Modulación y Procesamiento de Señales
Examen Julio 2017

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

26 de julio de 2017

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Dar el diagrama de bloques del transmisor y receptor de un sistema PCM binario. Explicar la función de cada uno de los bloques.

(b) Bosquejar la SNR_D en función de la SNR_R, paramétrico en el número de niveles q. Indicar y justificar el punto de trabajo óptimo.

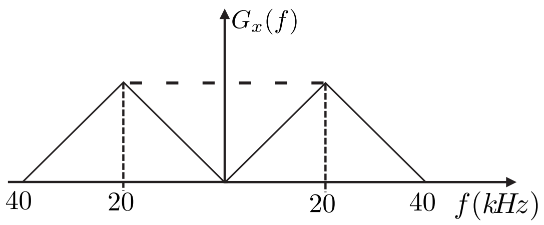
(c) Para mejorar el desempeño de ASK (Modulación por desplazamiento de amplitud) se utiliza QAM (Modulación de amplitud en cuadratura). Dar el diagrama de bloques de un transmisor QAM.

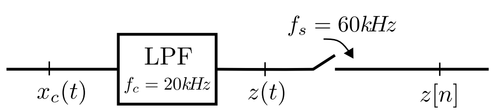
(d) Comparar la eficiencia espectral de los métodos de modulación pasabanda binaros ASK y QAM.

(e) Dibujar la constelación de un sistema de comunicación pasabanda PSK (Modulación por desplazamiento de fase) con $M = 4$.

Problema 1

Sea el proceso de tiempo continuo $x(t)$ de media nula con $|x(t)| \leq 1$ y densidad espectral de potencia $G_x(f)$ como se muestra en la Figura.





Este proceso pasa por un filtro pasabajos ideal $H_c(f)$ de frecuencia de corte $f_c = 20\ kHz$ y se muestrea a $f_s = 60\ kHz$.

(a) Asumiendo que el filtro pasabajos no se modifica ¿que frecuencia de muestreo se debería haber utilizado para poder reconstruir $x(t)$ a partir de la señal $z[n]$? Justificar claramente.

A partir de la secuencia $z[n]$ se pretende obtener la secuencia $y[n]$, resultado de muestrear la salida del filtro pasabajos a $f_s' = 40kHz$.

(b) Dar diagrama de bloques de un sistema que implemente este cambio en la frecuencia de muestreo.

(c) Graficar densidad espectral de potencia en cada uno de los puntos intermedios del sistema anterior.

Se desea enviar $x(t)$ utilizando un sistema de transmisión PCM M-ario con una relación señal a ruido en detección de al menos $20\ dB$ y la mínima frecuencia de muestreo que permita la reconstrucción. El canal utilizado posee un ancho de banda $B_T = 100\ kHz$, introduce ruido con una densidad de potencia $\eta = 1 \times 10^{-7}\ watts/Hz$ y produce una atenuación $L = 2$. Se tiene que $S_x = 0.3$.

(d) Indicar valores de q, m y n para que este sistema funcione dado los requerimientos. Con dichos valores, ¿cuál es la cadencia de símbolos de la señal PCM resultante?.

(e) Indicar la mínima potencia de transmisión S_T^{min} que garantice el predominio del error de cuantificación en detección.

Problema 2

Considere un sistema LIT con la siguiente función de transferencia

$$H(z) = \frac{k}{1 - (1+k)z^{-1}}.$$

(a) Escriba la ecuación de recurrencia que relaciona la salida $y[n]$ con la entrada $x[n]$ del sistema. ¿Se trata de un filtro FIR, IIR?. Justificar la respuesta.

(b) Calcular los polos y ceros de la función de transferencia. Indicar la condición que debe cumplir el parámetro k para que el filtro sea causal y estable. En las condiciones de estabilidad y causalidad, dibuje el diagrama de polos y ceros para algún valor de k e indique la ROC de $H(z)$.

(c) Sobre la hipótesis de que k es tal que el sistema es estable, hallar la magnitud al cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro $|H(e^{j\omega})|^2$.

(d) Hallar k para que la ganancia de filtro en frecuencia $\omega = \pi/3$ sea $1/\sqrt{3}$ asegurando que el sistema resultante sea estable.

En lo que sigue se utilizará el valor de k calculado en la parte anterior.

(e) Calcular y esbozar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(f) Indicar de que tipo de filtro se trata en cuanto a selectividad de frecuencias.

El sistema se pone en paralelo con otro sistema causal con función de transferencia

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

(g) Calcular la función de transferencia resultante $H_p(z)$ y dibujar su diagrama de bloques.

Solución

Pregunta

(a)

(b)

(c)

(d)

Problema 1

(a) $f_s' = 40\,kHz$

(b) Se busca tener una frecuencia de muestreo $f_s' = \frac{Lf_s}{M}$, de lo cual surge que $\frac{L}{M} = \frac{2}{3}$ por lo tanto $L = 2$ y $M = 3$.

