Teoría de circuitos
Parcial

CURE

17 de mayo de 2013

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deber comenzar en una hoja nueva.Se evaluar explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1

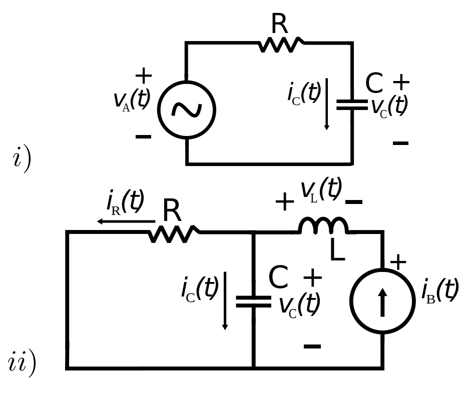

Figura 1: Circuitos del problema 1.a

Para todo el problema considerar que se cumplen las siguientes condiciones:

- $R = 10\Omega$
- $RC\omega_0 = L\omega_0/R = 1$

En los circuitos de la figura 1 hay dos fuentes sinusoidales, una fuente de tensión $v_a(t) = V_a cos(\omega_0 t)$ y una fuente de corriente $i_b(t) = I_b cos(\sqrt{3}\omega_0 t)$.

(a) Hallar la corriente $i_c(t)$ que circula por el condensador y el voltaje en sus bornes $v_c(t)$ en ambos circuitos.

(b) Enunciar el principio de superposición.

(c) Hallar la corriente $i_c(t)$ y el voltaje $v_c(t)$ que circula por el condensador. Justificar

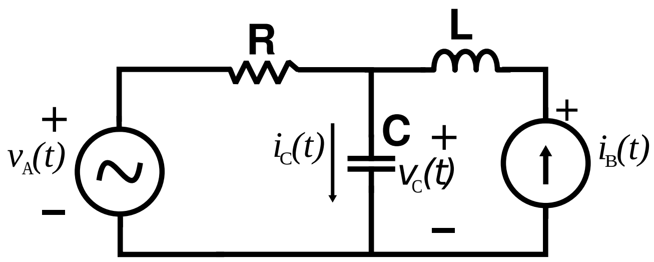

Figura 2: Circuito del problema 1.c

(d) Además de los fasores calculados en la parte a) (V_C e I_C) calcular los fasores V_L e I_R asociados a: $v_L(t)$ e $i_R(t)$ en el circuito *ii*) de la figura 1 y realizar un diagrama fasorial donde se incluyan los fasores V_L, I_R, I_b, V_c e I_c .

Problema 2

El circuito de la figura 3 se alimenta con una fuente sinusoidal de la forma $v_i(t) = V_i cos\omega t$.

Datos:

- $R_1 = 1\,k\Omega$
- $R_2 = 50\,\Omega$
- $L = 100\,mHy$

(a) Demuestre que la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_L(j\omega)}{V(j\omega)}$ tiene la forma:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_2}$$

Encuentre ω_1 y ω_2.

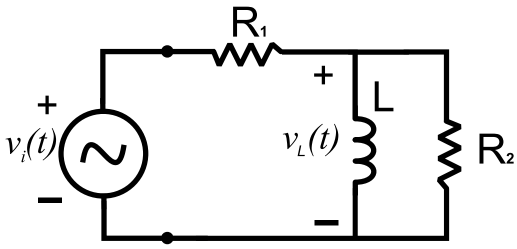

Figura 3: Circuito del problema 2

(b) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$ y bosquejar los diagramas reales.

(c) Si se introduce una entrada en régimen $v_i(t) = Acos(\omega_1 t)$. Indicar como es la señal $v_L(t)$.

(d) Indicar a que filtro corresponde

(e) Se desea compensar el factor de potencia, pero solo se tiene acceso a los bornes de la fuente. Indique como solucionaría el problema y determine el valor de los elementos utilizados.

Pregunta

(a) Divisor de voltaje: Dado n impedancias en serie como se muestra en la figura 4 (izquierda) , deduzca la expresión para el voltaje en la impedancia k-esima

(b) Divisor de corriente: Dado n admitancias en paralelo como se muestra en la figura 4 (derecha), deduzca la expresión para la corriente por la admitancia k-esima

