Modulación y Procesamiento de Señales
Primer Parcial 2018

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

16 de mayo de 2018

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [20 pts.]

Se quiere estudiar el filtro de media móvil. La respuesta al impulso del sistema es:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si} \quad 0 \leq n \leq 5 \\ 0 & \text{para otro n} \end{cases}$$

(a) Bosquejar $h[n]$.

(b) Escribir $h[n]$ como:
i. una suma de deltas,
ii. una resta de escalones.

(c) ¿El sistema es causal? Justifique.

(d) i. Definir estabilidad BIBO.
ii. ¿Cuál es la condición suficiente de estabilidad para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo?
iii. ¿El filtro de media móvil es estable? Justifique.

(e) Encontrar la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\omega})$. *Sugerencia: puede ser útil recordar que la transformada de Fourier de* $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{para otro n} \end{cases}$ *es* $X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$.

El módulo de la respuesta en frecuencia $|H(e^{j\omega})|$ entre $-\pi$ y π se puede bosquejar como se ve en la Figura 1.

(f) ¿Para qué valores de ω se cumple que $|H(e^{j\omega})| = 0$ (puntos A,B y C del bosquejo)?

(g) ¿Qué tipo de filtro es en cuanto a la selección de frecuencias?

Se prueba el sistema utilizando una entrada $x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$.

(h) ¿Cómo es la salida del sistema $y_1[n]$?

Ahora se prueba el sistema con señales $x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)$ y $x_3[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$.

(i) ¿Cuál de las dos salidas tendrá mayor amplitud, $y_2[n]$ o $y_3[n]$?

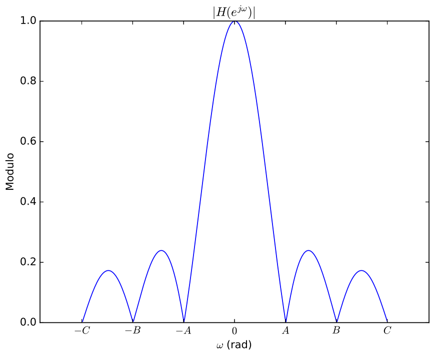


Figura 1: Bosquejo de la respuesta en frecuencia $|H(e^{j\omega})|$.

Problema 2 [20 pts.]

El sistema S es lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h[n]$. La expresión de la transformada Z de $h[n]$ es

$$H(z) = \frac{5(z^{-1} - 1)}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

(a) Muestre las posibles regiones de convergencia (RoC) de $H(z)$ justificando cuál/es corresponde/n a un sistema estable y cuál/es corresponde/n a un sistema causal (puede ser útil realizar un diagrama de polos y ceros en el plano complejo).

A partir de ahora asuma que la región de convergencia de $H(z)$ es

$$\text{RoC} : \left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\}.$$

(b) ¿El sistema S está completamente caracterizado por su respuesta al impulso? Justifique.

(c) Halle la transformada Z de la salida, $Y(z)$, cuando la entrada es

$$x[n] = u[n-2].$$

(d) Halle la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(e) Muestre, a partir de la expresión de $H(z)$, que el sistema S admite la expresión en recurrencia:

$$y[n] = 5x[n-1] - 5x[n] + \frac{3}{2}y[n-1] + y[n-2].$$

(f) Realice un diagrama de bloques del sistema utilizando la mínima cantidad de retardos posible.

(g) Si el sistema fuera causal, se podría encontrar su respuesta al impulso, $h_{causal}[n]$, iterando con la expresión en recurrencia de la parte (e). Para ello se sustituye $x[n]$ por $\delta[n]$ y se supone que $y[n] = 0$ para $n < 0$. Obtenga los valores de $h_{causal}[n]$ para $n = 0, 1, 2$. Verifique que difieren con los valores de $h[n]$ para $n = 0, 1, 2$ de la expresión calculada en la parte (d).

Solución

Problema 1

(a) Ver Figura 2.

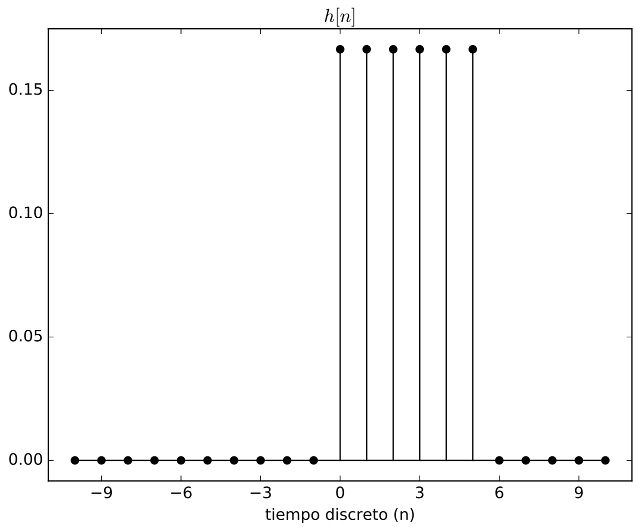


Figura 2: Bosquejo de la respuesta al impulso.

