Modulación y Procesamiento de Señales
Primer Parcial 2017

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

23 de mayo de 2017

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

(a) Defina las siguientes propiedades de los sistemas discretos: linealidad, invarianza en el tiempo, causalidad y estabilidad.

(b) Sea un sistema definido por la siguiente ecuación

$$y[n] = K + \sum_{k=n-10}^{n} x[n-k], \quad K \in \mathbb{R}.$$

Estudie y justifique si el sistema cumple las propiedades de la parte (a).

(c) ¿Cuáles son las diferencias entre un filtro FIR y un IIR? En particular, discuta qué sucede con la propiedad de estabilidad en ambos casos.

(d) Se muestrea la siguiente señal utilizando una frecuencia de muestreo $f_s = 10kHz$:

$$x_c(t) = \sin\left(2\pi(5kHz)t\right)$$

i. ¿Cómo se relaciona la señal muestreada $x[n]$ con la señal en tiempo continuo $x_c(t)$?

ii. ¿Se cumple el teorema de muestreo? Justifique.

Problema 1 [15 pts.]

Una señal $x_c(t)$ con espectro $X_c(f) = \delta(f + 9kHz) + 2\delta(f) + \delta(f - 9kHz)$ se muestrea con una frecuencia $f_s = 24kHz$, obteniendo la señal en tiempo discreto $x[n] = x_c(nT_s)$.

(a) Encontrar la ecuación que describe a $x_c(t)$

(b) Indicar la mínima frecuencia de muestreo f_s' que permite representar x_c sin pérdida de información.

Se desea modificar la frecuencia de muestreo a la mínima frecuencia que permita reconstruir $x_c(t)$ a partir de $x[n]$.

(c) Diseñar un sistema en tiempo discreto que permita cambiar la frecuencia de muestreo de $x[n]$ a f_s'. Indicar los valores de los parámetros obtenidos en el diseño.

(d) Bosquejar los espectros de las señales en todos los puntos intermedios del sistema.

La secuencia $x'[n]$ obtenida al efectuar el cambio de frecuencia es filtrada con un filtro causal cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 - 0.99e^{-j\omega}}$$

(e) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia y clasificar el filtro.

(f) Hallar la ecuación en diferencias del filtro.

(g) Hallar la respuesta al impulso $h[n]$ correspondiente.

(h) ¿El filtro es estable? Justificar.

(i) Indicar la secuencia de salida $y[n]$ y bosquejar su módulo.

Problema 2 [15 pts.]

Considere un sistema SLIT dado por su ecuación en recurrencia:

$$y[n] = \left(\alpha + \frac{1}{3}\right) y[n-1] - \frac{\alpha}{3} y[n-2] + Gx[n-1]$$

(a) ¿El sistema es causal? Justifique.

(b) Encontrar la transferencia $H(z)$.

(c) Se quiere que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ valga 12 en $\omega = 0$ y -2 en $\omega = \pi$. Calcular α y G para cumplir con las especificaciones. ¿El sistema resulta estable? Justifique.

De ahora en adelante se utilizarán los valores de α y G calculados anteriormente.

(d) Realizar diagrama de ceros y polos junto con la ROC de la transferencia.

(e) Calcular la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(f) Dibujar el diagrama de bloques del sistema utilizando solo dos retardos.

Solución

Pregunta

(a) Ver Teórico.

(b) Lineal No. Invariante en el tiempo Si. Causal Si. Estable Si.

(c) Ver Teórico.

(d)

i. $x[n] = x_c(nT) = x_c(\frac{n}{f_s}) = \sin\left(\frac{2\pi n(5kHz)}{10kHz}\right) = \sin(\pi n) = 0$

ii. No. Como $x[n] = 0$ la señal que se recuperaría es $x_c(t) = 0$. El teorema de muestreo se cumple para f_s estrictamente mayores a $2f_N$. En este caso $f_s = 2f_N$.

