

Modulación y Procesamiento de Señales

Segundo Parcial 2017

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

17 de julio de 2017

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media y un total de 60 puntos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

- (a) Dar el diagrama de bloques del transmisor y receptor de un sistema PCM binario. Explicar la función de cada uno de los bloques.
- (b) Bosquejar la SNR_D en función de la SNR_R , paramétrico en el número de niveles q . Indicar y justificar el punto de trabajo óptimo.
- (c) En el sistema de telefonía tradicional, la señal del micrófono del teléfono es enviada a la central telefónica donde es digitalizada y codificada con PCM binario. El ancho de banda de la señal es $W = 4kHz$ y se muestrea a la mínima frecuencia de muestreo f_s para que no haya solapamiento. Las muestras se cuantizan y codifican con $n = 8$ bits.
- i ¿Cuál es el número de niveles de cuantización q ?
- ii ¿Cuál es la cadencia de bits r ?
- iii ¿Cuánto ancho de banda B_T se necesita? Compare su valor con el necesario para enviar la señal analógica sin modular.

Pregunta [10 pts.]

- (a) Describa las diferencias entre transmisión pasabanda y bandabase.
- (b) Se quiere transmitir dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ utilizando el mismo canal. Las densidades espectrales de potencia de las señales son $G_{x_1}(f) = \Pi\left(\frac{f}{50kHz}\right)$ y $G_{x_2}(f) = 2\Pi\left(\frac{f}{40kHz}\right)$ respectivamente. Las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son transmitidas moduladas en amplitud utilizando portadoras de $f_{c_1} = 100kHz$ y f_{c_2} desconocida, resultando en:

$$x_{c_1}(t) = x_1(t) \cos(2\pi f_{c_1} t)$$

$$x_{c_2}(t) = x_2(t) \cos(2\pi f_{c_2} t)$$

Se quiere diseñar f_{c_2} para que sea mayor que f_{c_1} y para que ambas señales puedan recibirse sin perder información ¿Qué condición debe cumplir f_{c_2} ? Dibujar el espectro de las señales moduladas sumadas ($x_{c_1}(t) + x_{c_2}(t)$).

- (c) Dibujar la constelación de un sistema de comunicación pasabanda PSK (Modulación por desplazamiento de fase) con $M = 4$. ¿Cuál es la diferencia si se utilizara modulación QAM (Modulación de amplitud en cuadratura)?

Problema 1 [20 pts.]

Se considera un sistema de transmisión bandabase bipolar binario con retorno a cero **RZ**. La fuente emite símbolos “0” y “1” con probabilidad $1/5$ y $4/5$ respectivamente, a una tasa de $r = 10$ símbolos/s y se utilizan pulsos $p(t) = \Pi(\frac{t}{D/2})$ modulados con amplitudes $-A/2$ y $A/2$, donde $D = 1/r$. El canal tiene ancho de banda $B_C = 24 \text{ kHz}$ e introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo y gaussiano con densidad espectral de potencia $\eta/2$ constante, con $\eta = 3 \times 10^{-6} \text{ W/Hz}$. El filtro de recepción tiene ancho de banda $B_R = B_C$ y se muestrea en el instante óptimo.

- Bosquejar la onda conformada si se envía la secuencia 1001.
- Calcular y esbozar la densidad espectral de potencia de la señal PAM. Además, calcular la potencia de la señal PAM en función de A .
- Considerando la actual tasa de transferencia r y que no se desea interferencia intersimbólica. ¿Se está aprovechando al máximo el ancho de banda del canal? Justificar.
- Calcular la relación señal a ruido en recepción en función de A , suponiendo que el transmisor compensa la atenuación del canal.
- Suponga que ahora el sistema trabaja con $A = 1.6$ y en recepción se utiliza el umbral $V = -0.8$. Indicar la probabilidad de error en recepción.

Problema 2 [20 pts.]

Dos radioaficionados quieren diseñar un sistema de comunicación entre sus casas. Deciden utilizar un sistema bandabase PCM. Las señal que enviarán $x(t)$ puede ser de voz o música por lo que deciden modelarlas con una densidad espectral de potencia igual a $G_x(f) = \frac{2}{W} \Pi(\frac{f}{W})$, donde $W = 40 \text{ kHz}$. Asumen que la señal está normalizada ($|x(t)| < 1$) y consecuentemente el fondo de escala del conversor analógico digital es $X_m = 1$. La frecuencia de muestreo la eligen $f_s = 1.5f_N$, siendo f_N la mínima frecuencia de muestreo válida. Deciden utilizar señalización polar y pulso de conformación rectangular con retorno a cero **RZ**.

