Modulación y Procesamiento de Señales
Segundo Parcial 2018

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

16 de julio de 2018

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media y un total de 50 puntos.
- El resultado se truncará en 40 puntos: puntaje máximo que se puede obtener en esta prueba.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [10 pts.]

(a) Dar el diagrama de bloques del transmisor y receptor de un sistema PCM binario. Explicar la función de cada uno de los bloques.

En un estudio de grabación se desea digitalizar la señal de audio de un micrófono y enviarla a una consola para procesarla y mezclarla con otras señales. Para esto se decide utilizar un sistema PCM binario con calidad de CD. Esto implica, muestrear con una frecuencia de muestreo, f_s, de 44100 Hz; cuantificar con $n = 16$ bits; y asegurar una relación señal a ruido en detección, SNR_D mayor a 90 dB.

(b) ¿Cuántos niveles de cuantificación, q se tienen?

Para diseñar el sistema se asume que la señal está normalizada ($|x(t)| < 1$) y consecuentemente el fondo de escala del conversor analógico digital es $X_m = 1$. Además la densidad espectral de potencia es $G_x(f) = \frac{1}{W}\Lambda\left(\frac{f}{W}\right)$ con $W = 20$ kHz.

(c) ¿La frecuencia de muestreo elegida permite reconstruir la señal a partir de sus muestras? Justificar.

(d) Calcular la potencia de $x(t)$, S_x.

En lo que sigue se asume que se trabaja sobre el umbral de PCM.

(e) ¿El sistema cumple la condición de relación señal a ruido en detección de calidad de CD?

Problema 2 [20 pts.]

Se tiene una señal en tiempo continuo, $x(t)$, cuya transformada de Fourier es $X(f) = \Lambda\left(\frac{f-f_0}{f_0}\right) + \Lambda\left(\frac{f+f_0}{f_0}\right)$.

(a) Bosquejar $X(f)$. Especificar ordenadas y abscisas de interés.

La señal $x(t)$ se muestrea a una frecuencia $3f_0$ para obtener la secuencia $x[n]$.

(b) Explicar por qué no se cumple el teorema de muestreo.

(c) ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo con que se debería muestrear para poder reconstruir la señal $x(t)$ a partir de $x[n]$?

De ahora en adelante se trabajará a la frecuencia de muestreo mínima calculada anteriormente.

(d) Bosquejar el espectro, $X(e^{j\omega})$, de la señal muestreada, $x[n]$. Especificar ordenadas y abscisas de interés.

(e) Se quiere cambiar la frecuencia de muestreo a $f_s^{'} = 6f_0$. Dibujar el diagrama de bloques para realizar dicho proceso y calcular los parámetros necesarios.

(f) Bosquejar el espectro de las señales intermedias del sistema de cambio de frecuencia de muestreo. Especificar ordenadas y abscisas de interés.

Problema 3 [20 pts.]

Considere una fuente binaria que genera símbolos (denominados "0" y "1") de manera independiente a una tasa $r_b = 1/T_b$ conocida. Se sabe que la probabilidad de generar un "0" es 1/4. Se transmite la información con un sistema digital banda base utilizando una señalización polar $\{a_k\} = \{-A, A\}$ y un pulso conformador $p(t) = sinc(t/T_b)$ (los valores $-A$ y A se utilizarán para los símbolos "0" y "1" respectivamente).

(a) Bosqueje el pulso conformador en el intervalo $[-3T_b; 3T_b]$ detallando los puntos donde la señal se anula. Explique por qué es importante que el pulso conformador se anule en esos instantes.

(b) Halle el espectro del pulso conformador (su transformada de Fourier) y dé algún motivo por el cual le parezca importante que su espectro sea acotado.

(c) Calcule los momentos estadísticos de interés, es decir, la media ($\mu_a = E\{a_k\}$) y la varianza ($\sigma_a^2 = E\{(a_k - \mu_a)^2\}$).

(d) Muestre -justificando cada paso- que la densidad espectral de potencia, $G_x(f)$, de la señal conformada es

$$G_x(f) = \frac{A^2}{4}\left[3T_b\Pi(fT_b) + \delta(f)\right]$$

(e) Bosqueje la densidad espectral de potencia y determine el ancho de banda mínimo (B_T) para lograr una adecuada transmisión.

Suponga que el canal tiene un ancho de banda B_T en banda base que cumple los requerimientos mínimos e introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo, gaussiano, de media nula y densidad espectral de potencia $\eta/2$ constante con $\eta = 2\sigma^2 = 125mW/Hz$. El filtro de recepción tiene ancho de banda $B_R = B_T$ y se muestrea en el instante óptimo. Suponga además $A = 1$ y que el umbral de decisión vale $V = 0$.