Problema 1

(a) $x_c(t) = 2 + 2cos(18\pi t)$

(b) El rango de frecuencias para una correcta reconstrucción según el teorema de muestreo es $f_s \geq 18kHz$.

(c) Cambio de frecuencia con un interpolador con $L = 3$, en serie con un pasabajos de $\omega_c = \frac{\pi}{4}$, Gain $= 3$ y por último un decimador con $M = 4$.

(e)

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|1 - e^{-j\omega}|}{|1 - 0.99e^{-j\omega}|} = \frac{\sqrt{2 - 2cos\omega}}{\sqrt{1.9801 - 1.98cos\omega}}$$

Filtro pasabajos.

(f)

$$H(e^{j\omega_0}) = \lambda = \frac{1 - e^{-j\omega_0}}{1 - 0.99e^{-j\omega_0}}$$

$$\lambda\left(1 - 0.99e^{-j\omega_0}\right) = 1 - e^{-j\omega_0}$$

$$e^{j\omega_0 n}\lambda\left(1 - 0.99e^{-j\omega_0}\right) = e^{j\omega_0 n}\left(1 - e^{-j\omega_0}\right)$$

$$\lambda e^{j\omega_0 n} - 0.99\lambda e^{j(\omega_0 - 1)n} = e^{j\omega_0 n} - e^{-j(\omega_0 - 1)n}$$

Dado que el sistema es SLIT, se tiene que para $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ la salida es $y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$.
Por lo tanto la ecuación en diferencias resulta,

$$y[n] - 0.99y[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + 0.99y[n-1]$$

(g)

$$h[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{H(e^{j\omega})\right\}$$

$$h[n] = u[n]0.99^n - u[n-1]0.99^{n-1}$$

(h) El filtro es absolutamente sumable por lo tanto es estable.

(i) Dada la entrada $x_c(t) = 2 + 2cos(2\pi(9kHz)t)$, se tiene $x'[n] = 2 + 2cos(\pi n)$, por lo tanto la salida es,

$$y[n] = 2|H(e^{j\pi})|cos(\pi n + arg[H(e^{j\pi})]) \simeq 2cos(\pi n)$$

Problema 2

(a) El sistema es causal porque la salida sólo depende de valores actuales o pasados de la entrada y la salida.

(b)

$$Y(z)\left(1 - \left(\frac{1}{3} + \alpha\right)z^{-1} + \frac{\alpha}{3}z^{-2}\right) = Gz^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \alpha\right)z^{-1} + \frac{\alpha}{3}z^{-2} = \frac{Gz^{-1}}{1 - \left(\frac{1}{3} + \alpha\right)z^{-1} + \frac{\alpha}{3}z^{-2}}$$

(c)

$$H(z) = \frac{Gz}{z^2 - \left(\frac{1}{3} + \alpha\right)z + \frac{\alpha}{3}}$$

$$H(e^{j0}) = H(1) = \frac{G}{2/3 - 2\alpha/3} = 12$$

$$G = 8(1 - \alpha) \tag{1}$$

$$H(e^{j\pi}) = H(-1) = \frac{-G}{4/3 + 4\alpha/3} = -2$$

$$G = \frac{8}{3}(1 + \alpha) \tag{2}$$

Entonces, igualando (1) y (2) se obtiene:

$$8(1 - \alpha) = \frac{8}{3}(1 + \alpha)$$

$$\alpha = 1/2$$

$$G = 4$$

Como $|\alpha| = 1/2 < 1$ el sistema resulta estable.

(d) Diagrama

(e) Descomponemos en fracciones simples:

$$H(z) = \frac{4z^{-1}}{(1 - 1/2z^{-1})(1 - 1/3z^{-1})} + \frac{A}{1 - 1/2z^{-1}} + \frac{B}{1 - 1/3z^{-1}}$$

Donde $A = 24$ y $B = -24$. Antitransformando se obtiene:

$$h[n] = 24\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 24\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(f) La ecuación en recurrencia resulta en:

$$y[n] = \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] + 4x[n-1]$$

Entonces el diagrama de bloque es: