Teoría de circuitos
Primer Parcial

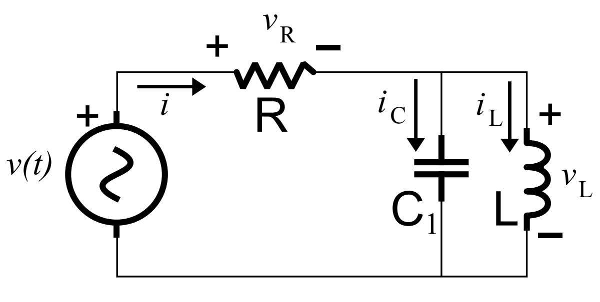
CURE

29 de octubre de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deber comenzar en una hoja nueva.Se evaluar explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1



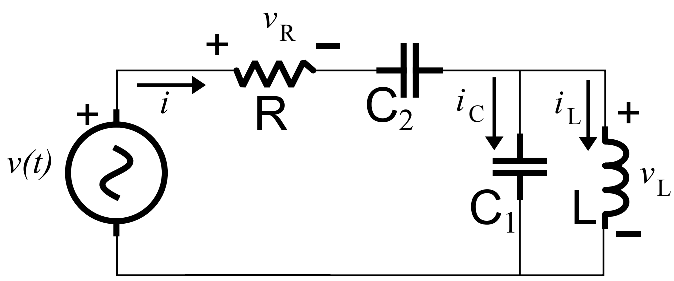
Considrese el circuito de la figura en el que $v(t) = A.cos(\omega t)$:

(a) Realizar un diagrama fasorial que incluya a $\bar{V}$, $\bar{I}$, $\bar{V_R}$, $\bar{I_L}$, $\bar{I_C}$ y a $\bar{V_L}$.

(b) Si se cumple que $1 > LC_1.\omega^2$: es un circuito capacitivo, inductivo o resistivo?

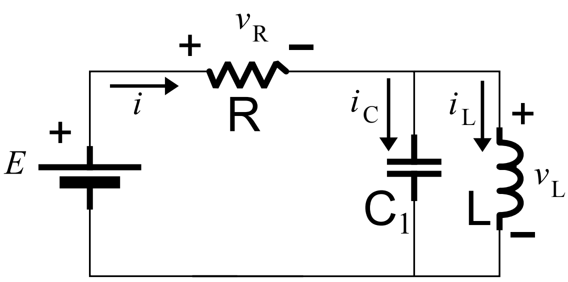
(c) Hallar la potencia activa, reactiva y aparente entregada por la fuente.

Se quiere colocar un condensador C_2 en serie para compensar el consumo de potencia reactiva. Ver figura:



(d) Existe alguna frecuancia ω de trabajo para la cual la potencia entregada por la fuente sea 100 % activa?.
En caso de existir: exprsela en funcin de los parmetros del circuito.

Finalmente se desea conectar el circuito original a una fuente de corriente continua de valor $v(t) = E$:



(e) Hallar i, i_L, i_C, V_L y V_R en rgimen de continua.

Problema 2 [10 pts.]

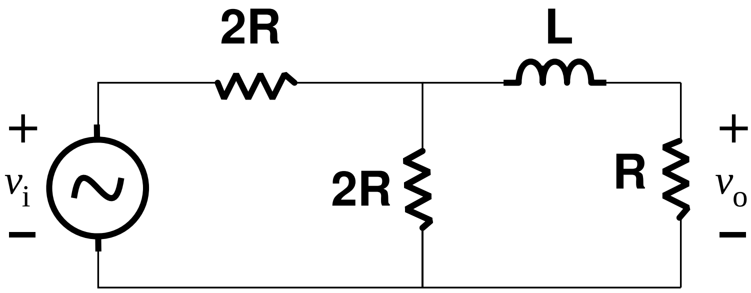
Dado el circuito de la figura se pide:

(a) Calcular la transferencia del circuito $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ siendo $\frac{R}{L} = \omega_0$.

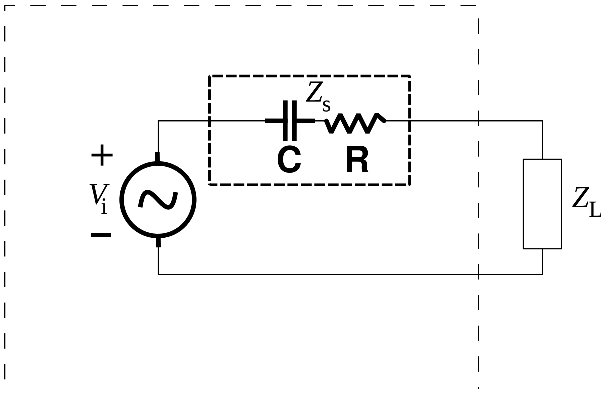
(b) Calcular la salida $v_o(t)$ para las siguientes entradas:

- $v_{ia} = cos(\frac{\omega_0}{10}t)$
- $v_{ib} = cos(\omega_0 t)$
- $v_{ic} = cos(10\omega_0 t)$

(c) Realizar un diagrama de Bode asintótico de la transferencia marcando los puntos exactos en las frecuencias de la parte anterior.Bosquejar el diagrama de Bode real



Pregunta [10 pts.]



El circuito de la figura esta alimentado por una fuente real sinusoidal que trabaja a una frecuencia ω_0, la cual vamos a modelar como una fuente ideal en seria con impedancia $Z_S = R_S + jX_S$.

(a) Cual es el valor de $Z_L = R_L + jX_L$ que maximiza la transferencia de potencia de la fuente a la carga.

(b) Encuentre una componente Z_L (que sea alguna combinación de resistencias bobinas y capacitores) para el caso en que Z_S es la serie de una resistencia R con un capacitor C

(c) ¿Se sigue cumpliendo la máxima transferencia de potencia si utilizamos las impedancias calculadas en la parte anterior pero trabajamos a otra frecuencia ω_1?. Justifique

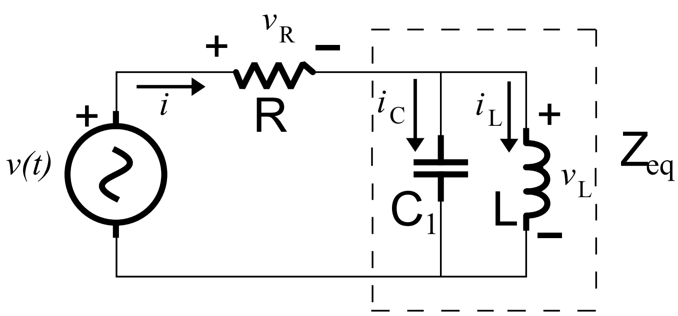
Solución

Problema 1

(a) Trabajamos con fasores:

$$v(t) = Re\left\{\bar{V}.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\right\}; \quad \bar{V} = A$$

Primero[1] calculamos la impedancia equivalente del paralelo entre el condensador y la bobina:



$$Z_{eq} = \frac{Lj\omega}{1 - LC_1\omega^2}$$

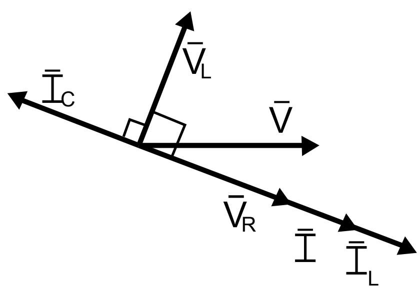
Realizando un divisor de tensión entre R y Z_{eq} tenemos:

$$\bar{V}_L = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq}+R}.\bar{V} = \frac{Lj\omega}{R(1-LC_1\omega^2)+Lj\omega}.\bar{V}$$
$$\bar{V}_R = \frac{R}{Z_{eq}+R}.\bar{V} = \frac{R(1-LC_1\omega^2)}{R(1-LC_1\omega^2)+Lj\omega}.\bar{V}$$

Ya se puede calcular las corrientes!

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}_L}{Lj\omega} = \frac{1}{R(1-LC_1\omega^2)+Lj\omega}.\bar{V}$$
$$\bar{I}_C = \bar{V}_L.C_1 j\omega = -\frac{LC_1\omega^2}{R(1-LC_1\omega^2)+Lj\omega}.\bar{V}$$
$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_R}{R} = \frac{(1-LC_1\omega^2)}{R(1-LC_1\omega^2)+Lj\omega}.\bar{V}$$

Para el bosquejo[2] se supone $1 > LC_1.\omega^2$ y $R < 1\Omega$. No tiene por qué ser así!



[1] El procedimiento no tiene por qué ser exactamente este. Es simplemente uno de tantos.

[2] Ver que es efectivamente un bosquejo; pues relaciones entre fasores como: $\bar{V}_R + \bar{V}_L = \bar{V}$ y $\bar{I}_C + \bar{I}_L = \bar{I}$ no se cumplen al pie de la letra en el diagrama.

(b) Como vemos en el diagrama fasorial, el voltaje “adelanta” a la corriente. Por lo tanto concluimos que es un circuito <u>inductivo</u>.

(c)

$$S = \frac{\bar{V}\bar{I}^*}{2} = \frac{V^2.(1 - LC_1\omega^2)}{2R(1 - LC_1\omega^2) - 2Lj\omega}$$

Por definición:

$$P = Re\{S\}$$
$$Q = Im\{S\}$$

Para poder separar facilmente las partes real e imaginaria de S, la podemos multiplicr y dividir por el conjugado de su denominador:

$$S = \frac{V^2.(1 - LC_1\omega^2)\left[2R(1 - LC_1\omega^2) + 2Lj\omega\right]}{\left[2R(1 - LC_1\omega^2) - 2Lj\omega\right].\left[2R(1 - LC_1\omega^2) + 2Lj\omega\right]} = \frac{V^2.2R(1 - LC_1\omega^2)^2 + V^2.2Lj\omega(1 - LC_1\omega}{4R^2(1 - LC_1\omega^2)^2 + 4L^2\omega^2}$$