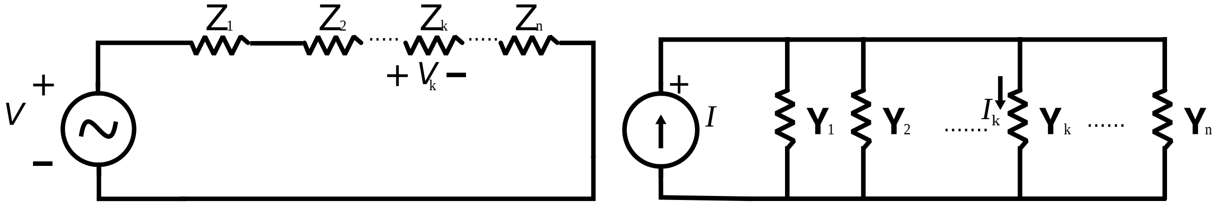

Figura 4: Figura de la pregunta

Solución

Problema 1

(a) i) Trabajando con fasores y utilizando un divisor de tensión en el circuito resulta:

$$V_{C1} = \frac{V_A}{RCj\omega_0 + 1}$$

La corriente por el condensador se puede obtener a partir de

$$I_{C1} = Cj\omega_0 V_{C1} = \frac{Cj\omega_0 V_A}{1 + RCj\omega_0}$$

A partir de estos resultados podemos encontrar la señales de intensidad y voltaje en el tiempo.

$$v_{C1}(t) = I\!R\{|V_{C1}(j\omega_0)|e^{arg(V_{C1}(j\omega_0))}e^{\omega_0 t}\}$$
$$i_{C1}(t) = I\!R\{|I_{C1}(j\omega_0)|e^{arg(I_{C1}(j\omega_0))}e^{\omega_0 t}\}$$

Por último resulta:

$$v_{C1}(t) = \frac{V_A}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}} \cos(\omega_0 t - \arctan(RC\omega_0))$$
$$i_{C1}(t) = \frac{C\omega_0 V_A}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}} \cos(\omega_0 t + \pi - \arctan(RC\omega_0))$$

ii) Trabajando con fasores y utilizando un divisor de corriente en el circuito resulta:

$$I_{C2} = \frac{\sqrt{3}RCj\omega_0 I_B}{\sqrt{3}RCj\omega_0 + 1}$$

El voltaje por el condensador se puede obtener a partir de

$$V_{C2} = \frac{I_{C2}}{\sqrt{3}Cj\omega_0} = \frac{RI_B}{1 + \sqrt{3}RCj\omega_0}$$

A partir de estos resultados podemos encontrar la señales de intensidad y voltaje en el tiempo.

$$v_{C2}(t) = I\!R\{|V_{C2}(j\sqrt{3}\omega_0)|e^{arg(V_{C2}(j\sqrt{3}\omega_0))}e^{\sqrt{3}\omega_0 t}\}$$
$$i_{C2}(t) = I\!R\{|I_{C2}(j\sqrt{3}\omega_0)|e^{arg(I_{C2}(j\sqrt{3}\omega_0))}e^{\sqrt{3}\omega_0 t}\}$$

Por último resulta:

$$v_{C2}(t) = \frac{RI_B}{\sqrt{1 + 3(RC\omega_0)^2}} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t - \arctan(\sqrt{3}RC\omega_0))$$
$$i_{C2}(t) = \frac{\sqrt{3}RC\omega_0 I_B}{\sqrt{1 + 3(RC\omega_0)^2}} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \pi - \arctan(\sqrt{3}RC\omega_0))$$

(b) Ver teórico.

(c) Aplicando superposición se tiene que

$$i_C(t) = i_{C1}(t) + i_{C2}(t)$$

$$v_C(t) = v_{C1}(t) + v_{C2}(t)$$

Teniendo presente que $R = 10\Omega$ y $RC\omega_0 = 1$ finalmente se obtiene:

$$i_C(t) = \frac{V_A}{(10\Omega)\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t + \pi - \arctan(RC\omega_0)) + \frac{\sqrt{3}I_B}{2} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \pi - \pi/3)$$

$$v_C(t) = \frac{V_A}{\sqrt{2}} \cos(\omega_0 t - \pi/4) + \frac{(10\Omega)I_B}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t - \pi/3)$$

(d) Los fasores de interés en función de I_B se listan a continuación:

$$V_L = I_B(10\Omega)j$$

$$I_R = \frac{I_B}{1 + \sqrt{3}j}$$

$$I_C = \frac{\sqrt{3}I_B j}{1 + \sqrt{3}}$$

$$V_C = \frac{I_C}{j(10\Omega)\sqrt{3}} = \frac{I_B}{(10\Omega)(1 + \sqrt{3})}$$

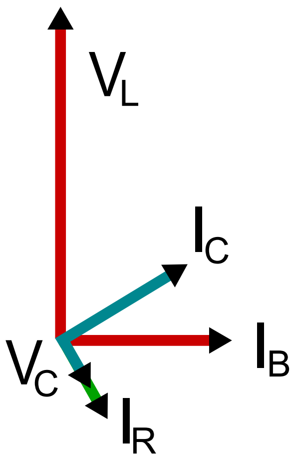

Figura 5: Diagrama fasorial del problema 1.d (La escala es aproximada)