(b) i. $h[n] = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5}\delta(n-k)$
ii. $h[n] = \frac{1}{6}(u[n] - u[n-6])$

(c) Sí, porque $h[n] = 0$ para todo $n < 0$ (ver teórico).

(d) iii. El sistema es estable porque $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1 < \infty$

(e)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{6}\frac{\sin(3\omega)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega 5/2}$$

(f)

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{6}\frac{\sin(3\omega)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

$|H(e^{j\omega})| = 0$ si $3\omega = k\pi$ con k entero. Entonces:

$$\omega = k\pi/3$$

.

(g) Es un filtro pasabajos (ver teórico).

(h) Como $|H(e^{\pm j\pi/3})| = 0$ y la transformada de Fourier de $x_1[n]$ es una suma de dos deltas en $\pm\pi/3$, $y_1[n] = 0$ para todo n.

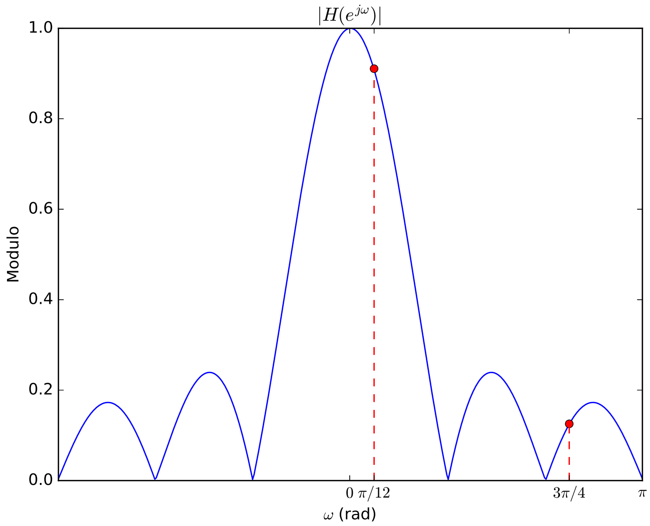


Figura 3: Bosquejo de la respuesta en frecuencia.

(i) Al ser un filtro pasabajos, $y_2[n]$ tiene mayor amplitud que $y_3[n]$. Esto se debe a que la frecuencia de $y_2[n]$ está dentro la banda pasante y la de $y_3[n]$ no. Ver figura 3.

Problema 2

(a) Los polos de $H(z)$ se encuentran en $z = -1/2$ y $z = 2$ y son los que van a determinar las posibles regiones de convergencia:

I) RoC $= \left\{z \in \mathbb{C} \,/\, 0 < |z| < \frac{1}{2}\right\}$

II) RoC $= \left\{z \in \mathbb{C} \,/\, \frac{1}{2} < |z| < 2\right\}$

III) RoC $= \{z \in \mathbb{C} \,/\, 2 < |z|\}$

IV) RoC $= \emptyset$[1]

Para que el sistema sea estable la circunferencia unidad debe estar incluida en la RoC, y para que sea causal la RoC debe contener al infinito, por lo tanto:

I) No estable y no causal.

II) Estable y no causal.

III) No estable y causal.

IV) No estable y no causal.

(b) Dado que el sistema S es lineal e invariante en el tiempo, el mismo se encuentra completamente caracterizado por la respuesta al impulso. La salida $y[n]$ frente a una entrada $x[n]$ se puede obtener convolucionando ésta última con la respuesta al impulso $h[n]$:

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

[1] Conunto vacío: se trataría de una suma de dos secuencias, una hacia adelante y otra haca atrás, cuyas regiones de convergencia no coinciden.

Formalmente, si el sistema S está caracterizado por la transformación $T\{\cdot\}$ y la entrada $x[n]$ se escribe como suma de impulsos unitarios

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

entonces la salida se puede escribir como

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

Para que la respuesta al impulso $h[n]$ caracterize completamente al sistema, necesitamos primero que S sea lineal:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}$$

y luego que sea invariante en el tiempo:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n], \qquad h[n] = T\{\delta[n]\}$$

Se concluye entonces que las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema S quede completamente determinado por su respuesta al impulso ($h[n]$) son que sea **lineal** e **invariante en el tiempo**, es decir, que se trate de un SLIT.

