Modulación y Procesamiento de señales
Examen – Curso 2015

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

12 de agosto de 2015

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de las hipótesis.

Pregunta

(a) Enunciar el teorema de muestreo.

(b) Sea la señal $x_c(t) = \cos(50000\pi t)$. La señal $x[n]$ corresponde a muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 15$ kHz. Hallar $x[n]$, hallar y graficar $X(e^{j\omega})$.

(c) Dar el diagrama de bloques de un decimador de orden M indicando todos los parámetros de cada uno de los bloques. Escribir la expresión del espectro resultante.

(d) Graficar el espectro en cada punto, para una entrada $X(e^{j\omega}) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi/3}\right)$ y $M = 3$.

Problema 1

Una señal de voz $x(t)$ de rango dinámico $[-2\,,2]$, ancho de banda W y potencia S_x se transmite mediante un sistema PCM. El sistema usa frecuencia de muestreo $f_s \geq W$ y codificación binaria polar NRZ con pulso rectangular de amplitud $\pm A_T$. La probabilidad de transmitir un 1 binario es p.

(a) Dibujar el diagrama de bloques del transmisor y receptor de un sistema PCM binario de q niveles (n bits) con cuantificación uniforme. Explicar el funcionamiento de cada bloque.

Se desea recibir la señal con al menos una cierta calidad SNR_D dada y utilizar la mínima cantidad posible de bits de codificación.

(b) Indicar cómo determinar los parámetros del sistema (la escala completa X_m, q, n, y el ancho de banda de transmisión B_T) en función de los parámetros conocidos. Explique los criterios de elección de cada uno de ellos.

(c) Calcular y bosquejar el espectro de la señal conformada para una probabilidad p genérica.

(d) ¿Qué valor de p permite aprovechar al máximo la potencia de transmisión? Justifique.

El canal introduce ruido blanco gaussiano con densidad espectral de potencia $\eta/2$ y produce atenuación L en potencia. El ancho de banda de transmisión considerando el ancho de banda del canal y el filtro de recepción es B_T. Se asume que la interferencia intersimbólica es despreciable. El valor de p es el obtenido en la parte anterior.

(e) Indicar la SNR_R en función de los parámetros conocidos.

(f) Indicar el umbral óptimo de decisión del comparador del receptor. Calcular la probabilidad de error P_e en recepción con el umbral óptimo y el valor de probabilidad de símbolos binarios p indicado en la parte (d) con $\eta = 2 \times 10^{-6}$ W/Hz, $B_T = 100$ kHz, $L = 5$ W/W y $A_T = 6$ V. Se asume que el receptor muestrea la señal recibida en los instantes de muestreo óptimos.

(g) El sistema propuesto, ¿opera en la zona de funcionamiento adecuada? En función de su respuesta, indique algún parámetro a modificar de forma de mejorar el desempeño.

(h) Dar la expresión del pulso conformador que se debería emplear para que el ancho de banda de la señal transmitida sea mínimo, manteniendo la cadencia de símbolos. Esbozar el pulso conformador y la densidad espectral de potencia de la señal conformada en ese caso. Comparar las diferencias en cuanto a interferencia intersimbólica entre usar este pulso y un pulso rectangular. ¿Es realizable un sistema con este pulso conformador?

Problema 2

Se desea procesar una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ mediante un filtro digital H_3 con la finalidad de eliminar completamente una interferencia que ocurre a $f_i = 10\ kHz$. El filtro H_3 es la combinación de dos filtros H_1 y H_2 puestos en cascada.
El filtro H_1 tiene respuesta al impulso $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$ y H_2 es causal, de coeficientes reales, con la siguiente relación entrada salida, $y[n] = \alpha y[n-1] + \beta x[n]$.

(a) Calcular las funciones de transferencia de $H_1(z)$ y $H_2(z)$.

(b) Calcular la función de transferencia de $H_3(z)$ e indicar las condiciones sobre α y β para que el filtro H_3 sea estable.

(c) Calcular α y β de modo que H_3 tenga respuesta frecuencia de módulo 1 para frecuencias $w = 0$ y $w = \pi$ y sea estable.

(d) Dibujar un diagrama de polos y ceros de H_3. Bosquejar la respuesta frecuencial, indicando claramente que frecuencias son eliminadas.

(e) Dar un diagrama de bloques que implemente directamente H_3 usando la mínima cantidad de elementos de retardo.