- ¿Por qué cree que deciden utilizar señalización polar? ¿Qué ventajas y desventajas tiene utilizar pulso de conformación con retorno a cero?

Los radioaficionados quieren que la calidad de la señal en detección sea muy buena, por lo que deciden que la SNR_D debe ser mayor que 60 dB y se trabajará en el umbral de PCM.

- ¿Cuál debe ser el mínimo largo de palabra n y la cantidad de niveles de cuantización q ?
- Determinar la cadencia de símbolos r_b en kbps. Determinar la mínimo ancho de banda necesario B_T .

El filtro de recepción lo eligen con el mismo ancho de banda B_T calculado anteriormente. Además, hacen pruebas al canal de comunicación y descubren que tiene una atenuación $L = 10$ en potencia e introduce ruido con densidad espectral de potencia $\frac{\eta}{2}$ con $\eta = 10^{-6} \text{ W/Hz}$.

- Para terminar de diseñar el sistema, necesitan determinar con qué potencia deben transmitir. ¿Cuál es la mínima potencia de transmisión S_T necesaria para cumplir con las especificaciones?
- Si se transmite al doble de la potencia S_T hallada en la parte anterior, ¿se mejora el desempeño del sistema?

Fórmulas útiles

Pulso rectangular $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < \tau/2 \\ 0 & \text{si } t > \tau/2 \end{cases}$	Función triángulo $\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{\tau} & \text{si } t < \tau \\ 0 & \text{si } t > \tau \end{cases}$
--	---

Las siguientes funciones forman un par de transformadas de Fourier

$$p(t) = r \operatorname{sinc}(rt) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P(f) = \Pi\left(\frac{f}{r}\right)$$

$$p(t) = \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} P(f) = \tau \operatorname{sinc}^2(f\tau)$$

Densidad espectral de potencia de señal PAM digital

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta(f - kr_b)$$

Probabilidad de error de receptor regenerativo con umbral V óptimo

$$P_e = P_0 Q\left(\frac{V - a_0}{\sigma_\eta}\right) + P_1 Q\left(\frac{a_1 - V}{\sigma_\eta}\right)$$

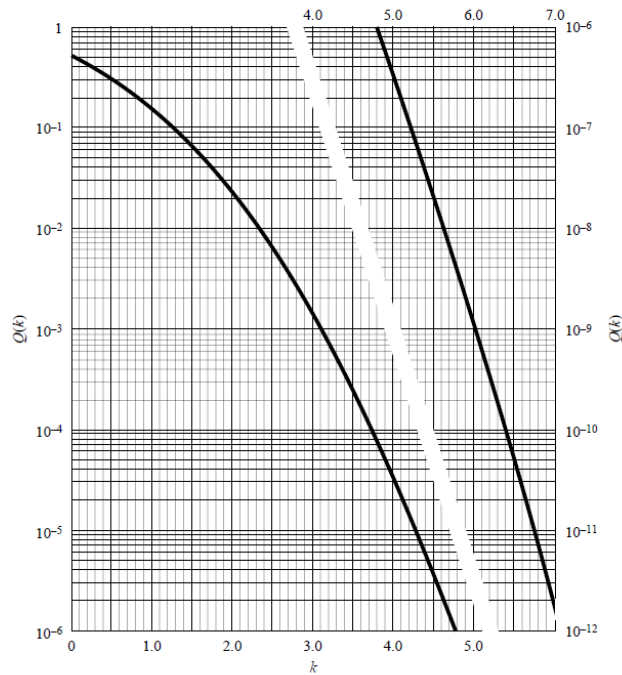
En el caso de señalización M-aria polar, para que $P_e \approx 10^{-5}$, se tiene que cumplir que

$$SNR_R \approx 6(M^2 - 1)$$

Relación señal a ruido en sistema PCM

$$SNR_D = \frac{S_x}{X_m^2} \left(\frac{3q^2}{1 + 4q^2 P_e} \right) \frac{f_s}{2W}$$

