Modulación y Procesamiento de Señales

Práctico 6

Variables aleatorias y procesos estocásticos (versión 2020)

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✸ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd.edition. O también de la forma (H3.14) para el libro *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Monson H. Hayes.

✦ Ejercicio 1 (8.1-6)

Se considera el experimento de tirar una moneda cargada, donde la probabilidad de obtener cara es $\Pr\{C\} = (1+\epsilon)/2$ con $0 < |\epsilon| < 1$.
Demostrar que la probabilidad de que haya dos resultados iguales con dos lanzamientos independientes será mayor que 1/2.

✦ Ejercicio 2 (8.2-1)

Considere el experimento de transmitir un mensaje de tres dígitos sobre un canal ruidoso. El canal tiene una probabilidad de error por dígito de $P(E) = 2/5 = 0.4$, y se puede asumir independencia entre errores de dígitos diferentes. Tomemos X VA que indica el número de errores con el que se recibe el mensaje.

(a) Encontrar y graficar la función de probabilidad $p_X(x)$

(b) Encontrar y graficar la función de distribución asociada $F_X(x)$.

(c) La probabilidad de recibir al menos dos errores en el mensaje

(d) La probabilidad de recibir más de un error en el mensaje

(e) Encontrar la esperanza $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ y la varianza σ_X^2.

★ Ejercicio 3 (8.3-5)

Sea X VA discreta cuyos posibles valores son los K valores equiprobables,

$$0,\ a,\ 2a,\ 3a...(K-1)a.$$

Encontrar la esperanza $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ y la varianza σ_X^2.

✦ Ejercicio 4 (8.2-2)

Sea $X = \phi$ VA con distribución uniforme ($\phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$), que indica el ángulo de una aguja giratoria.

(a) Graficar la densidad de probabilidad $f_X(x)$

(b) Encontrar y graficar la función de distribución asociada $F_X(x)$

(c) Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:

$$\text{(i) } \pi < X \leq 3\pi/2, \quad \text{(ii) } X \geq 3\pi/2 \quad \text{(iii) } X \leq \pi \quad \text{(iv) } |X - m_X| < 2\sigma_X$$

(d) Encontrar la esperanza $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ y la varianza σ_X^2.

⋆Ejercicio 5 (8.4-11)

Sea X VA gaussiana con media $\mu = 10$ y varianza $\sigma^2 = 400$, $Q(k)$ la cola gaussiana,

$$Q(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

Encontrar las siguientes probabilidades en función de $Q(k)$

$$\text{(a)}\Pr\{X < 2\mu\} \quad \text{(b)}\Pr\{\mu < X \leq 2\mu\} \quad \text{(c)}\Pr\{0 < X \leq 2\mu\} \quad \text{(d)}\Pr\{X > 0\}$$

✦Ejercicio 6 (H3.14)

Para cada uno de los siguientes procesos encontrar si son estacionarios en sentido amplio.

(a) $x(t) = A\,cos(\omega_0 t)$, donde $A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A)$

(b) $x(t) = A\,cos(\omega_0 t + \phi)$, donde $\phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$

⋆Ejercicio 7

Para cada uno de los siguientes proceso calcular su media, potencia, varianza y autocorrelación. En el caso que corresponda encontrar su densidad espectral de potencia.

(a) $x_1[n]$ secuencia IID que toma los valores 1 y -1 con probabilidad 1/2.

(b) $x_2[n]$ secuencia IID que toma el valor 1 con probabilidad p y -1 con probabilidad $1 - p$.

(c) $x_3[n]$ secuencia IID con distribución uniforme $x_3[n] \sim U\left[\frac{-\triangle}{2}, \frac{\triangle}{2}\right]$.

(d) $x_4[n]$ secuencia IID con distribución normal $x_4[n] \sim N(0, \sigma)$

(e) $x_5[n] = x_1[n]u[n]$

(f) $x_6(t)_\omega = \alpha(\omega)$, es decir, una constante que depende del esperimento. $\alpha \sim N(0, 1)$

✦Ejercicio 8 (2.84)

Sea $e[n]$ señal característica de ruido blanco y $s[n]$ otra señal estacionaria independiente de $e[n]$. Mostrar que la señal $y[n] = s[n]e[n]$ también es ruido blanco, o sea que $E\{y[n]y[n+m]\} = A\delta[m]$ donde A es una constante.

⋆Ejercicio 9 (4.48)

Considerar un proceso aleatorio en tiempo continuo $x_c(t)$, con densidad espectral de potencia $G_{x_c}(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_0}\right)$. Suponga que se muestrea $x_c(t)$, resulta la secuencia de variables aleatorias $x[n] = x_c(nT)$.

