Teoría de circuitos
Parcial

CURE

30 de abril de 2012

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deber comenzar en una hoja nueva.Se evaluar explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1

Sea el circuito de la figura 1.

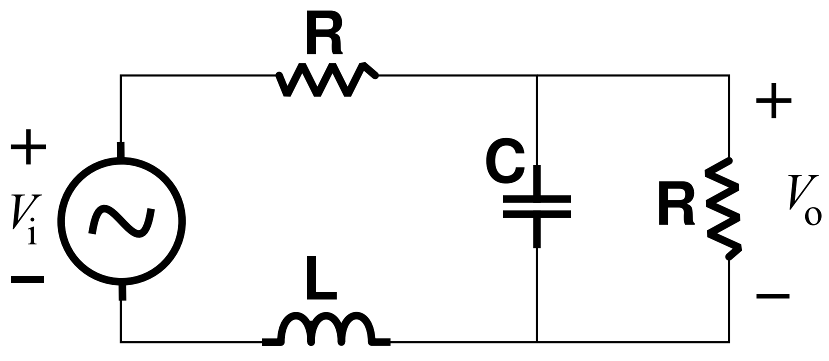

Figura 1: Circuito del problema 1

(a) Demuestre que la transferencia del circuito en cuestión $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ vale:

$$H(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{{\omega_0}^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + {\omega_0}^2}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{2}}{RC}$$

(b) Demuestre que $H(j\omega)$ cuenta con dos polos complejos conjugados. Determine sus valores en función de ζ y ω.

(c) Realice los diagramas de Bode de módulo y fase de $H(j\omega)$. Bosqueje los reales y determine los valores exactos (módulo en dB y fase) en $\omega = \omega_0$.

(d) ¿A qué tipo de filtro corresponde?

(e) Se inyecta una entrada $v_i(t) = A.cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{3})$. ¿Cómo será la señal a la salida del sistema?

(f) Realice un análisis cualitativo acerca de qué esperaría ver a la salida del sistema, si a este se le inyectara la misma señal que en la parte anterior, pero a una frecuencia $\omega_0' = 1000\omega_0$.

Problema 2

El circuito de la figura 2 se alimenta con una fuente sinusoidal de la forma $V_i cos\omega_0 t$.

Datos:

- $V_i = 100V$
- $R = 5\Omega$
- $L = 86,6mHy$
- $C = 500\mu F$

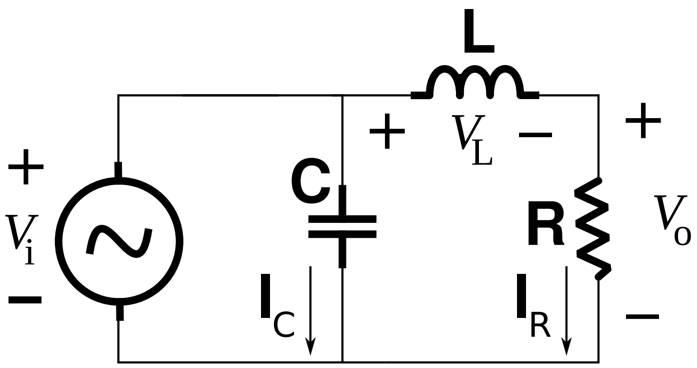

Figura 2: Circuito del problema 2

(a) Indique para que valores de frecuencia la amplitud de la corriente en régimen I_R es mayor a $10A$.

En adelante se trabajará con una frecuencia $\omega_0 = 100$.

(b) Calcular los fasores I_C, I_R, V_R y V_L e incluirlos en un diagrama fasorial.

(c) Indicar la expresión temporal del voltaje en la resistencia $v_R(t)$

(d) Calcular la potencia aparente, activa y reactiva entregada por la fuente

(e) ¿Qué elemento colocaría para realizar una compensación de potencia reactiva? Justificar.

