Modulación y Procesamiento de Señales

Práctico 5
Muestreo de Señales de Tiempo Continuo

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd.edition.

✦ Ejercicio 1

Sea $x_c(t) = \cos(17000 \cdot 2\pi t)$ una sinusoidal en tiempo continuo. $x[n]$ son muestras de $x_c(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 12500\,\text{Hz}$. $y_c(t)$ es la reconstrucción ideal de $x[n]$. Hallar $y_c(t)$.

✦ Ejercicio 2 **(4.2)**

La secuencia $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{4})$, con $-\infty < n < +\infty$, fue obtenida mediante el muestreo de una señal analógica $x(t) = \cos(2\pi f t)$, con $-\infty < t < +\infty$, a una tasa de 1000 muestras por segundo. ¿Cuáles son dos posibles valores de f que podrían resultar en la secuencia $x[n]$?

✷ Ejercicio 3

(a) Explicar por qué en las películas a veces se ven las ruedas de los autos girar hacia atrás.

(b) En una película se ven las ruedas de un auto girar hacia atrás, completando una vuelta en aproximadamente 2.5 segundos. ¿A qué velocidad, aproximadamente, se mueve el auto?

✦ Ejercicio 4 **(4.6)**

Sea $h_c(t)$ la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo, de tiempo continuo, y $h_d[n]$ la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo, de tiempo discreto.

(a) Determinar la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo continuo y bosquejar su módulo si

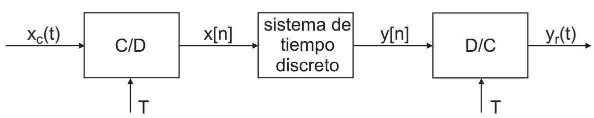
$$h_c(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(b) Si $h_d[n] = T\,h_c(nT)$, con $h_c(t)$ definida en (a), determinar la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto y bosquejar su módulo.

(c) Para un valor dado de a, determinar, en función de T, el mínimo del módulo de la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto.

✦ Ejercicio 5

Sabemos que una señal de tiempo continuo, limitada en banda, contiene una componente a 50 Hz debida a interferencia de la red. Queremos eliminar esa componente no deseada con el sistema de la figura, donde $T = 10^{-4}$ s.



(a) ¿Cuál es la mayor frecuencia que puede contener la señal analógica si se quiere evitar el solapamiento de espectro?

(b) El sistema en tiempo discreto a utilizar tiene la siguiente respuesta en frecuencia

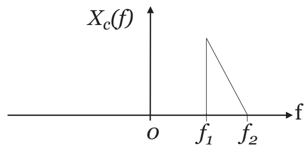
$$H(e^{j\theta}) = \frac{(1 - e^{-j(\theta-\theta_0)})(1 - e^{-j(\theta+\theta_0)})}{(1 - 0.9e^{-j(\theta-\theta_0)})(1 - 0.9e^{-j(\theta+\theta_0)})}$$

Graficar, utilizando *Octave* o *MatLab*, módulo y fase de $H(e^{j\theta})$.

(c) ¿Qué valor de θ_0 debe elegirse para eliminar la componente de 50Hz?

⋆ Ejercicio 6 (4.21)

Una señal analógica compleja, pasabanda, $x_c(t)$, tiene la transformada de Fourier que se muestra en la figura,



donde $\Delta f = f_2 - f_1$. La señal se muestrea, resultando la secuencia $x[n] = x_c(nT)$.

(a) Graficar la transformada de Fourier $X(e^{j\theta})$ de $x[n]$ para $T = \frac{1}{2f_2}$.

(b) ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo que puede utilizarse sin que se produzca solapamiento, de manera que $x_c(t)$ pueda recuperarse a partir de $x[n]$?

(c) Dibujar el diagrama de bloques de un sistema que pueda usarse para recuperar $x_c(t)$ a partir de $x[n]$, si la frecuencia de muestreo es mayor o igual a la hallada en (b). Asumir que se dispone de filtros complejos ideales.