(a) ¿Cuál es la autocorrelación del proceso en tiempo discreto?

(b) ¿Como debería elegirse T para que el proceso en tiempo discreto sea blanco, es decir para que la densidad espectral de potencia sea constante para todo θ?

(c) Si la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo es ahora $G_{x_c}(f) = \triangle\left(\frac{f}{f_0}\right)$, ¿cómo debería elegirse T para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

(d) ¿Qué requerimiento general deben cumplir el proceso continuo y el periodo de muestreo para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

⋆Ejercicio 10 (2.85)

Sea $x[n]$ un proceso real estacionario con características de ruido blanco, de media nula y varianza σ_x^2. Sea $y[n]$ la salida cuando $x[n]$ es la entrada a un sistema lineal e invariante en el tiempo, de respuesta al impulso $h[n]$. Mostrar que:

(a) $\mathbb{E}\{x[n]y[n]\} = h[0]\sigma_x^2$.

(b) $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} h^2[n]$.

⋆ Ejercicio 11

Sea $v(t)$ un proceso estacionario y $z(t) = v(t) + v(t + T_d)$, con T_d constante. Hallar $R_z(\tau)$ y $G_z(f)$, conocidos $R_v(\tau)$ y $G_v(f)$.

⋆ Ejercicio 12

Considerar un proceso estocástico $y[n]$, que es la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo, de transferencia

$$H(e^{j\omega}) = \left[1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right]^{-1}$$

La entrada $x[n]$ es un proceso estacionario con características de ruido blanco, de media nula y $\mathbb{E}\left\{x^2[n]\right\} = \sigma_x^2$.

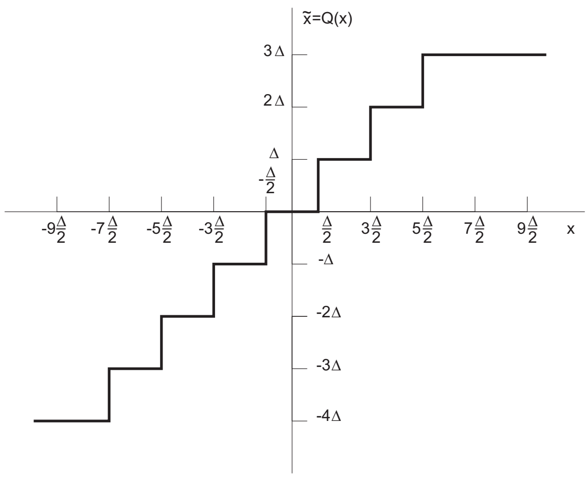
(a) Expresar $E[y^2[n]]$ en función de $R_y[n]$ o $G_y(e^{j\omega})$.

(b) Determinar $G_y(e^{j\omega})$, la densidad espectral de potencia de $y[n]$.

(c) Determinar $R_y[n]$, la función de autocorrelación de $y[n]$.

⋆ Ejercicio 13 (4.57)

Para poder procesar secuencias en computadora o DSP's, debemos cuantificar la secuencia en un conjunto de valores discretos. Este proceso puede expresarse en términos del pasaje de la secuencia de entrada $x[n]$ por un cuantificador $Q(x)$ (por redondeo en este caso) cuya relación entrada-salida se ve en la figura.



Si el intervalo de cuantización Δ es pequeño comparado con los cambios en el nivel de la señal de entrada, podemos asumir que la salida del cuantificador es de la forma

$$y[n] = x[n] + e[n]$$

Donde $e[n] = Q(x[n]) - x[n]$ puede considerarse como un proceso estocástico, de muestras independientes, independiente de la señal y con distribución de probabilidad uniforme en $(-\Delta/2, \Delta/2)$.

Aceptemos que la señal x tiene una autocorrelación de la forma:

$$R_x[n] = \delta[n] + 1/2(\delta[n-1] + \delta[n+1]).$$

Esto puede corresponder (por ejemplo) al muestreo de una señal binaria.

(a) Hallar la media, la varianza, y la autocorrelación de la secuencia $e[n]$.

(b) Hallar la relación señal/ruido de cuantificación.

(c) La señal se pasa ahora por un *derivador* discreto cuya ecuación de recurrencia es

$$y[n] = \frac{1}{T}(x[n] - x[n-1])$$

Hallar la relación señal ruido a la salida.

(d) Repetir la parte (c) con el *derivador*:

$$y[n] + y[n-1] = \frac{2}{T}(x[n] - x[n-1])$$