)



Dado el circuito de la figura, se pide:

(a) Compensación en serie de una bobina. Determine el elemento Z a colocar y calcule su valor en función de la frecuencia $\omega_0 = \frac{R}{L}$ y las demás impedancias, para compensar el factor de potencia del circuito. A partir de aquí y para el resto del problema, Z tomará ese valor.

(b) Determine la transferencia del circuito $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}$, verifique que es de la forma:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + 2j\zeta\omega\omega_n + (\omega_n)^2}$$

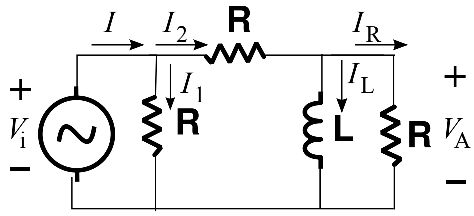
y calcule ζ y ω_n.

(c) Realice el diagrama asintótico de módulo y fase de Bode, y bosqueje el real.

(d) Siendo la entrada $v_i(t) = 10cos(\omega_n t)$, determine la salida como función del tiempo $v_o(t)$.

(e) ¿De qué tipo de filtro se trata?

Problema 2 (15 pts.)



El circuito de la Figura 1 se alimenta con una fuente sinusoidal de la forma $V_i cos(\omega_0 t)$.

Datos:

- $V_i = 220\sqrt{2}V$
- $R = 10\Omega$
- $L = 50mHy$
- $\omega_0 = 100\pi$

(a) Calcule los fasores V_A,I_L,I_R, I_1,I_2 e I.

(b) Realizar un diagrama fasorial incluyendo V_i,V_A,I_L,I_R,I_1,I_2 e I.

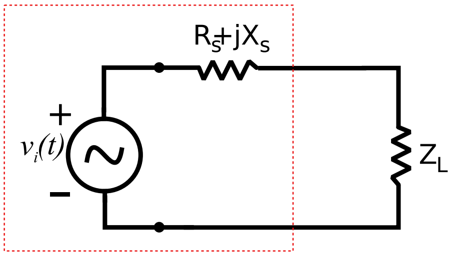
(c) Calcule la potencia aparente, activa y reactiva entregada por la fuente.

(d) Indique que elemento conectaría para compensar la potencia reactiva. Indique su valor y donde lo conectaría.

(e) Luego de realizada la compensación se decide bajar la tensión de la alimentación a la mitad ($V_i = 110\sqrt{2}$). Indique si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas justificando en cada caso:

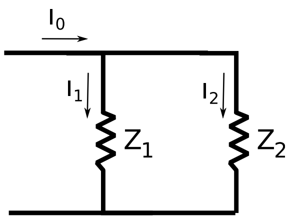
- La compensación calculada anteriormente es la indicada para la nueva tensión.
- La potencia activa pasa a ser la mitad.
- La potencia activa se divide por un factor de 4.
- La potencia apartente se mantiene constante.

Pregunta (5 pts.)



- ¿Qué valor debe tomar la impedancia Z_L para que la transferencia de potencia entre la fuente y la carga sea máxima?
- ¿Cual es la máxima potencia que se puede extraer en el caso de que $R_s = 1\Omega$

Pregunta (5 pts.)



- Calcule las corrientes I_1 e I_2 en función de I_0, Z_1 y Z_2.
- ¿Cuanto vale I_1 eI_2 cuando $Z_1 >> Z_2$?
- En el caso particular de que Z_1 corresponda con un capacitor y Z_2 con una resistencia, ¿qué se puede afirmar sobre I_1 e I_2? Justifique.

