Teoría de circuitos
Primer Parcial

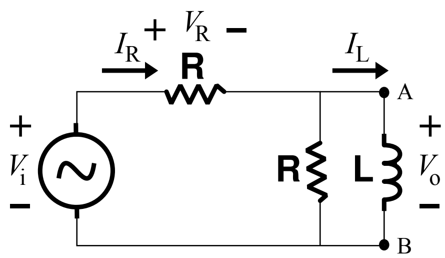
CURE

12 de abril de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deber comenzar en una hoja nueva.Se evaluar explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [15 pts.]



El circuito de la figura se alimenta con una fuente $v_i = V.cos(\omega_0 t)$.

Datos:

- L=1 H
- R= 100 Ω
- $V = 10Volts$
- $\omega_0 = 100$ rad/s

Se pide:

(a) Calcular la salida en régimen $v_o(t)$. y la corriente $i_L(t)$

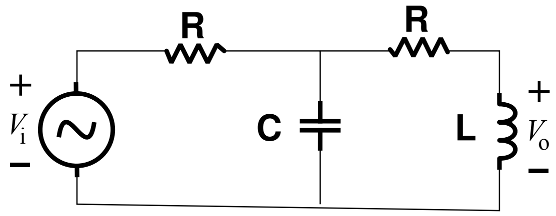
(b) Realizar un diagrama fasorial incluyendo: V_i, V_o, I_R, I_L y $V_R(t)$

(c) Cacular la potencia activa entregada por la fuente

(d) Cacular la potencia reactiva entregada por la fuente

(e) Se desea compensar la potencia reactiva consumida conectando un componente entre los terminales A y B del circuito. Indique qué componente utilizaría y su valor.

Problema 2 [15 pts.]



El siguiente circuito tiene como entrada v_i y salida v_o y ademas:

- $\frac{1}{RC} = 10\omega_0$
- $\frac{R}{L} = \omega_0$

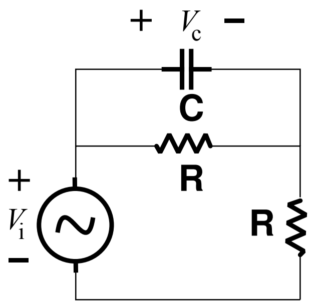
(a) Calcular la transferencia del sistema $H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}$ y verificar que el resultado es:

$$H(j\omega) = \frac{10\omega_0.j\omega}{(j\omega)^2 + 11\omega_0(j\omega) + 20\omega_0^2}$$

(b) Calcular la respuesta en régimen $v_o(t)$ a la entrada $v_i(t) = V_a cos(\omega_0 t)$ siendo $V_a = 10V$.

(c) Calcular la respuesta en régimen $v_o(t)$ a la entrada $v_i(t) = V_a cos(\frac{\omega_0}{10} t)$ siendo $V_a = 10V$

Problema 3 [10 pts.]



Se quiere estudiar la respuesta total del circuito a una entrada escalón. Para eso se pide:

(a) Escribir la ecuación diferencial que vincula $v_i(t)$ con $v_c(t)$.

(b) Si $R = 10\Omega$ y $C = 1\mu F$ calcular la respuesta $v_c(t)$ a la entrada $v_i(t) = 10Y(t)Volts$ estando descargado el capacitor para $t = 0$.

(c) Realizar una gráfica de la evolución de v_c en función del tiempo, e incluir v_i en la misma gráfica

Solución

Problema 1

(a) Pasamos a fasores, y hacemos un divisor de tensión entre $R||Lj\omega$ y R.

$$V_o = V_i.\frac{Rj\omega L}{R + j\omega L}\frac{1}{R + \frac{Rj\omega L}{R+j\omega L}}$$

Haciendo cuentas:

$$V_o = V_i\frac{j\omega L}{R + 2j\omega L}$$

y sustituyendo:

$$V_o = \frac{10[V].100[rad/s].j.1[H]}{100[\Omega] + 2.j.100[rad/s].1[H]}$$

$$V_o = \frac{10.j}{1+2j}V = (4 + 2.j)V = 4.4721e^{j0.4636}$$

Por lo tanto:

$$v_o(t) = 4.4721V.cos(100.t + 0.4636)$$

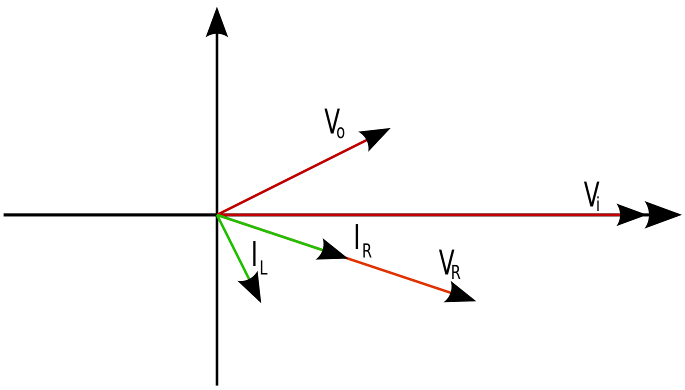
Ahora calculamos $i_L(t)$

$$I_L = \frac{V_o}{j.\omega.L}$$

$$I_L = 0.0447A.e^{-j1.1071}$$

$$i_L(t) = 0.0447A.cos(100t - 1.1071)$$

(b) Diagrama fasorial.



