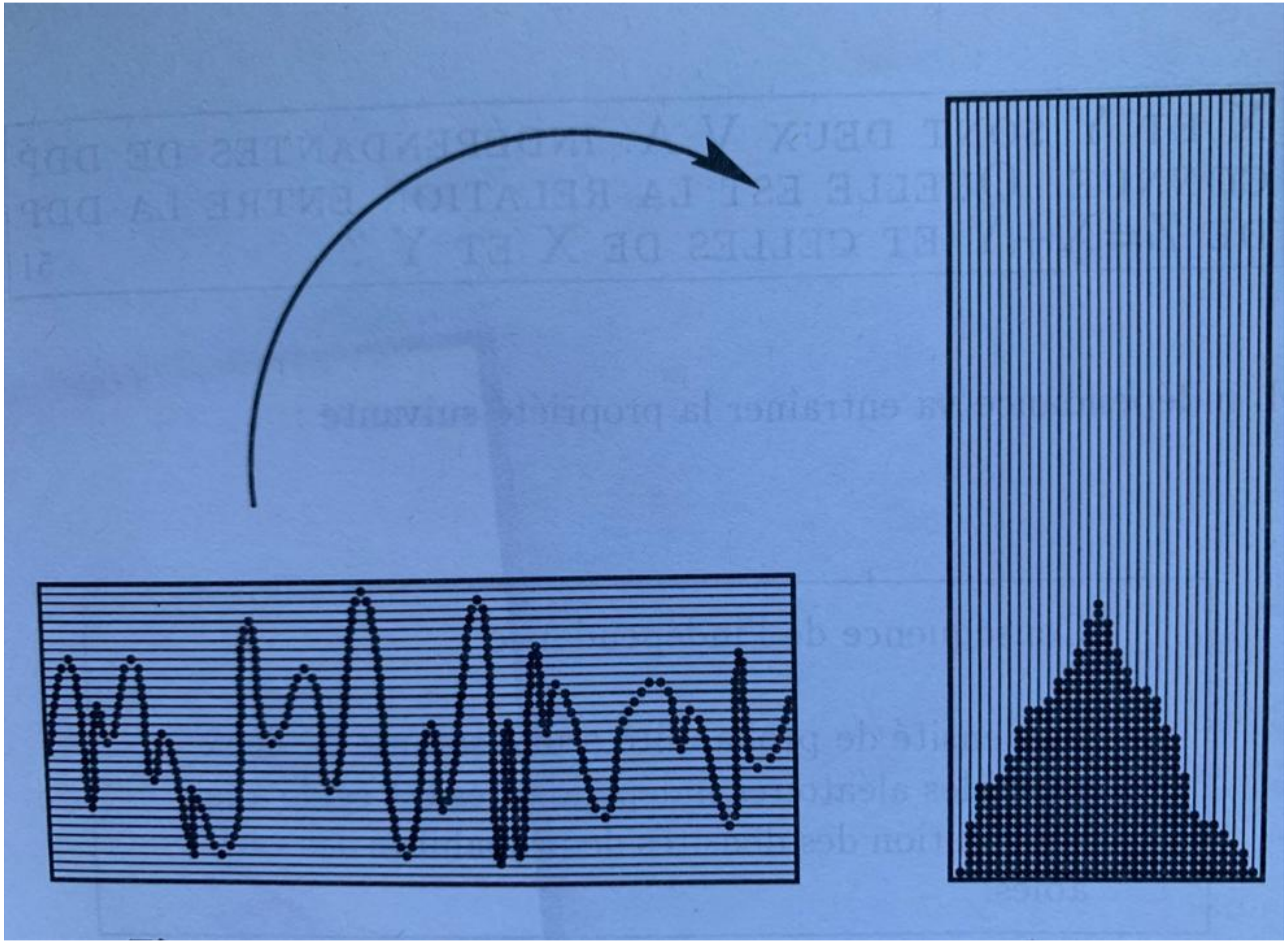
MODELOS Y SIMULACIÓN

CURSO 2024

Procesos Estocásticos

Dr. Ricardo L. Armentano
Lic en Ing. Biol Lucia Lemes

Porque estocasticos?