⋆ Ejercicio 7

Suponga que se obtuvo la secuencia discreta $s[n]$ mediante el filtrado de una señal de voz $s_c(t)$ con un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte de 5 kHz. y luego muestreando la salida a una tasa de 10 kHz.

Desgraciadamente, la señal de voz continua estaba en una cinta magnética que fue destruida accidentalmente luego de obtener y almacenar la secuencia $s[n]$.

Luego se descubre que lo que en realidad se debía haber hecho con la señal continua es filtrarla con un pasabajos ideal de frecuencia de corte de 3 kHz y posteriormente muestrearla a 6 kHz para obtener $s_1[n]$.

(a) Encontrar un método para obtener $s_1[n]$ a partir de $s[n]$.

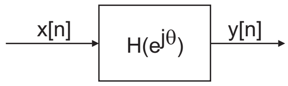
Ese método podría requerir mucho cálculo pero no el uso de conversores C/D o D/C. Si su método hace uso de un filtro digital especificar la respuesta frecuencial del mismo.

⋆ Ejercicio 8 (4.34)

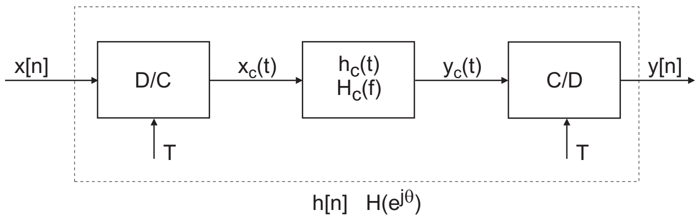
Considerar el sistema lineal e invariante en el tiempo de la figura, con

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\frac{\theta}{2}}, |\theta| \leq \pi$$

(retardo de media muestra):



(a) Determinar $h_c(t)$ para que el sistema de la siguiente figura sea equivalente al $H(e^{j\theta})$ especificado antes. El tiempo entre muestras es T.



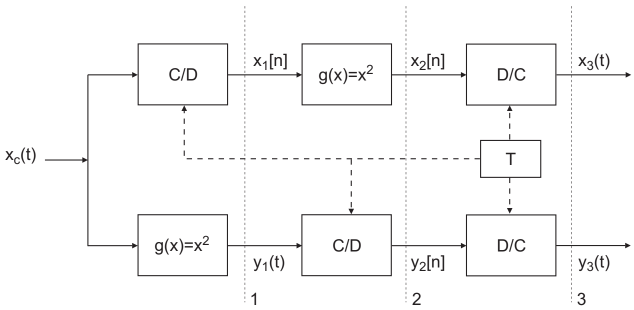
(b) Determinar y graficar $y[n]$ cuando la entrada al sistema es

$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

✶Ejercicio 9 (4.49)

Este problema estudia el efecto de intercambiar el orden de dos operaciones sobre una señal, más precisamente el muestreo y una operación no lineal sin memoria.

Considerar los dos sistemas de procesamiento de la figura, donde los conversores C/D y D/C son ideales. El mapeo $g(x) = x^2$ representa un elemento no lineal sin memoria.



(a) Para ambos sistemas graficar el espectro de las señales en los puntos 1, 2 y 3 cuando la tasa de muestreo es $\frac{1}{T} = 2f_m$ muestras/segundo, donde $x_c(t)$ tiene transformada $\Lambda(\frac{f}{f_m})$.

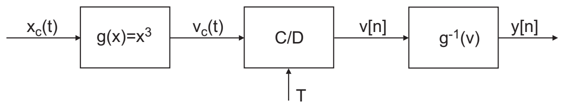
(b) ¿Es $x_3(t) = y_3(t)$?

(c) ¿Es $x_3(t) = x_c^2(t)$? En cada caso justifique su respuesta.

Considerar el primer sistema y sea $x_c(t) = A\cos(30\pi t)$. Sea $\frac{1}{T} = 40$ muestras/segundos la tasa de muestreo.

