Modulación y Procesamiento de Señales
Segundo Parcial 2019

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

16 de julio de 2019

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media y un total de 40 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [15 pts.]

Sea $x(t)$ una señal determinística cuyo espectro está dado por la expresión:

$$X(j\Omega) = \Lambda\left(\frac{\Omega + \Omega_c}{\Omega_c}\right) u(-\Omega - \Omega_c) + \Lambda\left(\frac{\Omega - \Omega_c}{\Omega_c}\right) u(\Omega - \Omega_c)$$

(estando Ω y Ω_c en radianes/segundo).

(a) Bosquejar $X(j\Omega)$ indicando ordenadas y abscisas de interés.

Se quiere enviar la señal $x(t)$ a través de un sistema de comunicación que permite enviar no más de $f_s = \frac{\Omega_c}{\pi}$ (correspondiente a $\Omega_s = 2\Omega_c$) muestras por segundo.

(b) Calcule la mínima frecuencia de muestreo que permita reconstruír la señal en el receptor. Si se muestrea $x(t)$ a una frecuencia f_s, ¿será posible reconstruír la señal en el receptor? Explique.

En lugar de enviar $x(t)$, se decide enviar $z(t)$, la que se obtiene utilizando el sistema de la figura 1.

(c) Muestre que el módulo del espectro de $z(t)$, $|Z(j\Omega)|$, queda como el de la figura 2 y verifique que es posible reconstruirla a partir de sus muestras tomadas a frecuencia f_s.

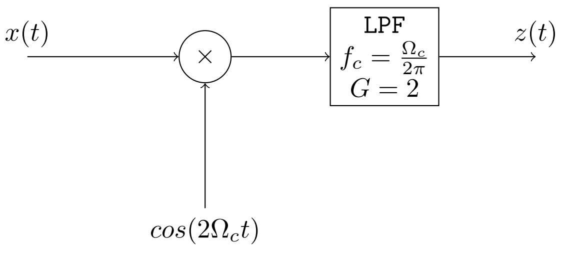


Figura 1: Sistema diseñado para obtener $z(t)$.

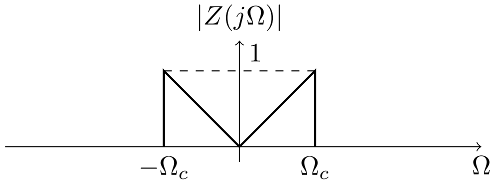


Figura 2: Espectro de la señal $z(t)$.

A partir de ahora se trabajará con la señal $z(t)$ muestreada a $f_s = \frac{\Omega_c}{\pi}$.

(d) Bosquejar el espectro, $Z(e^{j\omega})$, de la señal muestreada, $z[n] = z(nT_s)$. Especificar ordenadas y abscisas de interés.

(e) Se quiere cambiar la frecuencia de muestreo a $f'_s = \frac{3\Omega_c}{2\pi}$ muestras por segundo. Dibujar el diagrama de bloques para realizar dicho proceso y calcular los parámetros necesarios.

(f) Bosquejar el espectro de las señales intermedias del sistema de cambio de frecuencia de muestreo. Especificar ordenadas y abscisas de interés.

Problema 2 [15 pts.]

Se considera un sistema de transmisión banda base unipolar binario. La fuente emite símbolos "0" y "1" con probabilidad 1/3 y 2/3 respectivamente, a una tasa de r símbolos/s. Se utiliza el pulso conformador $p(t) = sinc(rt)$ modulado con amplitudes -2 y 1 para enviar "0" y "1" respectivamente. El canal tiene ancho de banda $BW_C = 40\ kHz$ e introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo y gaussiano con densidad espectral de potencia $\eta/2$ constante, con $\eta = 6 \times 10^{-6}\ W/Hz$. El filtro de recepción tiene ancho de banda $BW_R = BW_C$ y se muestrea en el instante óptimo.

(a) Bosquejar el pulso enviado cuando la fuente emite un "0" y cuando emite un "1". Bosquejar la onda conformada si se envía la secuencia 110.

(b) Calcule y esboce la densidad espectral de potencia de la señal PAM. Además, calcule la potencia de la señal PAM.

(c) Indicar el valor de la tasa de símbolos r que permite aprovechar al máximo el ancho de banda del canal sin introducir interferencia intersimbólica.