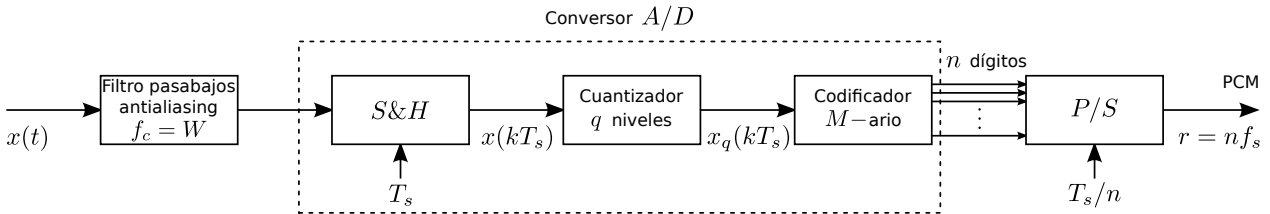
Función $Q(k)$ (cola gaussiana)



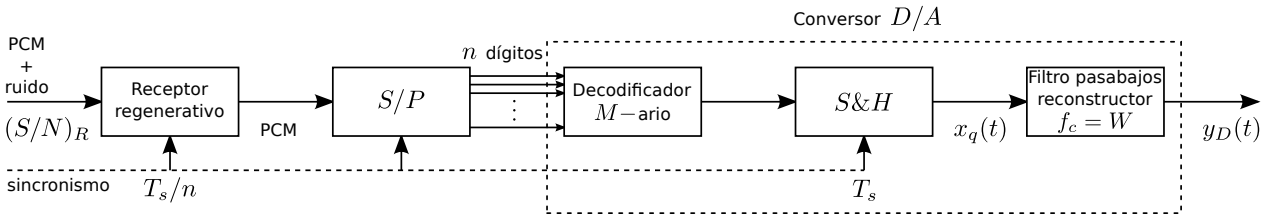
Solución

Pregunta

(a) Transmisor PCM:

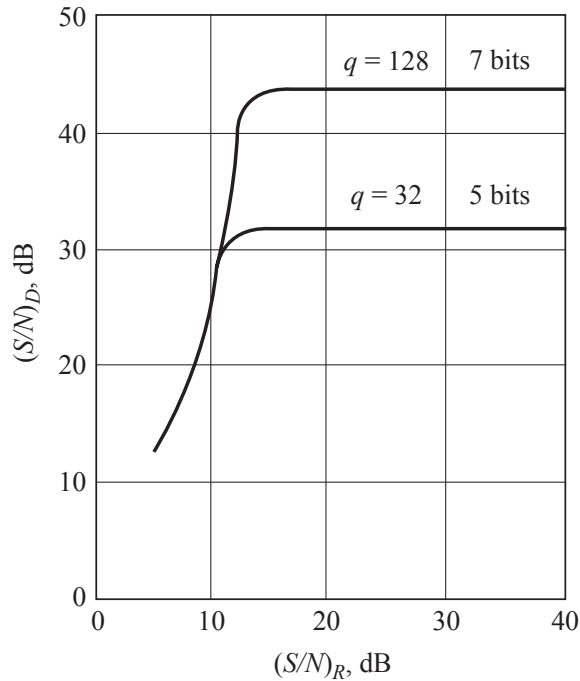


Receptor PCM:



Explicación de los bloques: ver teórico.

(b) En un sistema PCM deben evitarse los errores de decodificación, ya que alteran la amplitud de la señal en gran magnitud y si ocurren muy frecuentemente, deterioran tanto la forma de onda que el mensaje se hace irreconocible. Los sistemas de comunicación PCM se diseñan para operar en la región donde $P_e \ll 1/4q^2$, es decir, donde el ruido de decodificación es despreciable frente al ruido de cuantización. En la figura de la SNR_D en función de la SNR_R , es la región alrededor del punto de inflexión.



(c)

i $q = 2^n = 256$

ii $r = nf_s = 8\text{bits} \times 8\text{kHz} = 64\text{kbps}$

iii $B_T > \frac{r}{2} = 32\text{kHz}$.

Pregunta

(a) Ver Teórico.

(b) $f_{c2} \geq 145\text{kHz}$

(c) Ver Teórico.