Pregunta

Suponga que un elemento de un circuito consume una corriente $i(t) = I_0 cos(\omega_0 t + \varphi)$ y voltaje $v(t) = V_0 cos(\omega_0 t)$ se pide:

(a) Demostrar que la potencia instantánea $p(t)$ tiene una componente oscilatoria y una componente de continua[1]

(b) Defina potencia aparente, activa y reactiva

(c) Muestre que la potencia activa coincide con la potencia media

[1] Puede ser útil la siguiente propiedad: $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$

Solución

Problema 1

(a) Trabajamos con fasores:

$$v_i(t) = Re\{\bar{V}_i.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}\}$$
$$v_o(t) = Re\{\bar{V}_o.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}\}$$

Llamemos a la impedancia equivalente al paralelo de la resistencia y el condensador Z_{eq}:

$$Z_{eq} = \frac{1}{Cj\omega}||R = \frac{R}{1 + RCj\omega}$$

Calculamos ahora $\bar{V}_o$ en función de $\bar{V}_i$ realizando un divisor de tensión:

$$\bar{V}_o = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R + Lj\omega}\bar{V}_i = \frac{R}{RCL(j\omega)^2 + (R^2C + L)(j\omega) + 2R}\bar{V}_i$$

De manera equivalente:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{CL}}{(j\omega)^2 + (\frac{R}{L} + \frac{1}{RC})(j\omega) + \frac{2}{RC}}$$

Como $\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{2}}{RC}$ y $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{2}{LC} = {\omega_0}^2$$
$$\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right) = 2.\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

Y por lo tanto:

$$H(j\omega) = \frac{1}{2}.\frac{{\omega_0}^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + {\omega_0}^2}$$

(b) Los polos de $H(j\omega)$ son los siguientes:

$$\omega_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{(2\zeta\omega_0)^2 - 4.\omega_0^2}}{2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Y como $\zeta < 1$:

$$\omega_1 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$
$$\omega_2 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

(c)

$$H(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{{\omega_0}^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + {\omega_0}^2}$$

$\underline{\omega \ll \omega_0:}$ $H(j\omega) \approx \frac{1}{2}$

$$\angle H(j\omega) = 0$$
$$|H(j\omega)|_{dB} = -20.log(2)$$

$\underline{\omega \gg \omega_0:}$ $H(j\omega) \approx \frac{{\omega_0}^2}{2(j\omega)^2}$

$$\angle H(j\omega) = -\pi$$
$$|H(j\omega)|_{dB} = 20.log(\frac{{\omega_0}^2}{2}) - 40.log(\omega)$$

Además, para $\omega = \omega_0$:

$$H(j\omega)|_{\omega_0} = -\frac{j}{4\zeta}$$

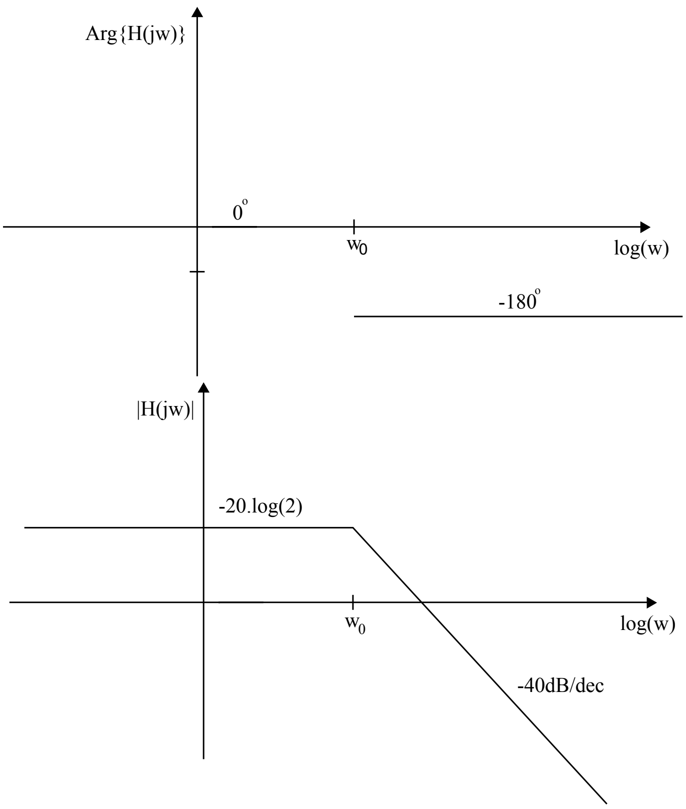

Figura 3: Diagramas de bode asintóticos de $H(j\omega)$.