Para filtrar la señal $x_c(t)$, se utiliza un sistema de muestreo, el filtro digital H_3, y luego un reconstructor ideal, para obtener la salida procesada $y_c(t)$.

(f) Dar un diagrama de bloques completo del sistema.

(g) Calcular la frecuencia de muestreo para que la interferencia de 10 kHz efectivamente sea eliminada

Fórmulas útiles

- Transformada de Fourier de pulso rectangular de duración τ

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad P(f) = \tau \operatorname{sinc} f\tau$$

- Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta\left(f - kr_b\right)$$

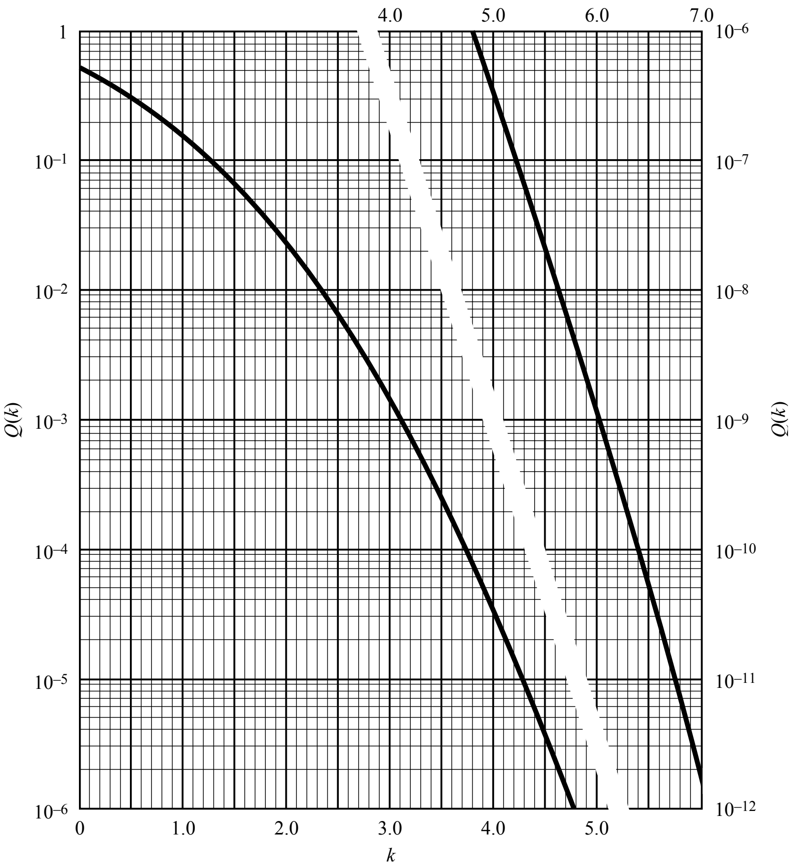
- Probabilidad de error del receptor regenerativo con bits equiprobables y umbral V óptimo

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}(S/N)_R}\right) & \text{Unipolar NRZ} \\ Q\left(\sqrt{(S/N)_R}\right) & \text{Polar NRZ} \end{cases}$$

- Relación señal a ruido en sistema PCM

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right)\frac{f_s}{2W}.$$

- Función $Q(k)$ (cola de gaussiana)



Solución

Pregunta

(a) El teorema de muestro indica que si una señal se muestrea a una frecuencia de muestreo superior al doble de la frecuencia máxima que contiene la señal, las muestras determinan unívocamente a la señal.
Formalmente, sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada con

$$X_c(j\Omega) = 0, \qquad \textsf{para } |\Omega| \geq \Omega_N.$$

Entonces, $x_c(t)$ esta unívocamente determinada por sus muestras $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, si

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N.$$

(b) El período de muestro es $T_s = 1/f_s = 1/15000$ segundos. Por definición de muestreo,

$$x[n] = x_c(nT_s) = \cos\left(\frac{50000\pi n}{15000}\right) = \cos\left(\frac{10\pi n}{3}\right).$$

Observando que

$$\begin{aligned}
x[n] &= \cos\left(\frac{10\pi n}{3}\right)\\
&= \cos\left(\frac{12\pi n}{3} - \frac{2\pi n}{3}\right)\\
&= \cos\left(4\pi n - \frac{2\pi n}{3}\right)\\
&= \cos\left(-\frac{2\pi n}{3}\right)\\
&= \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right).$$