Solución

Problema 1

(a) Para compensar el factor de potencia del circuito es necesario que la impedancia equivalente sea únicamente real. Entonces buscaremos el elemento Z que verifica que Z_{eq} es real. Veamos que vale Z_{eq}:

$$Z_{eq} = Z + Lj\omega // R$$
$$Z_{eq} = Z + \frac{RLj\omega}{R + Lj\omega}$$

Busquemos Z tal que anula la parte imaginaria:

$$Z_{eq} = \frac{ZR + ZLj\omega + RLj\omega}{R + Lj\omega} = \frac{(ZR + LZj\omega + RLj\omega)(R - Lj\omega)}{L^2\omega^2 + R^2}$$

Luego de multiplicar el denominador por su complemento (y obtener su módulo al cuadrado), en el numerador tenemos:

$$ZR^2 + RLZj\omega + R^2Lj\omega - LZRj\omega + ZL^2\omega^2 + RL^2\omega^2 = ZR^2 + R^2Lj\omega + ZL^2\omega^2 + RL^2\omega^2$$

Donde observamos que para compensar la parte imaginaria es necesario que Z sea imaginario.
Igualando ahora la parte imaginaria con 0 y reemplazando ω por ω_0 obtenemos:

$$ZR^2 + R^2Lj\omega_0 + ZL^2\omega_0^2 = 0$$
$$Z + Lj\omega_0 + Z = 0$$
$$2Z = -Lj\omega_0$$
$$Z = \frac{L\omega_0}{2j}$$

Por lo que Z es un capacitor de valor C:

$$Z = \frac{1}{Cj\omega_0} = \frac{L\omega_0}{2j} = \frac{R}{2j}$$
$$C = \frac{2}{R\omega_0} = \frac{2L}{R^2}$$

(b) Aplicando divisor de tensión tenemos:

$$V_o = V_i \frac{\frac{RLj\omega}{R+Lj\omega}}{\frac{1}{Cj\omega} + \frac{RLj\omega}{R+Lj\omega}}$$

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{RLj\omega}{\frac{R+Lj\omega}{Cj\omega} + RLj\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{RLC(j\omega)^2}{R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{\frac{1}{LC} + \frac{1}{RC}j\omega + (j\omega)^2}$$

Utilizando el resultado de la parte anterior, y dada la forma planteada en el ejercicio, obtenemos:

$$(\omega_n)^2 = \frac{1}{LC} = \frac{R^2}{2L^2}$$

$$\omega_n = \frac{R}{\sqrt{2}L}$$

Por lo que obtenemos:

$$2\omega_n\zeta = \frac{1}{RC}$$

$$\zeta = \frac{1}{RC}\frac{\sqrt{2}L}{2R} = \frac{L}{C\sqrt{2}R^2} = \frac{L}{\sqrt{2}R^2}\frac{R^2}{2L} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Finalmente reemplazando llegamos al resultado esperado:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(\omega_n)^2 + 2j\zeta\omega\omega_n + (j\omega)^2}$$

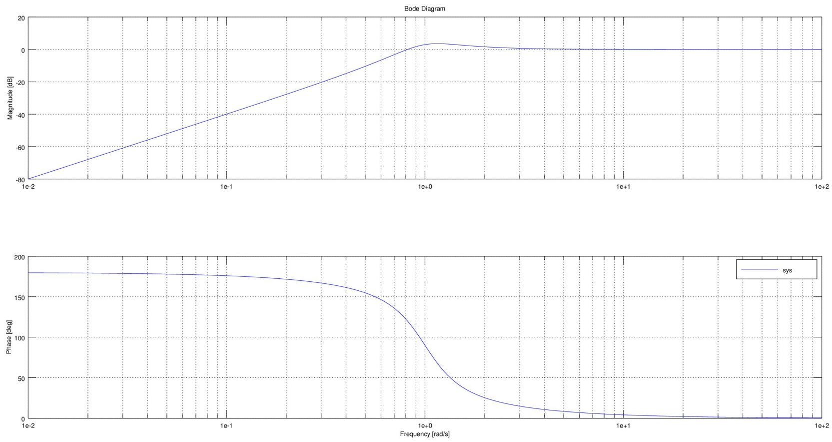
(c) Analizaremos los casos para $\omega << \omega_n$ y $\omega >> \omega_n$.