(c) Aplicando la fórmula de la transformada del escalón ($u[n]$) y la propiedad del retardo temporal, se tiene que

$$x[n] = u[n-2] \qquad \Longrightarrow \qquad X(z) = \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

La Transformada Z de la salida queda entonces

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{5z^{-2}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}, \qquad 1 < |z| < 2$$

(d) Realizando fracciones simples,

$$H(z) = \frac{5(z^{-1}-1)}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{-3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-2}{1-2z^{-1}}$$

Luego, antitransformando teniendo en cuenta la región de convergencia,

$$h[n] = -3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^{n+1}u[-n-1]$$

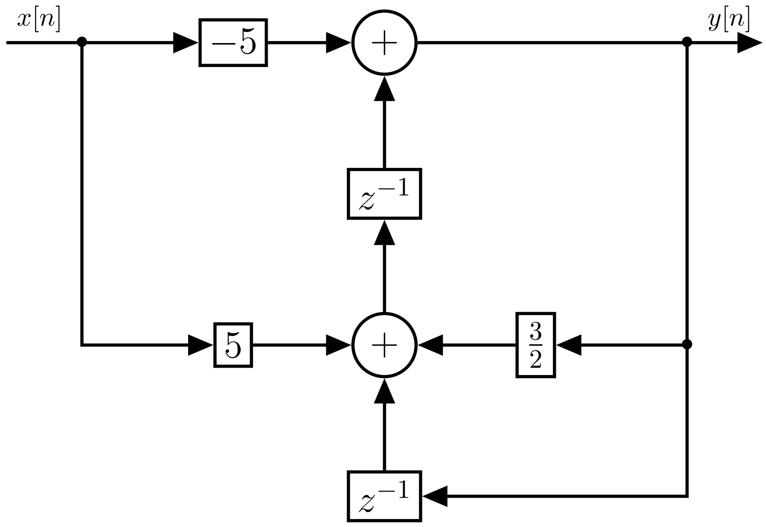
(e)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(x)} = \frac{5(z^{-1}-1)}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

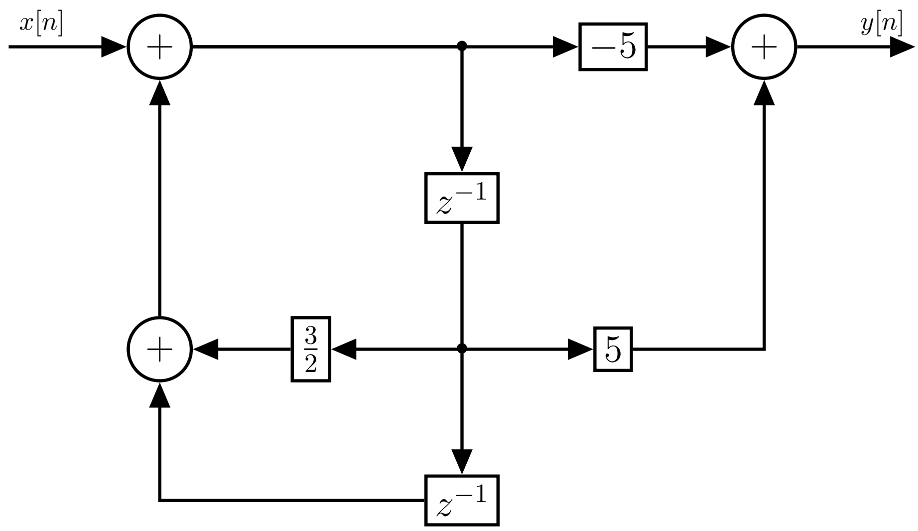
$$Y(z)\left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}\right] = X(z)\left[5z^{-1} - 5\right]$$

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = 5x[n-1] - 5x[n].$$

(f) Utilizando sólo 2 retardos:



Otra forma de hacerlo sería:



(g) Calculamos $h[n]$ para $n = 0, 1, 2$:

Utilizando expresión en recurrencia:

- $h_{causal}[0] = -5$
- $h_{causal}[1] = \frac{-5}{2}$
- $h_{causal}[2] = \frac{-35}{4}$

Utilizando expresión de $h[n]$:

- $h[0] = -3$
- $h[1] = \frac{3}{2}$
- $h[2] = \frac{-3}{4}$

Los resultados difieren debido a que cuando utilizamos la expresión en recurrencia suponemos $y[n] = 0$ para $n < 0$ lo que implica suponer que el sistema es causal cuando en realidad no lo es (por lo visto en la parte a).