(d) ¿Cuanto vale la potencia de la señal en recepcion? Expresar el resultado en funcion de la potencia de la señal PAM (S_x) y el largo del canal L. Calcular la relación señal a ruido en recepción, suponiendo que el transmisor compensa la atenuación del canal.

(e) Suponga que en recepción se utiliza el umbral $V = -0.5$. Indicar la probabilidad de error en recepción.

(f) ¿Sería razonable suponer que utilizando este umbral se obtenga el mínimo error? Justificar, indicando el umbral optimo en caso de no ser el utilizado en la parte anterior.

Problema 3 [10 pts.]

(a) Dar el diagrama de bloques del transmisor y receptor de un sistema de comunicación PCM binario, explicando brevemente la función de cada uno de los bloques, y cómo se implementería un repetidor regenerativo de la señal entre transmisor y receptor.

Para un servicio de llamadas por internet se desea digitalizar y enviar las señales de voz de los usuarios, y para esto se decide utilizar un sistema PCM binario con el ancho de banda típico de la telefonia tradicional. Esto implica, muestrear con una frecuencia de muestreo, f_s, de 8000 Hz; cuantificar con $n = 8$ bits; y se busca asegurar una relación señal a ruido en detección, SNR_D mayor a 50 dB.

(b) ¿Cuántos niveles de cuantificación, q se tienen?

Para diseñar el sistema se asume que la señal está normalizada ($|x(t)| < 1$) y consecuentemente el fondo de escala del conversor analógico digital es $X_m = 1$. Además la densidad espectral de potencia es $G_x(f) = \frac{1}{W}\Lambda\left(\frac{f}{W}\right)$ con $W = 3.8$ kHz.

(c) ¿La frecuencia de muestreo elegida permite reconstruir la señal a partir de sus muestras? Justificar.

(d) Calcular la potencia de la señal PCM enviada.

(e) Si se asume que se esta trabajando sobre el umbra de PCM, ¿el sistema cumple la condición de relación señal a ruido en detección de calidad buscada?

Fórmulas útiles

Escalón:	$u(t)$	$=$	$\begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$
Rectángulo:	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$=$	$\begin{cases} 1 & \|t\|<\tau/2 \\ 0 & \|t\|>\tau/2 \end{cases}$
Triángulo:	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$=$	$\begin{cases} 1-\frac{\|t\|}{\tau} & \|t\|<\tau \\ 0 & \|t\|>\tau \end{cases}$
Coseno:	$cos(\theta)$	$=$	$\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$

Función	Transformada de Fourier
$r\text{sinc}(rt)$	$\Pi\left(\frac{f}{r}\right)$
$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau\text{sinc}^2(f\tau)$
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$x(t)e^{j\Omega_0 t}$	$X[j(\Omega-\Omega_0)]$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left[F(j\Omega)*G(j\Omega)\right]$

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

$$G_x(f)=\sigma_a^2 r_b|P(f)|^2+(\mu_a r_b)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|P(kr_b)|^2\delta(f-kr_b)$$

Probabilidad de error de receptor regenerativo binario con umbral de decisión V

$$P_e=P_0\,Q\left(\frac{V-a_0}{\sigma_\eta}\right)+P_1\,Q\left(\frac{a_1-V}{\sigma_\eta}\right)$$

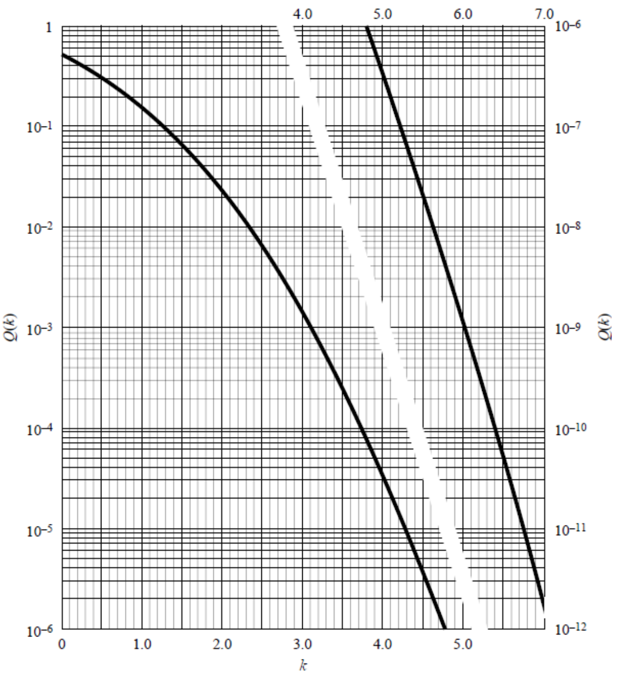
En el caso de señalización M-aria polar, para que $P_e\approx 10^{-5}$, se tiene que cumplir que

$$SNR_R\approx 6(M^2-1)$$

Relación señal a ruido en sistema PCM

$$SNR_D=\frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right)\frac{f_s}{2W}$$