Este resultado se obtiene naturalmente si el análisis se realiza en el dominio de la frecuencia.
La señal en tiempo continuo tiene espectro

$$X_c(f) = \frac{\delta(f + 25000) + \delta(f - 25000)}{2}$$

En tiempo discreto se puede plantear

$$\cos\left(\frac{10\pi n}{3}\right) = \frac{e^{j10\pi/3} + e^{-j10\pi/3}}{2}$$

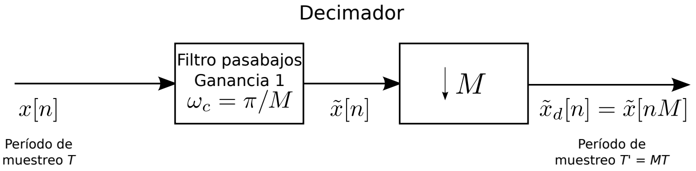
por lo tanto resulta

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_k \left(\delta(\omega - 10\pi/3 + 2k\pi) + \delta(\omega + 10\pi/3 + 2k\pi)\right),$$

y si se considera el espectro en $\omega \in [-\pi, \pi]$ teniendo en cuenta que es periódico, queda

$$X(e^{j\omega}) = \pi \left(\delta(\omega - 2\pi/3) + \delta(\omega + 2\pi/3)\right).$$

(c) Diagrama de bloques del decimador:

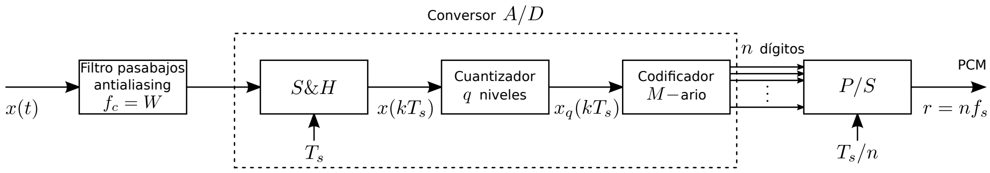


El espectro de la señal decimada en función del espectro de la señal original es

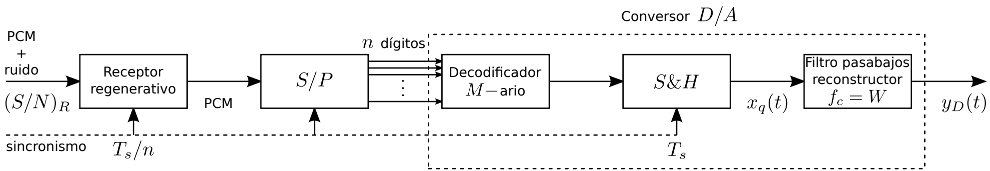
$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi i)/M})$$

Problema 1

(a) Transmisor PCM:



Receptor PCM:



Explicación de los bloques: ver teórico.

(b) Cómo la señal a transmitir tiene rango dinámico entre $[-2, 2]$, el cuantizador debe tener una escala completa de $X_m = 2$.
Por otro lado, la relación señal a ruido en un sistema PCM esta dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2} \left(\frac{3q^2}{1 + 4q^2 P_e}\right) \frac{f_s}{2W}.$$

Como se trabaja sobre el umbral de error, el ruido de cuantización predomina sobre el ruido de decodificación ($P_e \ll 1/4q^2$) resultando en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2} 3q^2 \frac{f_s}{2W}.$$

Despejando, la cantidad de niveles q del cuantizador para lograr cierta SNR_D deseada es

$$q = \left\lceil X_m \sqrt{\frac{\text{SNR}_D}{3S_x} \frac{2W}{f_s}} \right\rceil,$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ representa la función techo, cuya salida es el entero inmediatamente superior al argumento.