Definiciones

La **estadística** se fundamenta en **métodos científicos** para la **recolección**, **organización**, **resumen**, **presentación** y **análisis de datos**. Dicho análisis permitirá obtener **conclusiones** y efectuar **decisiones** al respecto.

- El grupo a ser analizado se denomina **población**, que puede ser finito o infinito. Debido a que generalmente resulta impráctico examinarlo completamente, se toma una **muestra** **representativa**
- Las muestras representativas permiten **inferir conclusiones** acerca de la población (inferencia estadística). Si se puede trabajar con la población en su conjunto, la estadística resulta descriptiva
- Una variable es un **símbolo** que puede asumir un conjunto de valores preestablecidos (dominio). Puede ser **continua** (ej. Altura) o **discreta** (ej. Número de elementos)

Definiciones

Distribuciones de Frecuencia

La ***primera evaluación*** que puede llevarse a cabo sobre un conjunto de datos "crudo" es ***agruparlos en clases o categorías***, cuantificando la ***cantidad*** de elementos que ***pertenecen*** a cada una de ellas. Dicha cantidad se denomina ***"frecuencia".*** Por ejemplo, sea la ***altura*** de los estudiantes del curso:

Rango de Clase

Intevalo=10
Punto medio=5

ALTURA [cm]	NÚMERO DE ESTUDIANTES
145 - 155	2
155 - 165	5
165 - 175	13
175 - 185	34
185 - 195	14
196 - 205	1
TOTAL	69

Tabla de Distribución de frecuencias
Proporciona una vision ***GLOBAL*** de los datos

Definiciones

Distribuciones de Frecuencia: Reglas de Conformación

1. Determinar el ***mayor*** y el ***menor*** valor del conjunto de datos
2. Dividir el ***rango resultante*** en intervalos de clase del mismo tamaño (de ser posible). Por lo general se utilizan de 5 a 20 intervalos
3. Determinar el numero de observaciones que caen en cada clase

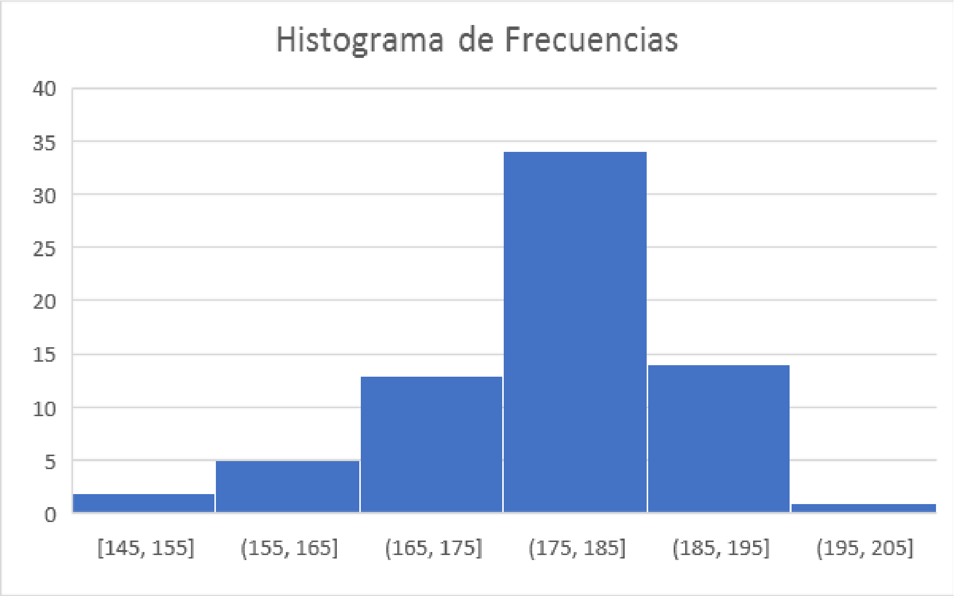
*La distribución de frecuencias se puede representar **gráficamente** a través de **Histogramas**. Un histograma es un gráfico de barras rectangulares, donde **cada barra representa una clase**.*