Si ω«ω_n tenemos $H(j\omega) \approx \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}$.
El módulo vale: $H(j\omega) = 40log(\omega) - 40log(\omega_n)$ y el argumento: $\arg(H(j\omega)) = \pi$

»Cuando ω»ω_n: $H(j\omega) \approx 1$
El módulo resulta: $H(j\omega) = 0$ y el argumento: $\arg(H(j\omega)) = 0$

Observamos que en $\omega = \omega_n$ la transferencia queda: $H(j\omega) \approx \frac{j}{2\zeta} = j$ por lo que el argumento vale $\frac{\pi}{2}$.

Obtenemos el siguiente diagrama:



(d) La salida será $v_o = |H(j\omega)|cos(\omega t + arg(H(j\omega)))$.
Obtenemos entonces, siendo $\omega = \omega_n$ la frecuencia de trabajo y usando la estimación de la transferencia hallada en la parte anterior:

$$v_o = 10\sqrt{2}sin(\omega t) = 10\sqrt{2}cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

(e) Se trata de un filtro pasa-altos, ya que anula las frecuencias bajas y permite pasar las altas (la gráfica del módulo del Bode nos permite verlo con claridad).

Problema 2

(a) Usando un divisor de tensión entre V_i y V_A, podemos ver que:

$$V_A = V_i \frac{\frac{RLj\omega}{R+Lj\omega}}{R + \frac{RLj\omega}{R+Lj\omega}} = V_i \frac{Lj\omega}{R + 2Lj\omega} = 104.82e^{0.3082j}V$$

Tenemos además:

$$I_2 = \frac{V_i - V_A}{R} = V_i \frac{R + Lj\omega}{R(R + 2Lj\omega)} = 12,426e^{-0.2587j}A$$

$$I_1 = \frac{V_i}{R} = 22A$$

Calculado V_A podemos hallar:

$$I_R = \frac{V_A}{R} = 10.482e^{0.3082j}A$$

$$I_L = \frac{V_A}{Lj\omega} = 6.6729e^{-1.2626j}A$$

Y finalmente (lo necesitaremos para la parte b)):

$$I = I_1 + I_2 = 34.16e^{-0.0932j}A$$

(b)

(c) La potencia aparente es:

$$S = V_i\bar{I} = \frac{220^2}{\bar{z}_{eq}} = \frac{220\overline{(2R+3Lj\omega)}}{\overline{R(R+2Lj\omega)}} = 7482.64 + 699.44jVa$$

Por lo que tenemos:

$$Q = Im(S) = 699.44Var$$
$$P = Re(S) = 7482.64W$$

(d) Para compensar la potencia reactiva queremos agregar un elemento cuya potencia reactiva sea igual a la del resto del circuito. Buscamos entonces un condensador de valor C tal que en paralelo con la fuente compense la potencia reactiva (recordemos que la impedancia será $\frac{1}{Cj\omega}$):

$$Q_c = \frac{|V_i|^2}{\bar{z}_c} = 220^2 C\omega = Q$$
$$C = \frac{Q}{|V_i|^2\omega}$$

Obtenemos que es necesario un capacitor de valor $C = 46\mu F$ en paralelo con la fuente.

(e)

- Verdadero. Observar que la fórmula de C no depende de V_i si reemplazamos el valor de Q por su expresión.
- Falso. Observar que cuando trabajamos con potencia, los voltajes o intensidades terminan estando al cuadrado.
- Verdadero. Observar respuesta anterior.
- Falso. Si la compensación se mantiene, y la potencia activa se modifica, la potencia aparente se modifica. También debería ser evidente a partir de la expresión de la potencia aparente $S = V\bar{I} = \frac{|V_i|^2}{\bar{z}_{eq}}$. En este caso no se modifica ninguna impedancia, simplemente V_i, por lo que S seguro cambiará.