(c) Calculamos I_R:

$$I_R = \frac{V_i - V_o}{R} = \frac{10 - 4.4721e^{j0.4636}V}{100\Omega} = 0.0632e^{-j0.3218}A$$

Entonces la potencia aparente entregada por la fuente es:

$$S = \frac{V.\tilde{I}}{2}$$

Por lo tanto la potencia activa entregada por la fuente es:

$$P = Re[S] = Re[\frac{10 * 0.0631e^{j03218}}{2}]$$

$$P = Re[0.3 + j0.1] = 0.3W$$

(d) La potencia reactiva es:

$$Q = Im[S] = Im[\frac{10 * 0.0631e^{j03218}}{2}]$$

$$P = Im[0.3 + j0.1] = 0.1Var$$

(e) Para que el circuito no consuma ni entregue potencia reactiva, la carga tiene que ser puramente resistiva. Por lo que el paralelo de las admitancias $\frac{1}{j\omega L}$ con la componente a agregar debe valer 0.
Entonces:

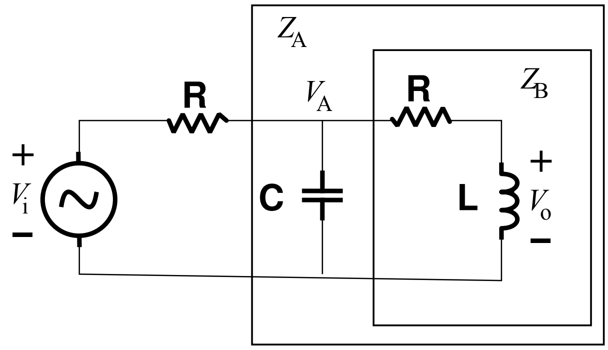
$$\frac{1}{j\omega L} + X = 0$$

observamos que la impedancia compleja X tiene parte imaginaria negativa, por lo tanto la componente a utilizar va a ser un capacitor de admitancia $j\omega C$.

$$\frac{1}{j\omega L} + j\omega C = 0 \rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2} = 100\mu F$$

Problema 2

(a) Primero calculamos V_A utilizando un divisor de tension entre Z_A y R.



$$V_A = V_i.\frac{Z_A}{Z_A + R}$$

con Z_A el paralelo entre $\frac{1}{j\omega C}$ y Z_B ($Z_B = R + j\omega L$).

$$Z_A = \frac{1}{j\omega C}\frac{R + j\omega L}{(\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L)} = \frac{R + j\omega L}{1 + Rj\omega C + (j\omega)^2 CL}$$

$$V_A = V_i \frac{R + j\omega L}{R(2 + jw(RC + L/R) + (jw)^2 LC)}$$

Ahora V_o lo calculamos utilizando un divisor entre R y $j\omega L$, utilizando V_A como voltaje a dividir.

$$V_o = V_A \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$V_o = V_i \frac{L}{R}\frac{j\omega}{(2 + jw(RC + L/R) + (j\omega)^2 LC)}$$

Sustituyendo y arreglando terminos:

$$\frac{V_o}{V_i} = H(j\omega) = \frac{10\omega_0 j\omega}{(j\omega)^2 + 11j\omega\omega_0 + 20\omega_0^2}$$

(b) La respuesta en régimen va a ser:

$$v_o(t) = V_a.|H(j\omega_o)|cos(\omega_0 t + arg(H(j\omega_0)))$$

Calculamos modulo y fase de $H(j\omega_0)$

$$|H(j\omega_0)| = 0.4555$$

$$arg(H(j\omega_0)) = 1.046 rad/s$$

Entonces:

$$v_o(t) = 4.554.cos(\omega_0 t + 1.046)V$$

(c) La respuesta en régimen va a ser:

$$v_o(t) = V_a.|H(j\frac{\omega_o}{10})|cos(\frac{\omega_o}{10}t + arg(H(j\frac{\omega_o}{10})))$$

Calculamos modulo y fase de $H(j\frac{\omega_o}{10})$

$$|H(j\frac{\omega_o}{10})| = 0.049$$

$$arg(H(j\frac{\omega_o}{10})) = 1.5158 rad/s$$

Entonces:

$$v_o(t) = 0.49cos(\frac{\omega_o}{10}t + 1.5158)V$$

Problema 3

(a) Planteamos las ecuaciones del circuito:

$$v_i = v_C + v_R$$

$$i_R = i_C + i_{RA}$$

$$i_C = C\dot{v_C}$$

$$i_{ra} = \frac{v_C}{R}$$

$$i_R = \frac{v_R}{R}$$

despejando tenemos que:

$$v_i = v_C + R.i_R$$

$$v_i = v_C + R(C\dot{v_C} + \frac{v_C}{R})$$

$$v_i = 2v_C + RC\dot{v_C}$$

(b) Vamos a buscar una solución a la ecuación homogénea y una solución particular:
Solución homogénea:

$$2v_C + RC\dot{v_C} = 0$$

Entonces v_C es de la forma:

$$v_C(t) = Ae^{\frac{-2}{RC}t}$$

Solución particular:

$$v_i = 2v_C + RC\dot{v_C}$$

como la entrada es una constante para t¿0, $v_C(t)$ constante es solución particular de la ecuación.

$$v_C(t) = \frac{v_i(t)}{2} = 5V.Y(t)$$

Solución completa

$$v_C = 5 + Ae^{\frac{-2}{RC}t}$$

y como en t=0 $v_C = 0$ tenemos:

$$0 = 5 + Ae^0$$

$$A = -5$$

siendo la solución completa:

$$v_C(t) = 5V(1 - e^{\frac{-2}{RC}}t)$$

(c)