- La base de cada barra está centrada en el punto medio de la clase y su ancho es el del intervalo correspondiente
- La altura de cada barra corresponde a la cantidad de elementos (frecuencia) de dicha clase

Histograma

Distribuciones de Frecuencia: Histograma

ALTURA [cm]	NÚMERO DE ESTUDIANTES
145 - 155	2
155 - 165	5
165 - 175	13
175 - 185	34
185 - 195	14
196 - 205	1
TOTAL	69

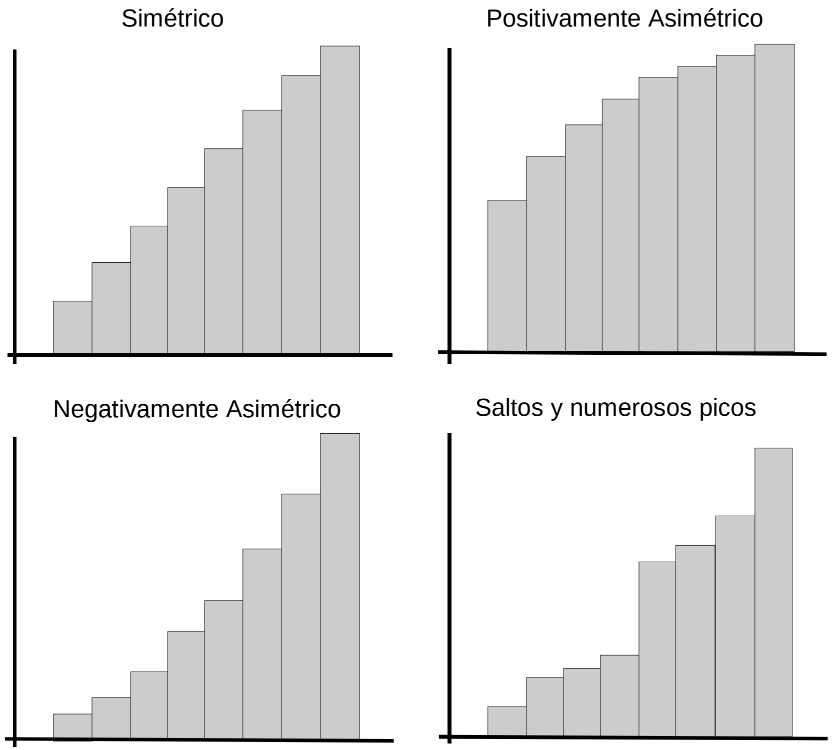


Si ***se divide cada frecuencia por el número total de elementos*** se obtiene un ***Histograma de frecuencias relativas***. En dicho caso la suma de todas las frecuencias equivale a 1

Distrucion en frecuencia

Distribuciones de Frecuencia: Frecuencia Acumulada

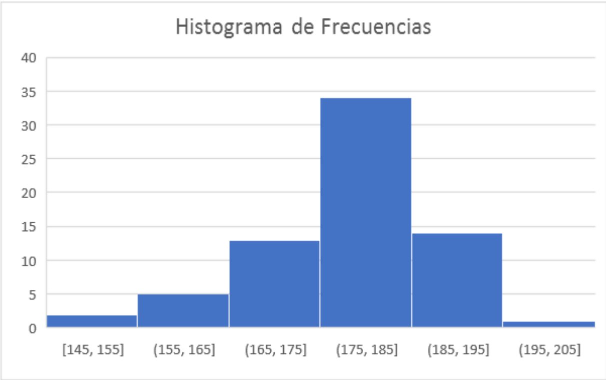
La distribución de frecuencia acumulada indica el ***número de elementos*** cuyos valores son **iguales** o **menores** a un determinado valor.



Distrucion en frecuencia

Distribuciones de Frecuencia: **Curvas Continuas**

Si existe la posibilidad de considerar ***pequeños intervalos de clase*** (en muestras o poblaciones de grandes cantidades de datos), las ***distribuciones de frecuencia*** pueden aproximarse a ***"curvas de frecuencia"***



Tendencia Central

Las ***medidas de TENDENCIA CENTRAL*** posibilitan resumir en un solo valor el comportamiento de los valores de la muestra a analizar. Representan ***el centro*** en torno al cual ***se ubica*** el conjunto de datos:

- **MEDIA ARITMÉTICA:** Constituye el ***promedio*** de todos los datos evaluados ($X_1, X_2, \ldots X_N$).