(f) Calcule la probabilidad de error P_e en la detección de símbolos.

(g) Explique por qué V no es el umbral óptimo de decisión. Si tuviese que encontrar el umbral óptimo de decisión, ¿lo buscaría en valores menores o mayores a $V = 0$?

Fórmulas útiles

Pulso rectangular

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \tau/2 \\ 0 & \text{si } |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Función triángulo

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau} & \text{si } |t| < \tau \\ 0 & \text{si } |t| > \tau \end{cases}$$

Las siguientes funciones forman un par de transformadas de Fourier

$$p(t) = r\mathrm{sinc}(rt) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P(f) = \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

$$p(t) = \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P(f) = \tau\mathrm{sinc}^2(f\tau)$$

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta(f - kr_b)$$

Probabilidad de error de receptor regenerativo binario con umbral de decisión V

$$P_e = P_0\, Q\left(\frac{V - a_0}{\sigma_\eta}\right) + P_1\, Q\left(\frac{a_1 - V}{\sigma_\eta}\right)$$

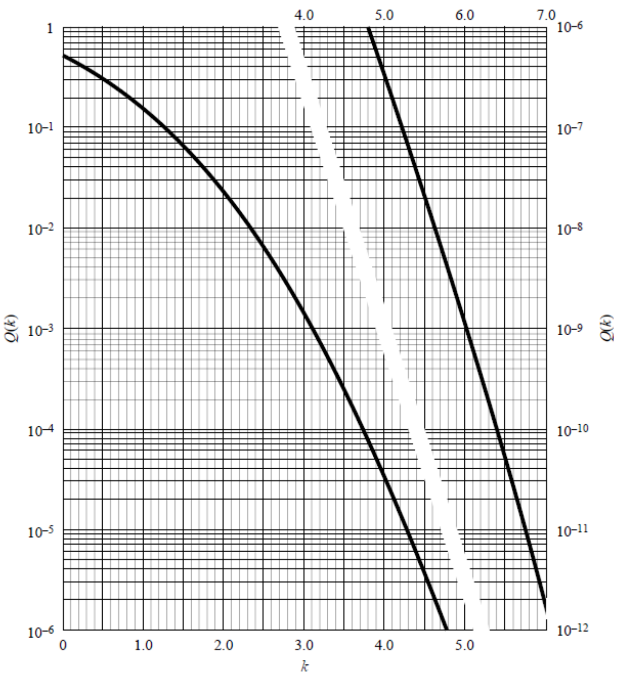
En el caso de señalización M-aria polar, para que $P_e \approx 10^{-5}$, se tiene que cumplir que

$$SNR_R \approx 6(M^2 - 1)$$

Relación señal a ruido en sistema PCM

$$SNR_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1 + 4q^2 P_e}\right)\frac{f_s}{2W}$$

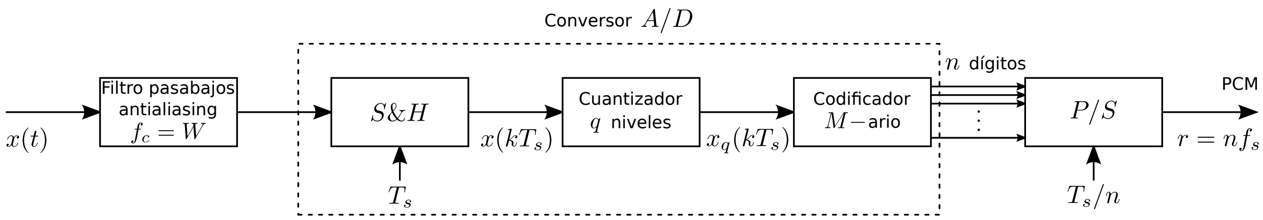
Función $Q(k)$ (cola gaussiana)



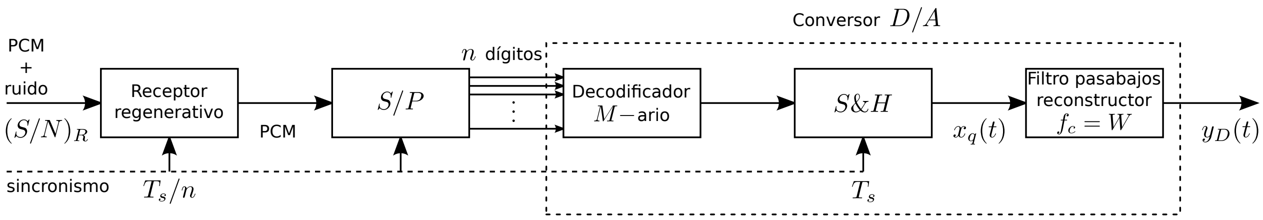
Solución

Problema 1

(a) Transmisor PCM:



Receptor PCM:



Explicación de los bloques: ver teórico.