(d) ¿Es $x_3(t) = x_c^2(t)$? Explicar por qué si o por qué no.

Considerar el sistema de la figura. Sea $x_c(t) = A\cos(30\pi t)$ y $\frac{1}{T} = 40$ muestras/segundo.



(e) Expresar $v[n]$ en función de $x_c(t)$. ¿Hay solapamiento de espectros?

(f) Expresar $y[n]$ en función de $x_c(t)$. ¿Qué conclusión se puede sacar de este ejemplo?

(g) Un problema práctico que se tiene frecuentemente es el de digitalizar una señal que tiene un gran rango dinámico. Supóngase que se quiere comprimir el rango dinámico. Para ello se hace pasar la señal a través de un elemento no lineal sin memoria antes del conversor C/D, y luego se la expande después de la conversión C/D. ¿Cuál es el impacto de haber colocado el elemento no lineal sin memoria antes del conversor C/D en nuestra elección de la frecuencia de muestreo?

Solución

Ejercicio 1

A partir de los resultados intermedios del teorema del muestreo, se ve claramente que entre $\pm f_s/2$ sólo quedarán componentes en $\pm(17000 - 12500) = \pm 4500\,\text{Hz}$. Por lo tanto la salida será $y_c(t) = \cos(4500 \cdot 2\pi t)$.

Ejercicio 2

Con el mismo fundamento que en el ejercicio anterior se deduce que las frecuencias deben ser de la forma: $f = \pm\frac{f_s}{8} + kf_s$ con k entero.

Ejercicio 3

(b) Definamos una función $a(t)$, cuyo valor es el ángulo de la rueda en el instante t. El cine toma 24 cuadros por segundo, y las medidas del ángulo de la rueda que podamos obtener de la película serán muestras de $a(t)$ con frecuencia 24 Hz.

Una delta en el espectro de $a[n]$ en la frecuencia $\theta = 2\pi$ correspondería a una rueda que da una vuelta completa en el período de muestreo, es decir 24 vueltas por segundo. Como las ruedas de los autos tienen un diámetro cercano a 1/2 metro, esto corresponde a una velocidad del auto de $\pi \times 1/2\ m \times 24\ rps = 37.7\ m/s$. Multiplicando por 3.6 obtenemos el valor en km/h, 135.7 km/h.

Esto nos permite determinar la velocidad en función de θ

$$v(\theta) = 3.6 \cdot \pi \cdot \text{DIA} \cdot \frac{24}{2\pi} \cdot \theta$$

donde DIA es el diámetro de la rueda y el resultado queda expresado en km/h.

Girar hacia atrás con período de 2.5 segundos implica

$$\theta_o = \frac{2\pi f_o}{f_s} = \frac{2\pi\frac{-1}{2.5}}{24} = -\frac{2\pi}{24 \cdot 2.5}.$$

Pero como puede haber solapamiento, la velocidad real corresponde a

$$\theta = \theta_o + k \cdot 2\pi \qquad \text{para algún } k \text{ entero.}$$

Como sabemos que el auto avanza, k debe ser mayor o igual a 1 y la velocidad es

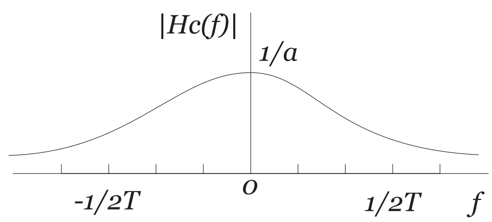
$$v(k) = 3.6 \cdot \pi \cdot \text{DIA} \cdot \frac{24}{2\pi} \cdot \left(-\frac{2\pi}{24 \cdot 2.5} + k \cdot 2\pi\right) \approx 133.5 + 135.7(k-1).$$

404.8 km/h no es una velocidad razonable para un auto, 269.1 km/h es bastante elevada, y seguramente el valor más razonable es 133.5 km/h. Si bien el valor real no lo sabemos pues desconocemos el radio de la rueda, su valor debe ser cercano a 130 km/h.