Pregunta

- Planteamos la potencia activa que recibirá la carga:

$$P = Re\{V_L \bar{I}_L\} = Re\{\frac{Z_L V_i}{Z_L + Z_S}\overline{\frac{V_i}{Z_L + Z_S}}\} = Re\{\frac{Z_L V_i^2}{|Z_L + Z_S|^2}\}$$

  Separando complejos y reales (puedo considerar que la impedancia Z_L se puede modelar de la forma $Z_L = R_L + jX_L$ y $Z_S = R_S + jX_S$), tenemos:

$$P = \frac{R_L V_i^2}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}$$

  Esto es lo que queremos maximizar. Para esto, podemos derivar (e igualar el gradiente a 0) según X_L y R_L o realizar una maximización en dos pasos. Haremos la segunda, y comenzaremos por ver que si $X_L = X_S$ entonces se maximiza P según X_L.

  Tenemos entonces que maximizar (según R_L):

$$P = \frac{R_L V_i^2}{(R_S + R_L)^2}$$

  Para esto, derivamos según R_L e igualamos a 0. Obtenemos:

$$\frac{dP}{dR_L} = V_i^2(\frac{1}{(R_S + R_L)^2} - \frac{2(R_S + R_L)R_S}{(R_S + R_L)^4} = \frac{R_S + R_L}{(R_S + R_L)^3} - \frac{2R_S}{(R_S + R_L)^3} = 0$$

  Para que se iguale a 0, realizado el denominador común, obtenemos $R_S = R_L$. En conclusión, la carga Z_L debe ser el conjugado de Z_S, es decir:

$$Z_L = R_S - jX_S$$

  Para lo que la potencia vale:

$$P = \frac{R_L V_i^2}{(R_S + R_L)^2} = \frac{V_i^2}{4R_S}$$

- Como vimos en la parte anterior, la potencia máxima vale (con $R_S = 1\Omega$):

$$P = \frac{V_i^2}{4R_S} = \frac{V_i^2}{4}$$

Pregunta

- Para comenzar, podemos ver que el voltaje en bornes de Z_1 y Z_2 es el mismo, y es equivalente a $I_0 Z_e q = V$.

  Tenemos entonces las siguientes ecuaciones (realizando un nudo en bornes de Z_1 y Z_2):

$$V = I_0 Z_e q = I_1 Z_1 = I_2 Z_2$$
$$I_0 = I_1 + I_2$$
$$Z_e q = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

  Operando, obtenemos:

$$I_1 = I_0 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$
$$I_2 = I_0 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

- Si $Z_1 >> Z_2$, podemos ver en las relaciones halladas anteriormente que en el denominador el valor de Z_2 será despreciable frente al de Z_1.

  Obtenemos entonces:

$$I_1 \approx I_0 \frac{Z_2}{Z_1} \approx 0$$
$$I_2 \approx \frac{Z_1}{Z_1} \approx I_0$$

- Para el caso en que Z_1 es un capacitor (C) y Z_2 una resistencia (R), tenemos:

$$I_1 = I_0 \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = I_0 \frac{Rj\omega C}{Rj\omega C + 1}$$
$$I_2 = I_0 \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = I_0 \frac{1}{RjC\omega + 1}$$

  Podemos concluir entonces que, dado que $V = I_0 \frac{R}{Rj\omega C+1}$, la corriente I_2 está en fase con V (el voltaje en bornes de las impedancias), y la corriente I_1 está adelantada $\frac{\pi}{2}$ al voltaje (y a I_2). Cuando una corriente adelanta a otra por $\frac{\pi}{2}$ se dice que está en cuadratura (podemos ver también que si una es un seno, la otra será un coseno).

Nota: si considerabamos las corrientes en función del voltaje, llegabamos a las relaciones: $V = \frac{I_1}{j\omega C}$ y $V = I_2 R$, que desembocan en las mismas conclusiones.