Modulación y Procesamiento de Señales
Primer Parcial 2019

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

14 de mayo de 2019

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [20 pts.]

Se quiere estudiar un sistema S_1 cuya respuesta al impulso es de la forma:

$$h_1[n] = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si} \quad 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \quad \text{para otro n} \end{cases}$$

(a) Bosquejar $h_1[n]$ y escribirla como:

  I) una suma de deltas,

  II) una resta de escalones.

(b) Calcular $h_2[n]$, respuesta al impulso del sistema S_2, como la respuesta al impulso del sistema S_1 retrasada cuatro muestras y luego invertida en el tiempo.

(c) Definir *sistema causal*. ¿Son causales los sistemas S_1 y S_2? Justifique.

(d) Indicar si el sistema definido por h_1 es lineal, invariante en el tiempo, estable BIBO y sin memoria.

(e) Calculando la salida del sistema S_1 a partir de la convolución de $h_1[n]$ con una entrada genérica $x[n]$, verficar que el sistema queda determinado por la ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$$

(f) Dibujar el diagrama de bloques del sistema S_1.

(g) Encontrar $H_1(e^{j\omega})$, respuesta en frecuencia del sistema S_1.

En la figura 1 se bosqueja $|H_1(e^{j\omega})|$, el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema S_1.

(h) ¿Que tipo de filtro es el sistema S_1?

Se prueba el sistema S_1 utilizando dos entradas disintas: $x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right)$ y $x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$.

(i) ¿Cuál de las dos salidas tendrá mayor amplitud? Justifique.

(j) Utilizando $H_1(e^{j\omega})$, calcule la salida $y_1[n]$.

(k) Se quiere encontrar un filtro tal que al aplicarlo sobre una salida del sistema S_1, devuelva la entrada original. Dar la expresion de este filtro en frecuencia $H'(e^j\omega)$.

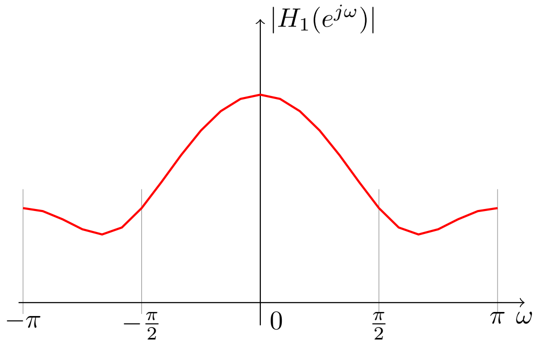


Figura 1: Bosquejo de $|H_1(e^{j\omega})|$, módulo de la respuesta en frecuencia del sistema S_1.

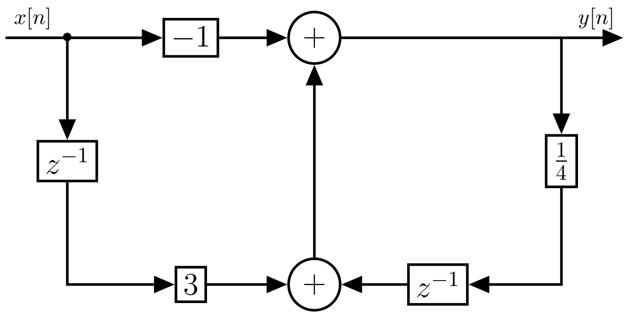


Figura 2: Diagrama de bloques del sistema S.

Problema 2 [20 pts.]

(a) I) ¿Cuál es la *condición necesaria* que deben cumplir los polos de la transferencia $H(z)$ de un sistema lineal e invariante en el tiempo (SLIT) para que además sea *causal* y *estable*?

II) ¿Es esta una *condición suficiente*? Explique.

El sistema S, lineal, invariante en el tiempo, causal y estable, admite una representación en diagrama de bloques como el ilustrado en la figura 2.

(b) A partir del diagrama de bloques de la figura 2, deduzca la ecuación en recurrencia del sistema S.

(c) A partir de la ecuación en recurrencia de la parte anterior, halle la Transformada Z de su respuesta al impulso y muestre que tiene la siguiente expresión:

$$H(z) = \frac{3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

(d) I) A partir de $H(z)$, halle $h[n]$.

II) Muestre que $h[n]$ puede escribirse como

$$h[n] = 11\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 12\delta[n]$$

(e) Calcule los valores de $h[n]$ para $-2 \leq n \leq 2$ y realice un gráfico de ellos.

(f) Calcule $Y(z)$, Transformada Z de la salida, cuando a la entrada se inyecta una señal

$$x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1]$$

¿Cómo calcularía la salida $y[n]$?

(g) A partir de la ecuación en recurrencia, realice un diagrama de bloques del sistema S utilizando la mínima cantidad de retardos posible.