  Asimismo se la puede calcular a partir de las ***frecuencias de ocurrencia*** de dichos datos ($f_1, f_2, \ldots f_K$), considerando X_i como ***los valores a los que ocurren*** dichas frecuencias

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \\ \overline{X} &= \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \ldots + f_K X_K}{f_1 + f_1 + \ldots + f_K} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{K} f_K}\end{aligned}}$$

Tendencia Central

- **MEDIANA:** Constituye el valor que ***separa*** un conjunto de datos ***ordenados*** por magnitud ***en dos conjuntos de igual cantidad de elementos***. Si el total de datos es ***par*** se considerará el ***promedio*** de los dos centrales

$$3,4,4,5,6,8,8,8,10 \rightarrow Me = 6$$

$$5,5,7,9,11,12,15,18 \rightarrow Me = \frac{(9+11)}{2} = 10$$

- **MODA:** Representa ***el valor mayor ocurrencia (la frecuencia más alta)*** de un conjunto de datos. Puede no existir o existir y no ser única.

$$2,2,5,7,9,9,9,10,10,11 \rightarrow Mo = 9$$

$$5,5,7,9,11,11,15,18 \rightarrow \begin{cases} Mo = 5 \\ Mo = 11 \end{cases} (bi\,\mathrm{mod}\,al)$$

$$5,6,7,9,11,13,15,18 \rightarrow No\ existe$$

Dispersión

Por otra parte, ***medidas de DISPERSIÓN*** posibilitan determinar cómo estan ***distribuidos*** los valores ***en torno a la media***:

- **DESVÍO ESTÁNDAR:** Representa las desviaciones de los valores respecto de la media. Puede calcularse a partir de un conjunto de ***N*** datos o ***K*** frecuencias de ocurrencia (recordar que en este ultimo caso los $\boldsymbol{X_i}$ son los valores a los que ocurren dichas frecuencias)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{K} f_K\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N}}$$

Dispersión

- **VARIANZA:** Cuadrado de la desviación estándar

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_K \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{N}$$

- **COEFICIENTE DE VARIACIÓN:** Es indicativo de la ***dispersion relativa de los datos*** ya que relaciona el desvío estándar respecto del valor de la media

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

Calculos descriptivos

Ejemplo: Caracterizar estadísticamente el peso de la siguiente población:

INDIVIDUO	PESO [kg]
1	56
2	57
3	63
4	68
5	71
6	77
7	80
8	87

$$Media: \bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = 69{,}875$$

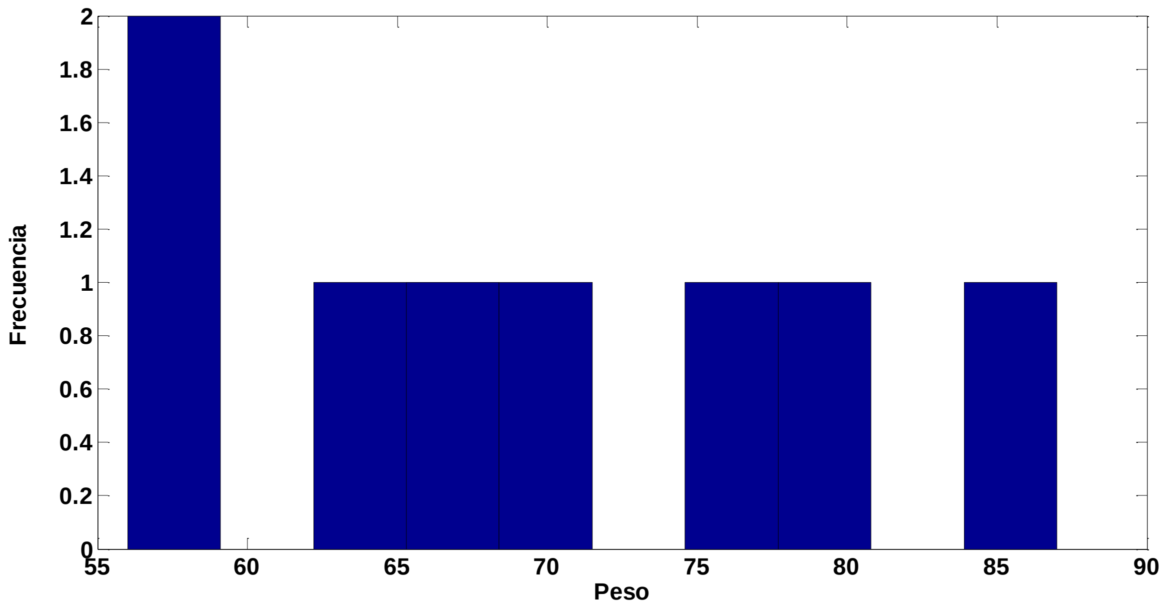
$$Mediana: Me = (68+71)/2 = 69{,}5$$

$$Moda: Mo = NE$$

$$Desvío\ Estándar: SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{N}} = 11{,}0639$$

Calculo histograma

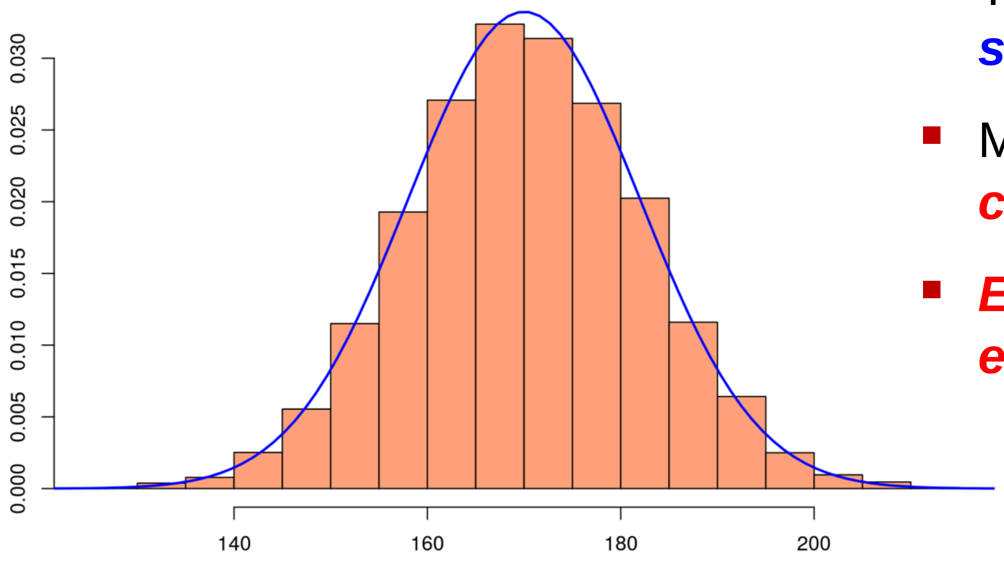
```
%Ejercicio Estadística Básica
Peso=[56,57,63,68,71,77,80,87]
%Histograma
hist(Peso)
xlabel('Peso'),ylabel('Frecuencia');
%Valor medio
mean(Peso)
%Mediana
median(Peso)
%Moda
mode(Peso)
%Desviación estándar
std(Peso)
```



Distribucion normal

La Distribución Normal

Existen ***numerosas variables de la vida diaria*** (la Altura, el peso, las notas de los exámenes) que tienden a comportarse como una ***distribución NORMAL***:

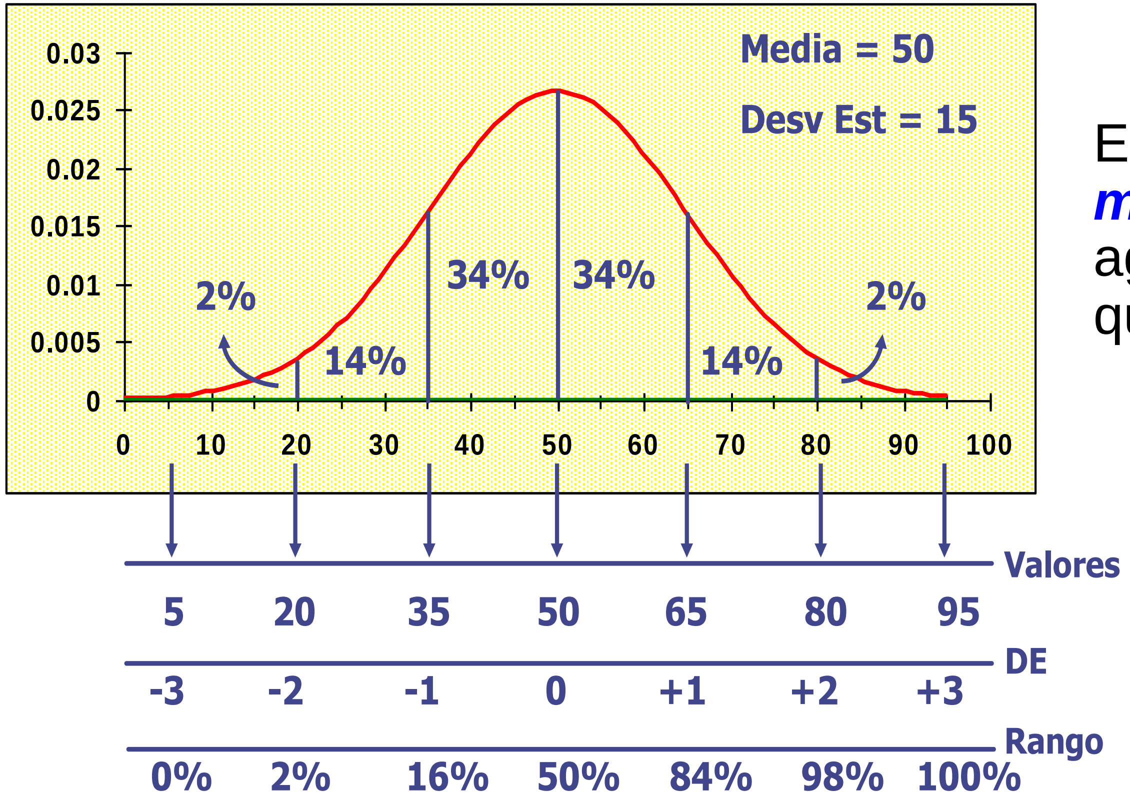


- Tiene forma ***acampanada*** y es ***simétrica*** respecto a la media
- Media, moda y mediana ***coinciden***
- ***Es una función de la media y el desvío estándar***

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\left(x-\overline{X}\right)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribucion normal

La Distribución Normal



En la ***Distribución Normal***, el ***68%*** de los datos se agrupa en ***±1DE***, mientras que el ***96%*** en ***±2DE***

Probabilidad de ocurrencia

La probabilidad puede concebirse como algo similar a una ***"proporción"*** de ocurrencia de un evento. Se define como el ***cociente*** entre los casos favorables ***(h)*** y los casos posibles ***(n)*** en relación a un evento específico (**Ley de Laplace**):

$$\boxed{p = \frac{h}{n}}$$ es la ***"probabilidad de ocurrencia"*** (*éxito*)

$$\boxed{q = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p}$$ es la ***"probabilidad de no ocurrencia"*** (*falla*)

La probabilidad de ocurrencia de un evento ***es un número entre 0 y 1***, donde si el evento no puede ocurrir ***p=0*** y si debe ocurrir (suceso seguro) ***p=1***.