Obteniendo entonces:

$$P = \frac{V^2.2R(1 - LC_1\omega^2)^2}{4R^2(1 - LC_1\omega^2)^2 + 4L^2\omega^2} \qquad Q = \frac{V^2.2L\omega(1 - LC_1\omega^2)}{4R^2(1 - LC_1\omega^2)^2 + 4L^2\omega^2}$$

(d) Busco ω tal que la impedancia vista por la fuente sea 100 % real. O lo que es lo mismo:

$$\frac{1}{C_2 j\omega} + Z_{eq} = 0$$

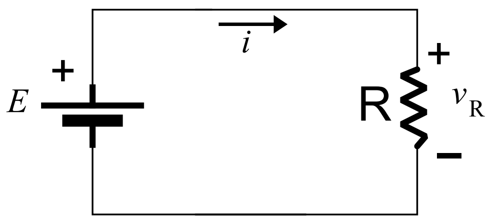
El resultado anterior se deduce al ver que Z_{eq} es 100 % inductiva. Además como R es puramente real no es necesario que sea parte del análisis ya que una serie de dos componentes puramente reales también lo es.
Continuando con el razonamiento:

$$\frac{Lj\omega}{1 - LC_1\omega^2} - \frac{j}{C_2\omega} = 0 \Rightarrow \frac{L\omega}{1 - LC_1\omega^2} - \frac{1}{C_2\omega} = 0$$

Y finalmente, si se opera un poco se obtiene la siguiente condición:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}$$

(e) Se vió en el correr del curso que en régimen de corriente continua los condensadores tienden a comportarse como circuitos abiertos y las bobinas como cables. Se tiene entonces que el circuito en cuestión tiende a un comportamiento equivalente al de la figura:



Se concluye entonces:

- $v_R(t) = E$
- $i(t) = \frac{E}{R}$
- $v_L(t) = 0V$
- $i_L(t) = i_R(t) = \frac{E}{R}$
- $i_C(t) = 0A$

Problema 2

(a) Primero calculamos el voltaje en el nudo intermedio V_a. Divisor entre 2R y $2R||(R + Lj\omega)$

$$V_a = V_i \frac{(Lj\omega + R)}{2Lj\omega + 4R}$$

Luego calculamos el voltaje en la resistencia.

$$V_o = V_a \frac{R}{Lj\omega + 2R} = V_i \frac{R}{2L(j\omega + 2\frac{R}{L})}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{2(j\omega + \omega_0)}$$

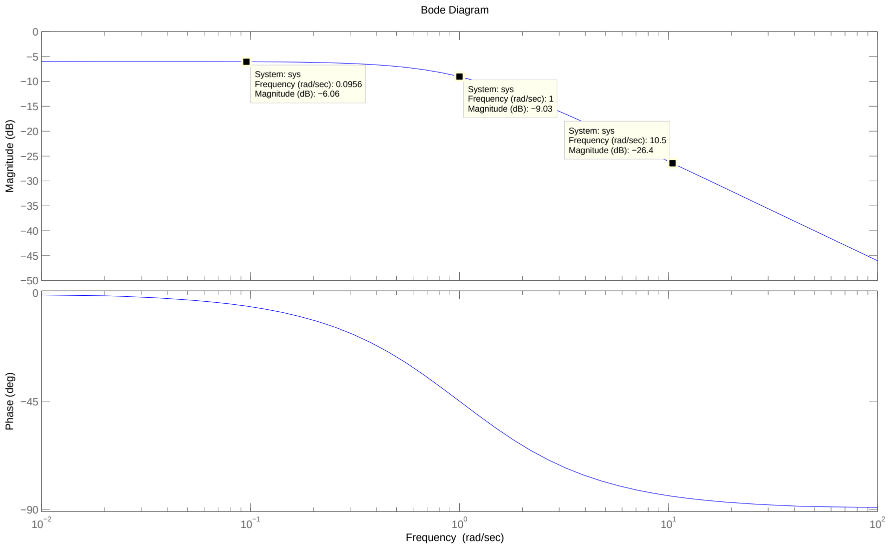
(b)

$$v_{oa}(t) = |H(j\frac{\omega_0}{10})|cos(\frac{\omega_0}{10}t + arg(H(\frac{\omega_0}{10})))$$

$$v_{ob}(t) = |H(j\omega_0)|cos(\omega_0 t + arg(H(\omega_0)))$$

$$v_{oc}(t) = |H(j10\omega_0)|cos(10\omega_0 t + arg(H(10\omega_0)))$$

(c)



Pregunta

(a) La máxima transferencia de potencia se da cuando $Z_L = Z_S^*$.Por demostración ver teórico

(b) Por la parte anterior $Z_L = Z_S^*$, por lo que:

$$R_L = R_S$$

$$X_L = X_S^* \Rightarrow \frac{-1}{\omega_0 C} = X_L = jwL \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$$

La impedancia Z_L es la serie de una resistencia de valor R_S y una bobina de valor $L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$.

(c) No se cumple debido a la dependencia de las reactancias con la frecuencia.