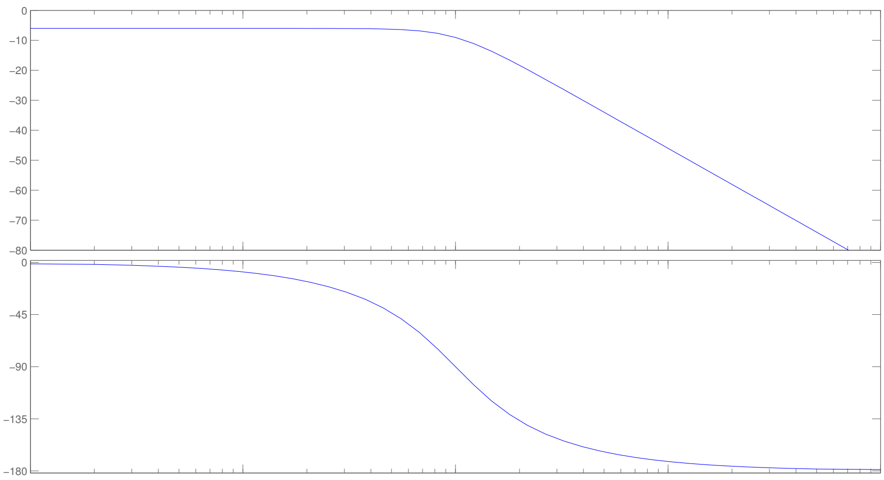

Figura 4: Diagramas de bode reales de $H(j\omega)$. Arriba el de fase y abajo el de módulo.

(d) Corresponde a un filtro pasabajos de frecuencia de corte $\omega_c = \omega_0$

(e) La señal a la salida del sistema será:

$$v_o(t) = |H(j\omega_0)|\, A.cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{3} + \angle H(j\omega_0)) = \frac{\sqrt{2}}{4} A.cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})$$

(f) Una frecuencia $\omega_0' = 1000\omega_0$, es una frecuancia 3 décadas por encima de ω_0, la frecuencia de corte del filtro. De esta manera, al inyectar una señal con $\omega = \omega_0'$ esperaríamos una salida de amplitud muy chiquita, casi nula (aproximadamente $120dB$ por debajo de la señal original) y retardada π respecto de esta última.

Problema 2

(a) Trabajamos con fasores:

$$\begin{aligned} v_i(t) &= Re\left\{\bar{V}_i e^{j\omega t}\right\} \\ v_o(t) &= Re\left\{\bar{V}_o e^{j\omega t}\right\} \\ v_L(t) &= Re\left\{\bar{V}_L e^{j\omega t}\right\} \\ i_R(t) &= Re\left\{\bar{I}_R e^{j\omega t}\right\} \\ i_C(t) &= Re\left\{\bar{I}_C e^{j\omega t}\right\} \end{aligned}$$

Calculamos el fasor $\bar{I}_R$, para luego evaluar su módulo (o lo que es lo mismo, su módulo al cuadrado):

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}_i}{R+Lj\omega}$$
$$\left|\bar{I}_R\right|^2 = \frac{100^2}{5^2+(0.0866\omega_0)^2} \geq 100A^2$$
$$10000 \geq 2500 + 0.75.\omega_0^2$$

Finalmente:

$$\omega_0 \leq 100rad.s^{-1}$$

(b) De la parte anterior:

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}_i}{R+Lj\omega_0} = \frac{100V}{5\Omega + j8.66\Omega} = 10A.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}60^{\mathrm{o}}}$$

$$|\bar{I}_R| = 10A$$
$$\angle\bar{I}_R = -60^o$$

Calculamos ahora el resto de los fasores:

$$\bar{V}_L = \bar{I}_R.Lj\omega_0 = 10A.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}60^{\mathrm{o}}}.\mathrm{j}8.66\Omega = 86.6\mathrm{V}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^{\mathrm{o}}}$$

$$|\bar{V}_L| = 86.6V$$
$$\angle\bar{V}_L = 30^o$$

$$\bar{V}_o = \bar{I}_R.R = 10A.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}60^{\mathrm{o}}}.5\Omega = 50\mathrm{V}.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}60^{\mathrm{o}}}$$

$$|\bar{V}_o| = 50V$$
$$\angle\bar{V}_o = -60^o$$

$$\bar{I}_C = \bar{V}_i.Cj\omega_0 = 100V.0.05j\Omega^{-1} = 5A.\mathrm{e}^{\mathrm{j}90^{\mathrm{o}}}$$

$$|\bar{I}_C| = 5A$$
$$\angle\bar{I}_C = 90^o$$

Obtenemos entonces, el diagrama fasorial de la figura 5.