Estadísticamente se define a la probabilidad como la frecuencia relativa de ocurrencia del evento cuando el número de observaciones es elevado. Ej: de una tirada de n=1000 veces una moneda y 529 caras, p=529/100=0,529 (p → 0,5 si n →∞)

Ejemplo numerico Probabilidad

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número ***par*** al arrojar un dado? ***(Suceso A=Obtención Nro par)***

Casos favorables ***(A)***: ***2,4 y 6 (3)***
Casos Desfavorables ***(No A)***: ***1,3,5 (3)***
Casos posibles ***(A y No A)***: ***1,2,3,4,5 y 6 (6)***

$$\boxed{P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5}$$

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Sean dos sucesos **A** y **B**:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Probabilidad de que A y B ocurran de manera independiente *(P que salgan dos "6" seguidos)*

$$\boxed{P(AoB) = P(A) + P(B)}$$

Probabilidad de que ocurra A o B sin que ocurran a la vez (excluyentes) *(P que salga el "2" o el "4")*

$$\boxed{P(A|_B) = P(A \cap B) / P(B)}$$

Probabilidad de que A ocurra condicionada por la ocurrencia previa de B

$$\boxed{P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Probabilidad de que ocurra A o B, pudiendo ocurrir ambos a la vez (no excluyentes)

Ejemplo numerico probabilidad discreta

Distribuciones de probabilidad discretas:

Si una variable X puede asumir un conjunto discreto de valores X_1, $X_2,\ldots,X_n$ con distinta probabilidad de ocurrencia $p_1,p_2,\ldots,p_n$, puede de-finirse entonces una ***distribución de probabilidad discreta***:

Ejemplo: Se tiran un par de dados y se calcula la probabilidad de obte-ner la suma de sus caras:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p(X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

La probabilidad de obtener suma **5** *es* ***4/36=1/9***

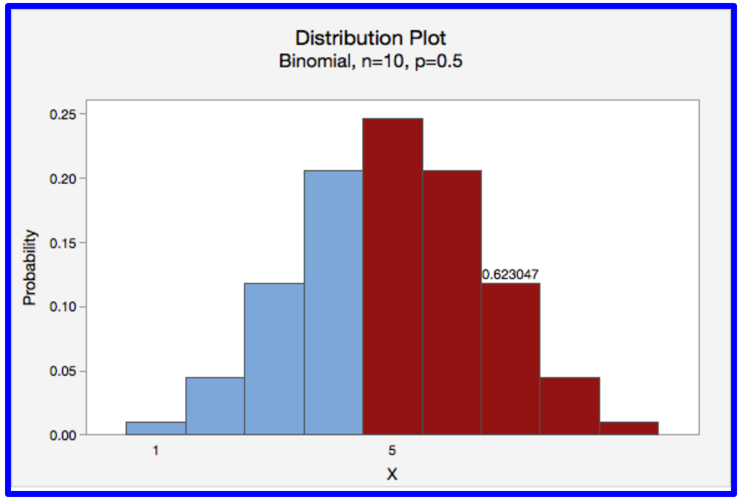
Las distribuciones de probabilidad pueden pensarse como distribuciones de frecuencia relativa "ideales", cuando el número de observaciones es muy elevado.

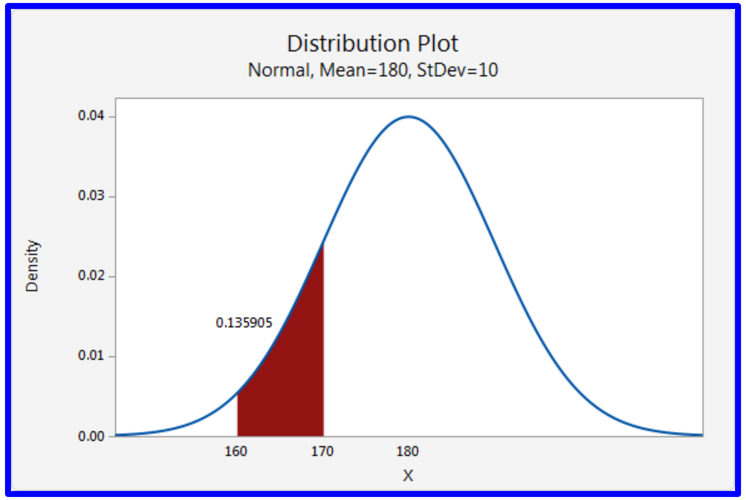
Dado que X puede asumir ciertos valores con probabilidad dada se la denomina "Variable ALEATORIA DISCRETA"

Ejemplo numérico de un Ensamble

Distribuciones de probabilidad continuas:

Las mismas ideas pueden extenderse al caso continuo, considerando que ***X puede asumir un conjunto continuo de valores***.