Problema 1

(b) La densidad espectral de potencia de una señal PAM de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kD)$$

es

$$G_x(f) = \sigma_a^2 r_b |P(f)|^2 + (\mu_a r_b)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(kr_b)|^2 \delta(f - kr_b) \quad (1)$$

El pulso conformador es

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{D/2}\right).$$

que tiene transformada de Fourier

$$P(f) = \frac{\text{sinc}(f/2r)}{2r}$$

Se tiene que $\mu_a = \mathbb{E}\{a_k\} = \frac{3A}{10}$ y $\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_k^2\} - \mu_a^2 = \frac{4A^2}{25}$
Sustituyendo en la ecuación 1 se obtiene que la PSD queda

$$G_x(f) = \frac{A^2}{25r} \text{sinc}^2(f/2r) + \left(\frac{3A}{10}\right)^2 \delta(f).$$

La potencia de la señal se puede calcular como el área de la PSD o tomando en cuenta la siguiente relación,

$$S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f) df = R_x(0) = \left[\frac{2A^2}{25} \Lambda\left(\frac{t}{2r}\right) + \left(\frac{3A}{10}\right)^2 \right]_{t=0} = \frac{17A^2}{100}$$

(c) Para poder transmitir información sin interferencia intersimbólica se debe cumplir que $r \leq 2B_C$, con un pulso conformador adecuado se podría transmitir a tasa máxima $r_{max} = 2B_C = 48\text{kHz}$. Actualmente no se está aprovechando al máximo el ancho de banda del canal.

(d) Como el transmisor compensa la atenuación del canal, se cumple que $S_R = S_x$, y por la parte (a) se tiene que

$$S_R = \frac{17A^2}{100}$$

Además, teniendo en cuenta que $N_R = \sigma_n^2 = \eta B_C = 72/1000 W$, se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{170A^2}{72}$$

(e) La probabilidad de error en recepción es

$$Pe = P_0 * P_{e0} + P_1 * P_{e1}$$

Donde

$$P_{e0} = Q\left(\frac{V - (-A/2)}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{-0.8 + 0.8}{\sqrt{0.072}}\right) = Q(0) \simeq 5 \times 10^{-1}$$

$$P_{e1} = Q\left(\frac{A/2 - V}{\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{0.8 + 0.8}{\sqrt{0.072}}\right) \simeq Q(6) \simeq 1 \times 10^{-9}$$

Al operar se obtiene

$$Pe \simeq (1/5) * (5 \times 10^{-1}) + (4/5) * (1 \times 10^{-9}) \simeq 4 \times 10^{-10}$$

Problema 2

(a)

(b) Como se trabaja en el umbral de PCM, se puede despreciar el ruido de decodificación, entonces:

$$SNR_D = \frac{S_x}{X_m^2} 3q^2 \frac{f_s}{2W_x}$$

A partir del área de la densidad espectral de potencia $G_x(f)$ se puede obtener la potencia de la señal $S_x = 2$, donde además queda claro que el ancho de banda de la señal es $W_x = 20 kHz$. Con lo cual resulta

$$SNR_D = 2 \times 3q^2 \times 1.5 = 9q^2 > 10^6$$

Despejando los niveles de cuantización

$$q \geq \sqrt{\frac{10^6}{9}} \simeq 333$$

Si consideramos que se necesitan al menos cuantificar ese número de niveles,

$$q \leq M^n$$

Donde por ser un sistema PCM binario se tiene $M = 2$, despejando se obtiene que el largo de palabra debe cumplir,

$$n = 9$$

$$q = 512$$

(c) La frecuencia de muestreo es $f_s = 1.5f_N = 1.5(2 \times 20 kHz) = 60 kHz$

La cadencia de símbolos es,

$$r_b = nf_s = (9 \times 60 kHz) kbps = 540 kbps$$

Según Nyquist se necesita un canal de al menos,

$$B_T \geq \frac{540 kHz}{2} = 270 kHz$$

(d) La potencia de señal en recepción es $S_R = \frac{S_T}{L}$, y la potencia de ruido $N_R = \eta B_T = 10^{-6} W/Hz \times 270 kHz = 0.27 W$. Para que se cumpla la hipótesis de que se puede despreciar el efecto del ruido de decodificación se debe cumplir que,

$$SNR_R = \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 6(M^2 - 1) = 18$$

Despejando la potencia transmitida,

$$S_T \geq 18L\eta B_T = 48.6 W$$

(e) No, porque ya se trabaja sobre el umbral. Cuando aumenta S_T , aumenta SNR_R pero la SNR_D no aumenta.