(c)

(d) La mínima frecuencia de muestreo que permite la reconstrucción es $f_s = 2W_x = 80kHz$.
Para que no se produzca ISI y el muestreo sea el adecuado, el ancho de banda de transmisión tiene que cumplir que

$$B_T \geq \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}nf_s \geq nW_x.$$

Con lo cual se tiene que

$$n \leq \frac{B_T}{W_x} = \frac{(100\,kHz)}{(40\,kHz)} = 2.5$$

por lo tanto

$$n_{max} = \left\lfloor \frac{2B_T}{W} \right\rfloor = 2$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa la función piso, cuya salida es el entero inmediatamente inferior al argumento.
La relación señal a ruido en un sistema PCM esta dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right)\frac{f_s}{2W_x}.$$

Asumiendo que se trabaja sobre el umbral de error, el ruido de cuantización predomina sobre el ruido de decodificación ($P_e \ll 1/4q^2$) resultando en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W_x},$$

Por lo tanto, la cantidad de niveles q del cuantizador para lograr cierto valor SNR_D es

$$q = \left\lceil \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D}{3S_x}\frac{2W_x}{f_s}} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{\frac{10^2}{3 \times 0.3}} \right\rceil \simeq \lceil 10.5 \rceil = 11$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ representa la función techo, cuya salida es el entero inmediatamente superior al argumento.
Luego se tiene que $M^n \geq q$ con lo cual resulta

$$M = \lceil \sqrt[n]{q} \rceil = \left\lceil \sqrt[2]{11} \right\rceil = 4$$

La cadencia de símbolos de la señal PCM es $r = nf_s = 160\,kbps$.

(e) Para no introducir más ruido de lo necesario y no generar ISI el ancho de banda del filtro de recepción debe ser $B_R = B_T$. Con lo cual resulta una potencia de ruido en recepción de

$$N_R = \int_{-B_R}^{B_R} \eta/2 df = \eta B_R = 0.01W$$

Para trabajar sobre el umbral de error se debe cumplir $SNR_R = \frac{S_T}{LN_R} \geq 6(M^2 - 1)$ por lo tanto

$$S_T^{min} = 6L\, N_R(M^2 - 1) = 6 \times 2 \times (0.01\, W) \times 15 = 1.8\, W$$

Problema 2

(a)

$$y[n] = kx[n-1] + (1+k)y[n-1],$$

Se trata de un filtro IIR pues solo se puede representar a partir de una ecuación en recurrencia.

(b) Para calcular los polos y los ceros del sistema, se multiplica el numerador y el denominador de la función de transferencia por z para que quede un cociente de polinomios con potencias positivas,

$$H(z) = \frac{kz}{z - (1+k)}$$

El sistema tiene un polo en $z = 1 + k$ y un cero en $z = 0$. Para que el sistema sea causal la región de convergencia de $H(z)$ debe ser $|z| > (1 + k)$ y para la estabilidad del sistema, todos los polos deben estar dentro de círculo unidad, entonces

$$|1 + k| < 1 \tag{1}$$

(c) La respuesta en frecuencia del sistema es

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\omega}\right) &= \frac{k}{1 - (1+k)e^{-j\omega}} \\ &= \frac{k}{1 - (1+k)\cos(-\omega) - j(1+k)\sin(-\omega)} \\ &= \frac{k}{1 - (1+k)\cos(\omega) + j(1+k)\sin(\omega)} \end{aligned}$$

Tomando la magnitud al cuadrado, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 &= \frac{k^2}{(1 - (1+k)\cos(\omega))^2 + (1+k)^2\sin^2(\omega)} \\ &= \frac{k^2}{1 - 2(1+k)\cos(\omega) + (1+k)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

(d) Se quiere encontrar k de forma que $\left|H\left(e^{j\pi/3}\right)\right|^2 = 1/3$. Para eso, se evalúa la Ecuación 2 en $\omega = \pi/3$,

$$\left|H\left(e^{j\pi/3}\right)\right|^2 = \frac{k^2}{1 - (1+k) + (1+k)^2} = \frac{1}{3}$$

Despejando, se llega a que k tiene que cumplir que

$$2k^2 - k - 1 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad k = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad k = 1$$

Para que el sistema sea estable, se tiene que cumplir la condición de la Ecuación 1, y por lo tanto, se elige

$$k = -\frac{1}{2}.$$

(e) Con el valor de k encontrado, la función de transferencia del sistema es

$$H(z) = \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

y aplicando la antitransformada $\mathcal{Z}$ se obtiene la respuesta al impulso,

$$\begin{aligned} h[n] &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n]. \end{aligned}$$

(f) El sistema tiene un polo en $z_p = 1/2$ y un cero en $z_z = 0$. De esta forma, el sistema es un filtro pasabajos.

(g) Por ser el paralelo de sistemas, la función de transferencia equivalente es la suma de las funciones de transferencia,

$$\begin{aligned} H_p(z) &= H(z) + H_2(z) \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - z^{-1}}. \end{aligned}$$

Sacando denominador común y operando, se obtiene que,

$$H_p(z) = \frac{1/2}{2 - 3z^{-1} + z^{-2}}.$$

Como $H_p(z) = Y(z)/X(z)$, se tiene que

$$Y(z)\left(2 - 3z^{-1} + z^{-2}\right) = \frac{1}{2}X(z)$$

y antitransformando se llega a que

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = \frac{1}{4}x[n].$$

El diagrama de bloques se muestra a continuación, donde $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ y $b_0 = \frac{1}{4}$.