(b)

$$q = 2^n = 65536$$

(c) Si, porque se cumple el teorema de muestreo $fs > 2W$.

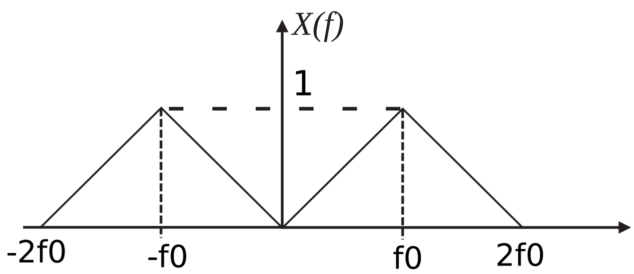
(d) La potencia la podemos calcular como la integral de la densidad espectral de potencia. Entonces:

$$S_x = 1$$

(e) Como se trabaja sobre el umbral de PCM se puede despreciar el error de decodificación, entonces:

$$SNR_D(dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{S_x}{X_m^2} 3q^2 \frac{f_s}{2W} \right) = 101.5dB > 90dB$$

Problema 2

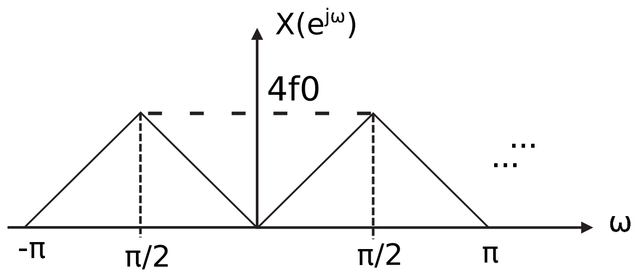


(a)

(b) Porque $f_s = 3f_0 < 4f_0$.

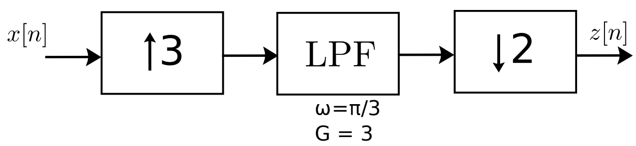
(c) $f_s = 4f_0$.

(d)



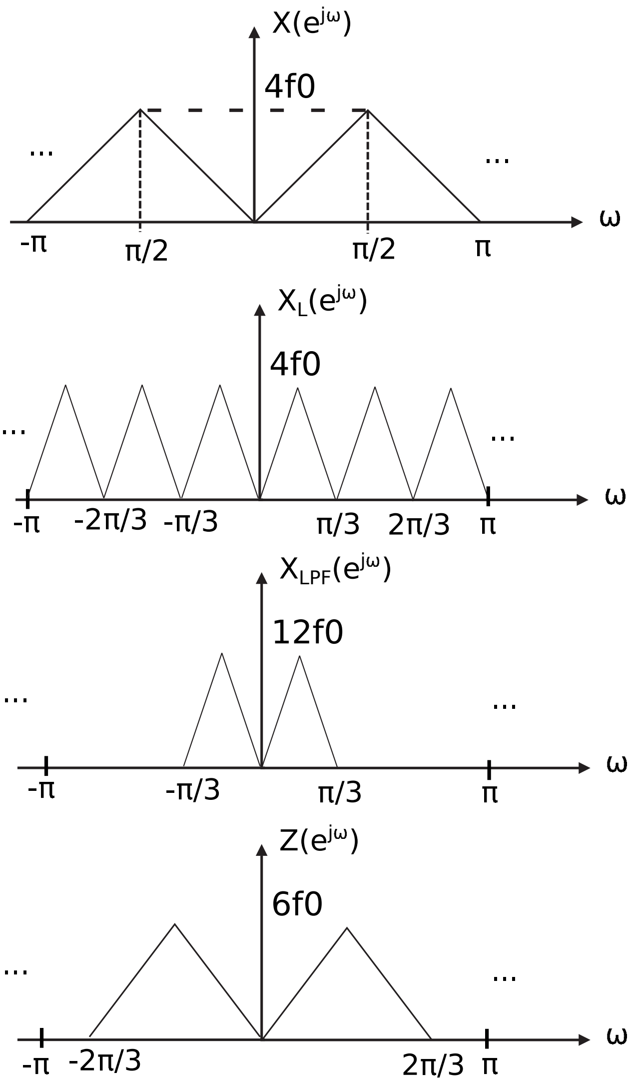
X(e^jω)
4f0
...
ω
-π
π/2
π/2
π

(e)