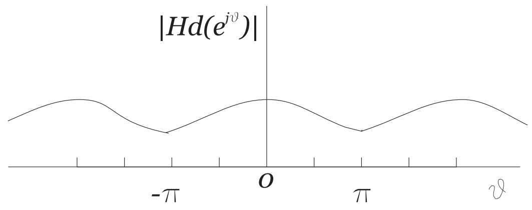
Ejercicio 4

(a) Considerando que a es mayor que 0 la transformada de Fourier queda:

$$H_c(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow |H_c(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + (j2\pi f)^2}$$



(b) $h_d[n] = T\,h_c(nT) \Rightarrow H_d(e^{j\theta}) = \frac{T}{1-e^{-aT}e^{-j\theta}} \Rightarrow |H_d(e^{j\theta})|^2 = \frac{T^2}{1+(e^{-aT}e^{-j\theta})^2}$



(c) Observando la gráfica del módulo para la respuesta en tiempo continuo, podemos ver que es una función monótona decreciente y simétrica respecto a 0, por lo que el mínimo módulo de la respuesta en tiempo discreto debe darse en el punto donde se solapan las respuestas que se repiten, siendo este el que corresponde a $\theta = \pi \Rightarrow min\,|H_d(e^{j\theta})|^2 = |H_d(e^{j\pi})|^2 = \frac{T^2}{1+(e^{-aT}e^{-j\pi})^2} = \frac{T^2}{1+e^{-2aT}}$

Se puede verificar que este valor es mayor al que tiene la respuesta en tiempo continuo a esta frecuencia debido al efecto del solapamiento.

$$|H_d(e^{j\pi})|^2 = \frac{T^2}{1+e^{-2aT}} > |H_c(\frac{1}{2T})|^2 = \frac{1}{a^2+(j\frac{\pi}{T})^2}$$

Ejercicio 5

(a) La frecuencia de muestreo es:

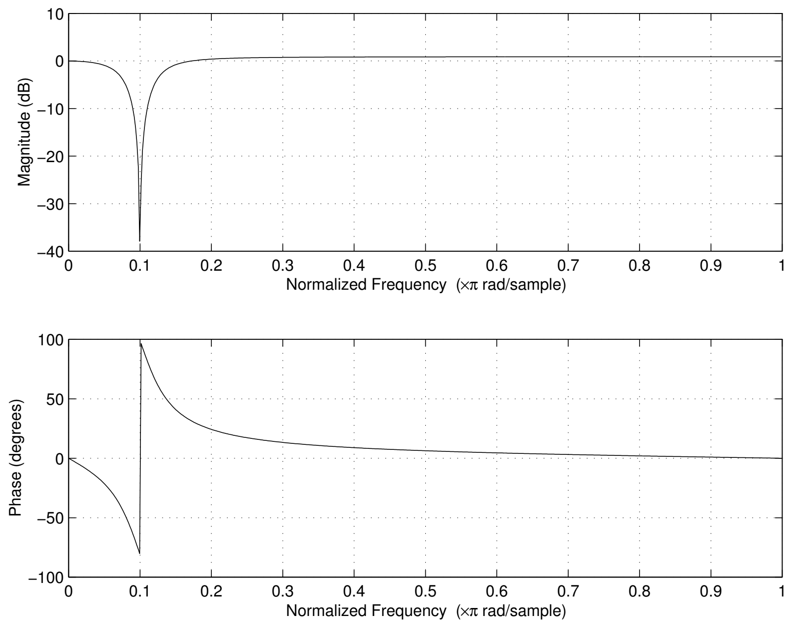
$$f_s = \frac{1}{T} = 10^4\ Hz$$

Para que no haya solapamiento, la frecuencia máxima en que puede haber señal es $f_s/2 = 5\ kHz$

(b) Grafiquemos la respuesta del filtro para un valor de $\theta_0 = \frac{\pi}{10}$: Graficando en MatLab con:

```
theta0 = pi/10;
freqz([1 - 2*cos(theta0) 1],[1 -0.9*2*cos(theta0) 0.81])
```