Solución

Problema 1

(a) Suma de deltas: $h_1[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2]$
Resta de escalones: $h_1[n] = u[n] - \frac{1}{2}u[n-1] - \frac{1}{6}u[n-2]$

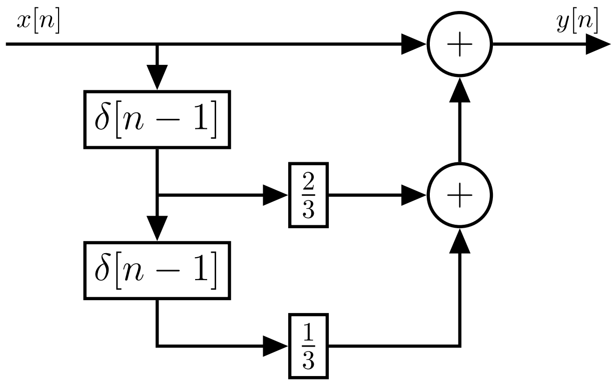
(b) retrasada: $hret[n] = h1[n-4] = \delta[n-4] + \frac{1}{2}\delta[n-5] + \frac{1}{3}\delta[n-6]$
y luego invertida: $h_2[n] = hret[-n] = h1[-n-4] = \delta[-n-4] + \frac{1}{2}\delta[-n-5] + \frac{1}{3}\delta[-n-6]$

(c) Un sistema es causal si para todo n_0, la salida en el instante $n = n_0$ depende de valores de la entrada en $n \leq n_0$. S1 es causal por la condicion necesaria y suficiente de causalidad (respuesta al impulso nula para n menor a cero) y S2 no porque no cumple dicha condicion.

(d) El sistema es lineal e invariante en el tiempo por letra, de no ser asi no se podria calcular su respuesta ante una entrada a partir de la respuesta al impulso. La respuesta al impulso es sumable por lo tanto cumple la condicion necesaria y suficiente de estabilidad BIBO. El sistema es con memoria ya que la salida $y[n]$ en cada valor de n NO depende solo de la entrada $x[n]$ en el mismo valor de n. n

(e) Aplicando definicion de convolucion.

(f)



(g) Aplicar definicion de transformada de fourier. $H_1(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2}e{-}j\omega + \frac{1}{3}e{-}2j\omega$

(h) El filtro es del tipo pasa-bajos. Porque su respuesta en modulo es mas grande en frecuencias bajas, cercanas a cero.

(i) La entrada de menor frecuencia (x2) tendra mayor amplitud.

(j) con $\omega = \pi/2 \Rightarrow |H(e^{-j\omega})| = |1 + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}e^{-j\pi}| = |\frac{2}{3} + \frac{1}{2}j| = \sqrt{25/36} = \frac{5}{6}$
$arg(H(e^{-j\omega}) = arctg(\frac{1/2}{2/3}) = arctg(\frac{3}{4})$
con $\omega = \pi \Rightarrow |H(e^{-j\omega})| = |1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi} + \frac{1}{3}e^{-2j\pi}| = |1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}| = \frac{5}{6}$ $arg(H(e^{-j\omega}) = 0$

(k) $H'(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$

Problema 2

(a)

I) Para que un SLIT sea causal y estable los polos del sistema deben, necesariamente, estar dentro de la circunferencia unidad ($|z_p| < 1$).

II) La condición no es suficiente, es necesaria. Bien podría pasar que la zona de convergencia no sea la correspondiente a la que va desde el polo de mayor módulo hacia el infinito.

(b)

$$y[n] = -x[n] + 3x[n-1] + \frac{1}{4}y[n-1]$$

(c) Si se hace la Transformada Z de la ecuación en recurrencia (utilizando propiedades básicas), se obtiene:

$$Y(z) = -X(z) + 3z^{-1}X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z)$$

luego, reordenando, se obtiene

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-1+3z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{3z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

(d) Antitransformando $H(z)$ y utilizando propiedades básicas, se tiene:

$$\begin{aligned} h[n] &= 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n] \\ &= 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} u[n-1] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n] \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{n}(12u[n-1] - u[n]) \\ &= 11\left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n] - 12\delta[n] \end{aligned}$$

(e)

n	$h[n]$
-2	0
-1	0
0	-1
1	11/4
2	11/16

(f)

$$X(z) = 2 - z^{-1} \Longrightarrow Y(z) = H(z)X(z) = \frac{(3z^{-1}-1)(2-z^{-1})}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Para hallar $y[n]$ se puede antitransformar $Y(z)$ pero es mucho más sencillo ver que la entrada es una combinación lineal de impulsos retrasados, entonces la salida va a ser una combinación lineal de respuestas al impulso ($h[n]$) retrasadas:

$$y[n] = 2h[n] - h[n-1]$$

(g)