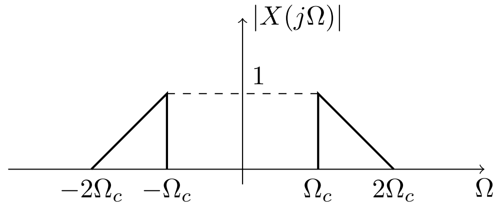
Función $Q(k)$ (cola gaussiana)



Solución

Problema 1

(a)



(b) La máxima frecuencia de la señal es $\Omega_{max} = 2\Omega_c$ ($f_{max} = \frac{2\Omega_c}{2\pi} = \frac{\Omega_c}{\pi}$).
Por el teorema del muestreo, la mínima frecuencia de muestreo es el doble que la frecuencia máxima de la señal: $\Omega_{s_{min}} = 2\Omega_{max} = 4\Omega_c$ ($f_{s_{min}} = 2f_{max} = \frac{2\Omega_c}{\pi}$).
La frecuencia $\Omega_s = 2\Omega_c$ es menor que la mínima frecuencia de muestreo admisible para poder reconstruir la señal en el receptor (en caso de muestrearlo a esa frecuencia se producirá aliasing).

(c) Se puede pensar de dos formas.
Por un lado, como la Transformada de Fourier del $\cos(2\Omega_c t)$ son dos deltas de amplitud π y centradas en $\pm 2\Omega_c$, utilizando el *Teorema de la Modulación* se puede convolucionar en frecuencia. El análisis se simplifica si se realiza en forma gráfica, trasladando los espectros.

Por otra parte se puede hacer en forma analítica y utilizando las propiedades de la Transformada de Fourier:

$$cos(2\Omega_c t) = \frac{e^{j2\Omega_c t} + e^{-j2\Omega_c t}}{2} \Longrightarrow z(t) = \frac{1}{2}x(t)e^{j2\Omega_c t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j2\Omega_c t}$$

Multiplicar en el tiempo por $e^{\pm j\Omega_0 t}$ es trasladar en frecuencia una cantidad $\pm\Omega_0$:

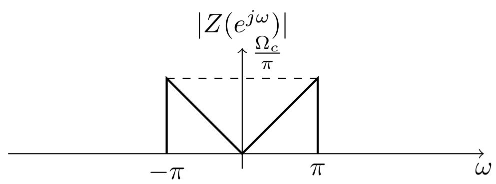
$$Z_{intermedio}(j\Omega) = \frac{1}{2}X[j(\Omega + \Omega_c)] + \frac{1}{2}X[j(\Omega - \Omega_c)]$$

En ambos casos, lo que resta por hacer es aplicar el filtro pasabajos con ganancia 2 para obtener el espectro deseado.

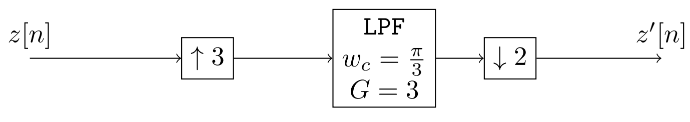
(d) Por el Teorema del Muestreo, hay un escalamiento en frecuencia:

$$\omega = 2\pi\frac{\Omega}{\Omega_s} = \pi\frac{\Omega}{\Omega_c}$$

A su vez la amplitud se ve escalada por un factor $f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi} = \frac{\Omega_c}{\pi}$. Se obtiene entonces el siguiente bosquejo:



(e)



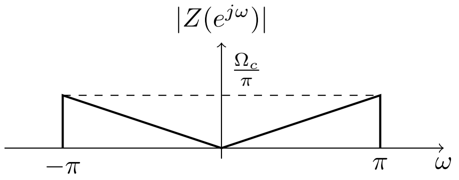


Figura 3: Previo al cambio de frecuencia de muestreo.