La cantidad n de dígitos binarios necesaria para representar q niveles de cuantización es

$$2^n \geq q \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq \log_2 q$$

y por lo tanto, la cantidad de dígitos del cuantizador es

$$n = \left\lceil \log_2 X_m \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D}{3S_x}\frac{2W}{f_s}} \right\rceil.$$

La cadencia de símbolos de la señal PCM es $r = nf_s$. El ancho de banda mínimo para poder transmitir está establecido por el teorema de señalización de Nyquist, y es

$$B_T \geq \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}nf_s$$

(c) La densidad espectral de potencia de la señal PCM de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD), \qquad \text{con } D = 1/r$$

es

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r|P(f)|^2 + (\mu_a r)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr)|^2 \delta\left(f - kr\right). \tag{1}$$

En este caso, el código de línea es polar sin retorno a cero, por lo que el pulso conformador es

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{D}\right)$$

que tiene transformada de Fourier

$$P(f) = D \operatorname{sinc} fD = \frac{1}{r} \operatorname{sinc} \frac{f}{r}. \tag{2}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 2, la densidad espectral de potencia queda

$$G_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{r} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{r} + \mu_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - kr\right) \operatorname{sinc}^2 k \tag{3}$$

y como con k entero,

$$\operatorname{sinc} k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la densidad espectral de potencia se reduce a

$$G_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{r} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{r} + \mu_a^2 \delta\left(f\right) \tag{4}$$

Falta calcular μ_a y σ_a^2. La probabilidad de los símbolos $a_k = A_T, -A_T$ es p y $1 - p$ respectivamente. La media de a_k es por lo tanto

$$\mu_a = E\{a_k\} = A_T p - A_T(1 - p) = A_T(2p - 1), \tag{5}$$

y la varianza es

$$\sigma_a^2 = E\{a_k^2\} - \mu_a^2.$$

Como

$$E\{a_k^2\} = A_T^2 p + (-A_T)^2(1 - p) = A_T^2,$$

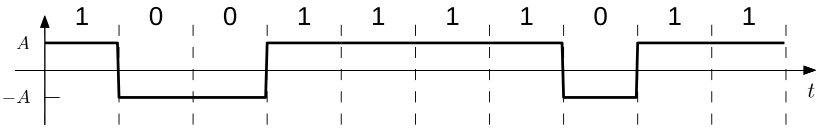
la varianza queda

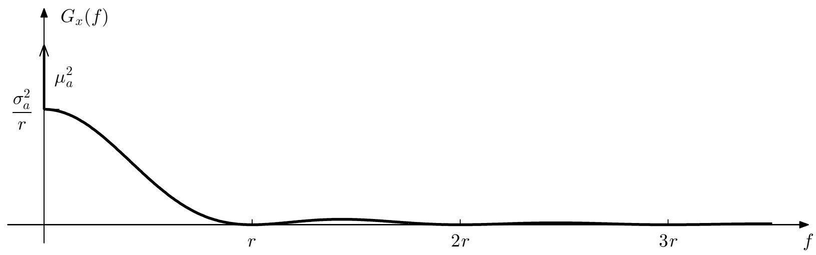
$$\sigma_a^2 = A_T^2 - A_T^2(2p - 1)^2 = 4A_T^2 p(1 - p) \tag{6}$$

Sustituyendo las ecuaciones 5 y 6 en la ecuación 4 se obtiene el resultado buscado,

$$G_x(f) = 4A_T^2 p(1 - p)\frac{1}{r} \operatorname{sinc}^2 \frac{f}{r} + A_T^2(2p - 1)^2 \delta\left(f\right)$$

En la siguiente figura se grafica la densidad espectral de potencia con $A_T = 1$, $r = 1$ y $p = 0.8$.





(d) La señal PCM tiene un componente de continua producto de que los símbolos no son equiprobables y por lo tanto, $\mu_a \neq 0$. Este nivel de continua se manifiesta en el espectro mediante la delta en continua y como no lleva información, significa un desperdicio de potencia. Para evitarlo, la media de los símbolos debe ser nula, y eso se logra con probabilidad de símbolos $p = 1/2$, como se ve en la ecuación 5.

(e) Teniendo en cuenta que $p = 1/2$ y se usa codificación con pulso rectangular polar NRZ con amplitud A_T, la potencia de la señal transmitida es

$$S_T = A_T^2,$$

y como el canal produce atenuación L en potencia, la potencia de la señal recibida es

$$S_R = \frac{S_T}{L} = \frac{A_T^2}{L}.$$

La potencia del ruido en predetección es

$$N_R = \eta B_T.$$

Por lo tanto, la SNR_R es

$$SNR_R = \frac{S_R}{N_R} = \frac{A_T^2}{\eta B_T L}.$$

(f) Por tratarse de un código polar con símbolos equiprobables, el umbral de decisión óptimo es $V_{\text{opt}} = 0$ y con ese umbral, la probabilidad de error es

$$P_e = Q\left(\sqrt{SNR_R}\right)$$

La SNR_R se calculó en la parte anterior y es

$$SNR_R = \frac{A_T^2}{\eta B_T L} = \frac{6^2}{(2 \times 10^{-6})(1 \times 10^5)(5)} = 36$$