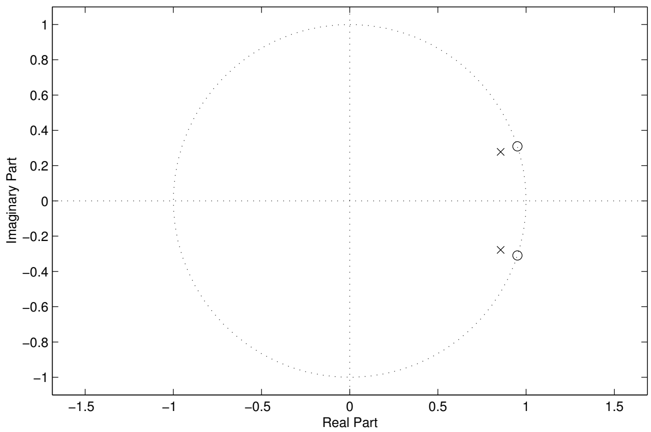
obtenemos:



(c) Como vimos en las gráficas de la respuesta en frecuencia, el filtro funciona como un suprime banda en una frecuencia que es parametrizable según θ_0. Podemos analizar cómo funciona el filtro observando los polos y ceros del filtro en el plano complejo. El filtro funciona introduciendo dos ceros en la circunferencia unidad, de manera de eliminar las componenetes de frecuencia correspondientes a los argumentos de estos ceros. Para compensar el efecto para el resto de las frecuencias, se agrega un par de polos muy cercanos a los ceros, es decir con el mismo argumento pero en la circunferencia de radio 0,9.

Para $\theta_0 = \pi/10$ podemos graficarlo en MatLab con:

```
theta0 = pi/10;
zplane([1 - 2*cos(theta0) 1],[1 -0.9*2*cos(theta0) 0.81])
```

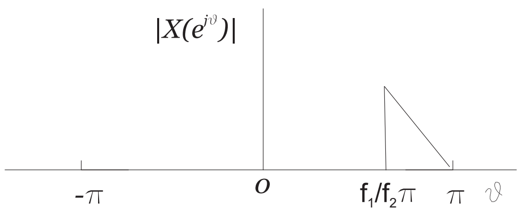


En nuestro caso, la frecuencia que deseamos filtrar es 50 Hz, entonces:

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{f_s} 50\ Hz = \frac{\pi}{100}$$

Ejercicio 6

(a)



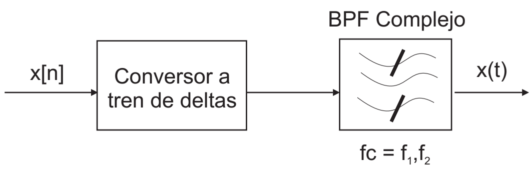
(b) La zona de frecuencias en que la señal contiene energía es sólo entre f_1 y f_2. Por esto nos va a interesar sólo que no haya solapamiento en dicha zona. Para que esto ocurra, la condición que se debe cumplir es:

$$f_s + f_1 \geq f_2$$
$$f_s \geq f_2 - f_1$$

Entonces:

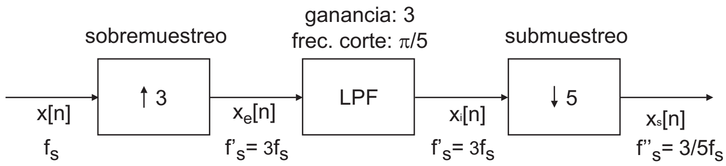
$$f_s = f_2 - f_1$$

(c)



Ejercicio 7

(a)



Ejercicio 8

(a)

$$h_c(t) = \delta(t - \frac{T_s}{2})$$

(b)

$$y[n] = cos(\frac{\pi}{2}\,(n - \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{2}\,n - \frac{\pi}{2})$$

$$cos(\frac{\pi}{2}\,(n - \frac{1}{2})$$