(c)

$$v_o(t) = Re\left\{50V.\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0\mathrm{t}-\frac{\pi}{3})}\right\} = 50V.cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{3}\right)$$

(d) La corriente total entregada por la fuente es:

$$\bar{I} = \bar{I}_C + \bar{I}_R = j5A + (5 - j8.66)A = (5 - j3.66)A$$

La potencia aparente entregada por la fuente vale:

$$\bar{S} = \frac{\bar{V}_i.\bar{I}^*}{2} = \frac{1}{2}.100V.(5 + j3.66)A = (250 + j183)VA$$

Finalmente, las potencias activa y reactiva entregadas por la fuente valen:

$$P = 250W$$
$$Q = 183Var$$

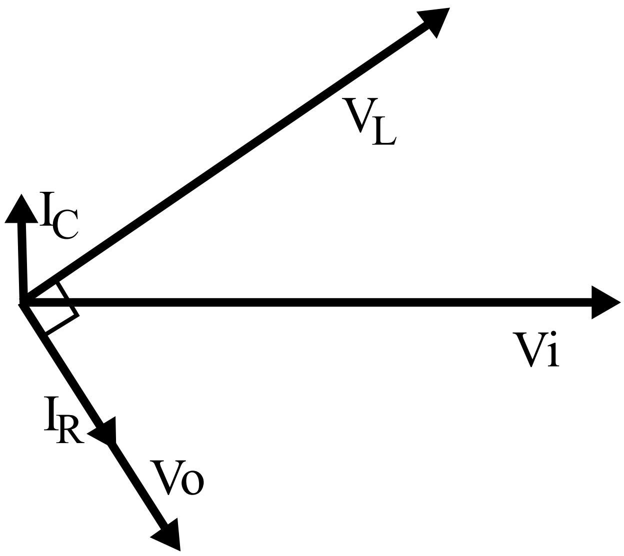

Figura 5: Diagrama fasorial del problema 2.

(e) Que la fuente entregue un valor positivo de potencia reactiva denota la existencia algún componente consumiendo potencia de este tipo. Sabemos que quienes entregan potencia reactiva son los condensadores, mientras que las bobinas la consumen. Lo que necesitamos entonces para compensar la potencia reactiva del circuito es un capacior (¡otro más!), que entregue la potencia reactiva consumida por la bobina.

Pregunta

(a) Por definición:

$$p(t) = v(t).i(t) = V_o.cos(\omega_0 t).I_0.cos(\omega_0 t + \phi)$$

Como $cos(a).cos(b) = \frac{1}{2}\left[cos(a+b) + cos(a-b)\right]$, tenemos que:

$$p(t) = \frac{V_o.I_o}{2}\left[cos(2\omega_0 t + \phi) + cos(\phi)\right]$$

siendo la de la izquierda la componente periódica y la de la derecha la componente constante.

(b) Sea $\bar{V}$, el fasor asociado al voltaje, e $\bar{I}$ el fasor asociado a la corriente sobre un componente eléctrico, se define la potencia aparente ($\bar{S}$) como el complejo obtenido de la expresión:

$$\bar{S} = \frac{\bar{V}.\bar{I}^*}{2}$$

donde $\bar{I}^*$ denota el fasor complejo conjugado de $\bar{I}$.
Se define además la potencia activa (P) como la parte real de la potencia aparente, y la potencia reactiva (Q), como la parte imaginaria de dicha potencia.

$$P = Re\{S\} = S.cos(\phi)$$
$$Q = Im\{S\} = S.sen(\phi)$$

siendo S y ϕ el módulo y la fase de $\bar{S}$ respectivamente.

(c) Sean el voltaje y la corriente de un componente eléctrico como los de la letra, sus fasores asociados serán:

$$\bar{V} = V_0$$
$$\bar{I} = I_0.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$$

La potencia aparente consumida por dicho componente será:

$$\bar{S} = \frac{V_0.I_0}{2}\mathrm{e}^{-j\phi}$$

Y la potencia activa consumida será la parte real de $\bar{S}$:

$$P = \frac{V_0.I_0}{2}cos(\phi)$$

Por su parte, se define la potencia media (para el régimen sinusoidal) como el promedio de la potencia instantánea en un período:

$$\bar{p}(t) = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} p(t)dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \frac{V_o.I_o}{2}\left[cos(2\omega_0 t + \phi) + cos(\phi)\right]dt$$
$$= \frac{\omega_0}{2\pi}.\frac{V_o.I_o}{2}.cos(\phi)\ t\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$$\bar{p}(t) = \frac{V_o.I_o}{2}.cos(\phi)$$

Queda demostrada entonces la siguente igualdad:

$$P = \bar{p}(t)$$