La probabilidad de error en recepción es

$$P_e = Q\left(\sqrt{SNR_R}\right) = Q(6) \approx 1 \times 10^{-9}$$

(g) Para que un sistema PCM opere adecuadamente, debe operar sobre el umbral del error de decodificación, donde la probabilidad de error de decodificación cumple que $P_e < 10^{-5}$. Por lo tanto, el sistema PCM especificado funciona correctamente. Sin embargo, en este sistema podría incrementarse la P_e (o equivalentemente, reducir la SNR_R) sin afectar demasiado la SNR_D, si se trabaja mas cerca del punto donde

$P_e \approx 10^{-5}$. Para lograr esto, se podría emplear una potencia de transmisión mas baja mediante la reducción de A_T. Por ejemplo, con $A_T = 5$, se tiene que $P_e \approx 3 \times 10^{-7}$, reduciendo la potencia de transmisión a un factor $5^2/6^2 = 70\,\%$ de la potencia original sin influir en la calidad del sistema, es decir, manteniendo la SNR_D.

(h) El pulso conformador que logra menor ancho de banda para una cadencia de símbolos r dada y manteniendo las características de un pulso conformador ($p(kD) = 0$ si $k \neq 0$) es

$$p(t) = \operatorname{sinc} rt, \qquad \text{con } r = \frac{1}{D}.$$

El espectro de este pulso es

$$P(f) = \frac{1}{r}\Pi\left(\frac{f}{r}\right),$$

por lo que la densidad espectral de potencia de la señal PCM, con $p = 1/2$ queda

$$G_x(f) = A_T^2\frac{1}{r}\Pi\left(\frac{f}{r}\right).$$

El ancho de banda de la señal es $r/2$, y por lo tanto puede transmitirse por un canal de ancho de banda $B_T = r/2$ sin ser modificada. Con este pulso conformador se alcanza la cota inferior de señalización de Nyquist sin que se produzca interferencia intersimbólica. Si se usa un pulso rectángular, la señal PCM tiene ancho de banda infinito y la ISI es inevitable. Por otro lado, un sistema PCM con pulso sinc es irrealizable en la práctica, ya que un sinc tiene duración infinita.

Problema 2

(a) Funciones de transferencia:

$$H_1(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$H_2(z) = \frac{\beta}{1 - \alpha z^{-1}}$$

(b) Función de transferencia de los sistemas en serie:

$$H_3(z) = \frac{\beta\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Para obtener un sistema estable, la ROC debe incluir la circunferencia unidad. Esto implica que todos los polos del sistema deben estar contenidos dentro del círculo unidad. Por lo tanto $|\alpha| < 1$ y β cualquiera.

(c)

$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{\beta\left(1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}\right)}{1 - \alpha e^{-j\omega}} = \frac{\beta e^{-j\omega}\left(1 + 2cos(\omega)\right)}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

Para $\omega = 0$ se tiene $\left|H_3(e^{j0})\right| = \frac{3\beta}{1-\alpha} = 1$
Para $\omega = \pi$ se tiene $\left|H_3(e^{j\pi})\right| = \frac{\beta}{1+\alpha} = 1$.
Por lo tanto $\alpha = -0.5$ y $\beta = 0.5$.

(d) Se eliminan las frecuencias $\omega = \pm 2\pi/3$.

(e)

$$H_3(z) = \frac{\beta\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Por lo tanto, se obtiene directamente el filtro de forma canónica (mínima cantidad de retarods, 2 en este caso) usando como coeficiente recursivo $[\alpha]$ y como coeficientes no recursivos $[\beta, \beta, \beta]$

(f) Filtro pasabajos con frecuencia de corte $f_s/2$ para evitar solapamiento, muestreador a frecuencia f_s , filtro H_3 , y reconstructor.

(g) La interferencia a 10 kHz debe coincidir con la frecuencia $\theta = 2\pi/3$ que es anulada por el filtro digital. Por lo tanto la frecuencia de muestreo debe ser $f_s =$ 30 kHz (recordar que la frecuencia de muestreo corresponde a $\omega = 2\pi$)