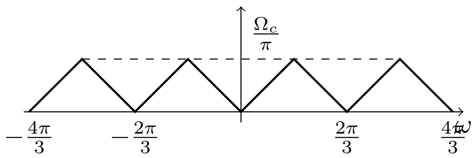


Figura 4: Luego del interpolador y antes del filtro pasabajos.

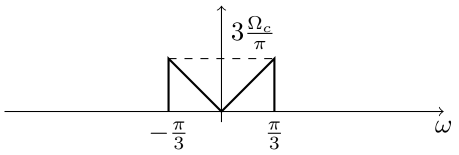


Figura 5: Luego del filtro pasabajos y antes del decimador.

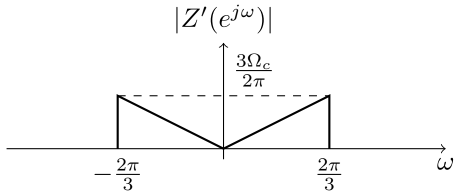
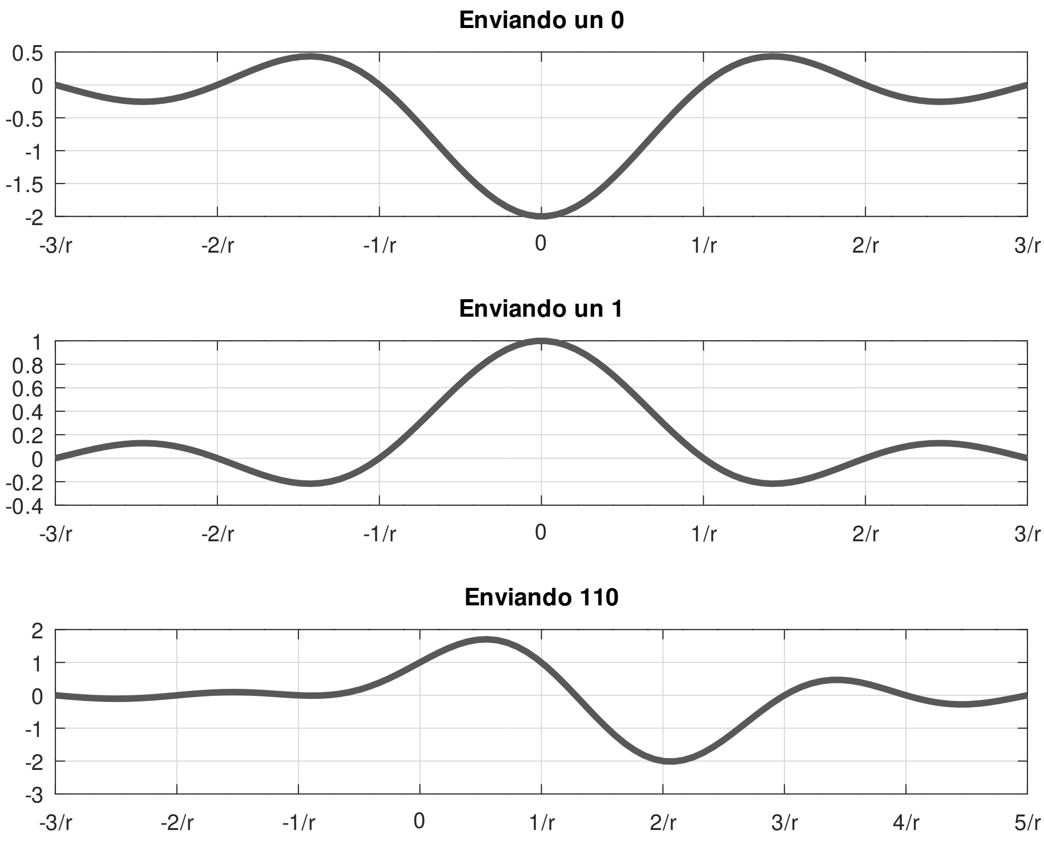


Figura 6: Luego del decimador.

(f) Los bosquejos se muestran en las figuras 3 a 6.