x[n]
↑3
LPF
↓2
z[n]
ω=π/3
G = 3

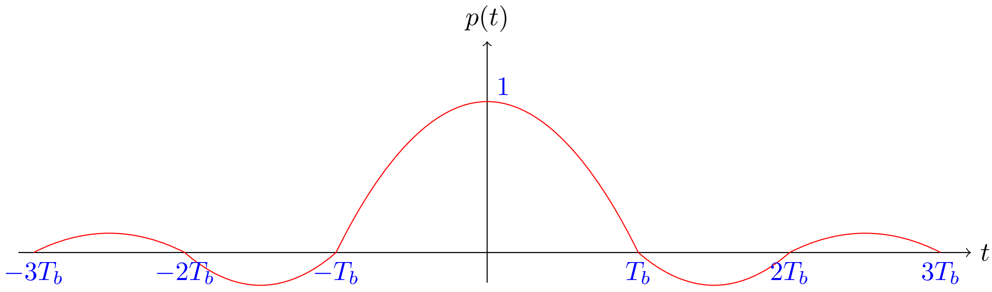
(f)



X(e^jω)
4f0
...
ω
-π
π/2
π/2
π
X_L(e^jω)
4f0
-π
-2π/3
-π/3
π/3
2π/3
π
X_LPF(e^jω)
12f0
-π/3
π/3
Z(e^jω)
6f0
-2π/3
2π/3

Problema 3

(a) A continuación se realiza el bosquejo del pulso conformador:



Es importante que se anule en los instantes $t = kT_b$ con $k \neq 0$ para que no interfiera con otros símbolos del mensaje; el muestreo de la señal se realiza en los instantes kT_b y en cada instante de muestreo debe haber señal correspondiente a un sólo símbolo, el símbolo a_k.

(b)

$$p(t) = sinc\left(\frac{t}{T_b}\right) \Longrightarrow P(f) = T_b\Pi(fT_b)$$

Es importante que el espectro sea acotado para que al transmitirse por un canal de ancho de banda finito, la señal no se deforme. También puede ser útil para compartir el canal con otras señales sin que éstas se interfieran entre sí.

(c)

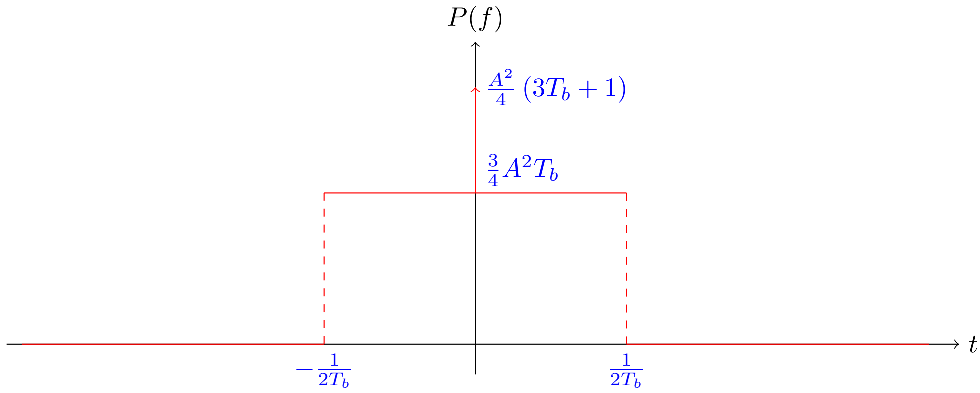
$$\mu_a = E\{a_k\} = \frac{1}{4}(-A) + \frac{3}{4}A = \frac{A}{2}$$

$$\sigma_a^2 = E\{(a_k - \mu_a)^2\} = \frac{1}{4}\left(-A - \frac{A}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(A - \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}A^2$$

(d) Se obtiene utilizando la ecuación para la densidad espectral de potencia y teniendo en cuenta lo siguiente:

- $\Pi(fT_b)$ o bien vale 0, o bien vale 1, entonces $\Pi(fT_b) = \Pi^2(fT_b)$.
- $\Pi(kT_b) = 0 \quad \forall \quad k \neq 0$, entonces de la sumatoria sólo importa el término en $k = 0$.

(e)



Evidentemente, el ancho de banda mínimo de transmisión es $B_T = \frac{1}{2T_b} = \frac{r}{2}$.

(f) Utilizando la formula para la probabilidad de error:

$$P_e = \frac{1}{4}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + \frac{3}{4}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q(4) \approx 3 \times 10^{-5}$$

(g) Se vio en el curso que el umbral óptimo de decisión se da en el cruce de las curvas $p(0)p(v > V + A|0)$ y $p(1)p(v < V - A|1)$, es decir, donde ambos términos son iguales. V no es el umbral óptimo de decisión ya que $\frac{1}{4}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \neq \frac{3}{4}Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$