Problema 2

(a) Trabajando con fasores y utilizando un divisor de voltaje se obtiene:

$$V_L = \frac{Lj\omega//R_2}{Lj\omega//R_2 + R_1} V_i$$

Con lo cual:

$$H(j\omega) = \frac{Lj\omega//R_2}{Lj\omega//R_2 + R_1}$$

Resolviendo el paralelo y operando resulta:

$$H(j\omega) = \frac{(L/R_1)\, j\omega}{1 + L\left(\frac{R_2+R_1}{R_1 R_2}\right) j\omega}$$

Siendo las pulsaciones de interés:

$$\omega_1 = \frac{R_1}{L} = 10000\, rad/s$$

$$\omega_2 = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} = 476\, rad/s$$

(b) Para realizar los diagramas asintóticos estudiaremos dos zonas:

- $\omega << \omega_2$

  $$H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{\omega_1}$$

  O sea que el diagrama asintótico del módulo en esta zona es una recta con pendiente de $20\, dB$ por década que pasa en $\omega = \omega_2$ por $20log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\ dB$.
  La fase es constante con valor $\pi/2$.

- $\omega_2 << \omega$

  $$H(j\omega) \approx \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right)}{\left(\frac{j\omega}{\omega_2}\right)} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

  O sea que el diagrama asintótico del módulo en esta zona es una recta horizontal en el valor $20log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\ dB$
  La fase es constante con valor 0.

(c) Utilizando la transferencia podemos afirmar que:

$$v_L(t) = |H(j\omega_1)| A\cos(\omega_1 t + \arg(H(j\omega_1)))$$

Notar que $\omega_2 << \omega_1$ por lo tanto se tiene:

$$v_L = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) A\cos(\omega_1 t)$$

(e) Como solo se tiene acceso a los bornes de la fuente, una manera práctica de compensar el factor de potencia es colocando un condensador en paralelo con la fuente, de manera que la nueva Z_{vista} por la fuente sea 100 % real.
La carga inicial del circuito presenta una $Z_{eq} = R_1 + Lj\omega // R_2$, por lo tanto buscamos un condensador que permita anular la parte imaginaria de Z_{vista}:

$$Im\left\{Z_{vista}\right\} = Im\left\{\frac{1}{Cj\omega} // Z_{vista}\right\} = 0$$

Operando resulta:

$$Z_{vista} = \frac{\frac{[R_1R_2 + Lj\omega_0(R_1+R_2)]}{Cj\omega_0(R_2+Lj\omega_0)}}{\frac{1}{Cj\omega_0} + \frac{R_1R_2+Lj\omega_0(R_1+R_2)}{R_2+Lj\omega_0}} = \frac{[R_1R_2 + Lj\omega_0(R_1+R_2)]}{R_2 - CL\omega_0^2(R_1+R_2) + j\omega_0(L + CR_1R_2)}$$

Imponiendo que la parte imaginaria sea cero se obtiene la siguiente ecuación:

$$-R_1R_2\left(L + R_1R_2C\right) + L\left(R_1 + R_2\right)\left[R_2 - \omega_0^2 CL\left(R_1 + R_2\right)\right] = 0$$

Finalmente despejando llegamos al valor del condensador:

$$C = \frac{R_2^2 L}{R_1^2R_2^2 + \omega_0^2(R_1+R_2)^2L^2}$$

Pregunta

(a) Por ley de mallas de Kirchhoff:

$$V_s = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

Por ley de Ohm:

$$V_k = Z_k I$$

Con I la corriente por las impedancias. Notar que es la misma para todas ellas.

$$\Rightarrow\ V_s = I(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)$$

Podemos despejar I y hallar la caída de potencial en la impedancia n-ésima:

$$I = \frac{V_s}{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n}\ \Rightarrow\ V_k = \frac{Z_kV_s}{\sum_{k=1}^{n} Z_k}$$

(b) Véase que la caída de potencial para cada admitancia vale lo mismo ya que están en paralelo. LLamamos a esta caída de potencial V_s.

$$I_k = Y_kV_k$$

Con V_k la caída de potencial en la k-ésima admitancia. Tenemos entonces que: $V_k = V_s$

$$\Rightarrow \ I_k = Y_k V_s$$

La ley de nudos de Kirchhoff nos afirma que:

$$I_s = I_1 + I_2 + \ldots + I_n \ \Rightarrow \ I_s = V_s(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$$

Despejando V_s tenemos:

$$V_s = \frac{I_s}{\sum_{K=1}^{n} Y_k}$$

Finalmente, la corriente por la k-ésima admitancia será:

$$I_k = \frac{Y_k I_s}{\sum_{K=1}^{n} Y_k}$$