Problema 2



(a)

(b) La densidad espectral de potencia de una señal PAM de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD)$$

es

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta(f - kr_b) \quad (1)$$

El pulso conformador es

$$p(t) = sinc(rt).$$

que tiene transformada de Fourier

$$P(f) = \frac{1}{r}\Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

Se tiene que $\mu_a = \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1.(-2)}{3} + \frac{2.(1)}{3} = 0$ y $\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_k^2\} - \mu_a^2 = \frac{2^2+1^2.2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
Sustituyendo en la ecuación 1 se obtiene que la PSD queda

$$G_x(f) = \frac{2}{r}\Pi\left(\frac{f}{r}\right).$$

La potencia de la señal se puede calcular como el área de la PSD

$$S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = 2$$

(c) Se debe cumplir que $r \leq 2BW_C$, dada la característica del pulso conformador se puede transmitir a tasa máxima $r_{max} = 2BW_C = 80kHz$

(d) Como el transmisor compensa la atenuación del canal, se cumple que $S_R = S_x$, y por la parte (a) se tiene que

$$S_R = 2$$

Además, teniendo en cuenta que $N_R = \sigma_n^2 = \eta B_C$, se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{2}{\sqrt{\eta} BW_C}$$

(e) La probabilidad de error en recepción es

$$Pe = P_0 * P_{e0} + P_1 * P_{e1}$$

Donde $P_{e0} = Q\left(\frac{-2-V}{\sigma_n}\right)$ y $P_{e1} = Q\left(\frac{1-V}{\sigma_n}\right)$
Al operar se obtiene $P_{e0} = Q(3)$ y $P_{e1} = Q(3)$

(f) Dado que los símbolos no son equiprobables no es de esperar se obtendra el mínimo error en $V = -0.5$, es más probable enviar un "1" por lo tanto P_{e1} tiene un mayor peso que P_{e0} en la probabilidad de error. Necesariamente el umbral óptimo debe estar más cerca del símbolo "0".

Problema 3

(a) Transmisor y receptor PCM se muestran en la figura 7 y 8 respectivamente.
Explicación de los bloques: ver teórico.
Repetidor regenerativo: El repetidor regenerativo consta de un sistema con un receptor regenerativo el cual detecta el bit recibido y genera un pulso con la forma original enviada . Luego un transmisor lo vuelve a enviar hacia el receptor final. Así disminuyendo la probablilidad de error de decodificación.

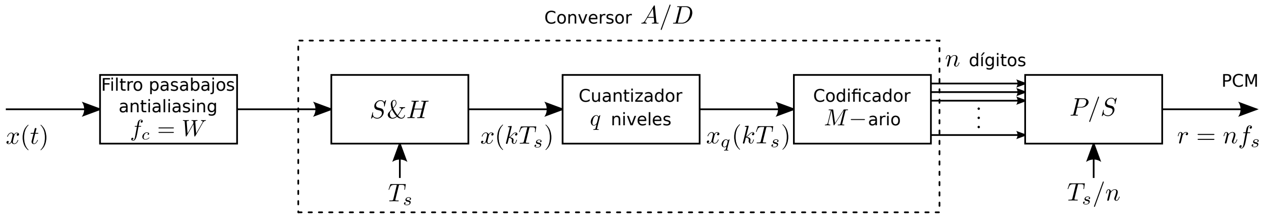


Figura 7: Transmisor PCM.

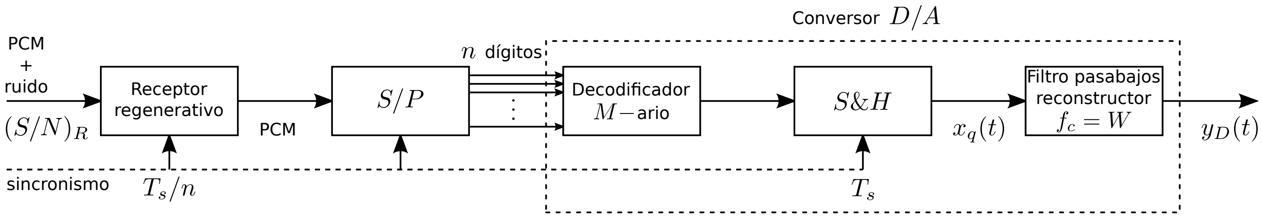


Figura 8: Receptor PCM.

(b)

$$q = 2^n = 256$$

(c) Si, porque se cumple el teorema de muestreo $fs > 2W$.

(d) La potencia la podemos calcular como la integral de la densidad espectral de potencia. Entonces:

$$S_x = 1$$

(e) Como se trabaja sobre el umbral de PCM se puede despreciar el error de decodificación, entonces:

$$SNR_D(dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{S_x}{X_m^2} 3q^2 \frac{f_s}{2W} \right) = 53.16dB > 50dB$$