Al ser una función de distribución de probabilidad, ***el área bajo la cur-va resulta igual a 1***. Es por ello que el área bajo un ***intervalo [a,b]*** proporciona la ***probabilidad*** de que ***X se encuentre*** entre a y b. En este caso, ***la variable ALEATORIA*** pasa a ser ***CONTINUA***

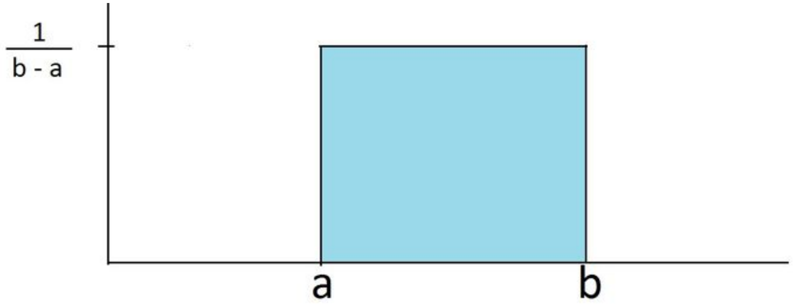
Función densidad de probabilidad

Algunas funciones de Distribución de Probabilidad continuas

Las distribuciones continuas se describen a partir de la ***función densidad de probabilidad*** ***$f_X(x)$*** que determina la ***probabilidad*** que la variable aleatoria ***X*** asuma un valor específico en el intervalo **$[x, x+dx]$** *(no se dispone de un conjunto numerable de valores por lo que no se puede definir una probabilidad para cada uno de ellos,* ***se trabaja por intervalos****)*

UNIFORME: Corresponde a una variable aleatoria continua X, en un intervalo [a,b]**,** donde la ocurrencia es ***equiprobable***.

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \forall x \end{cases}}$$

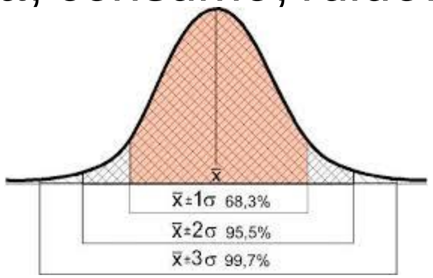


Tipos de distribuciones continuas

Algunas funciones de Distribución de Probabilidad continuas

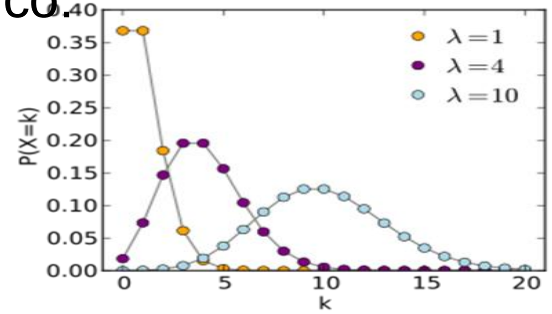
GAUSSIANA o NORMAL: Definida por los parámetros μ y σ (media y desvío estándar), permite modelar *estatura*, *consumo*, *ruido*…

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$



POISSON: Definida por un parámetro λ (valor medio de eventos por unidad de tiempo), permite modelar el número total de ocurrencias de un fenómeno durante un lapso específico:

$$\boxed{f_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \, (con\ x\ entero\ positivo)}$$

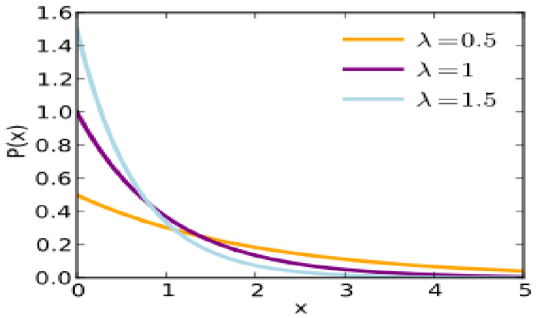


Función densidad de probabilidad

Algunas Funciones de Distribución de Probabilidad continuas:

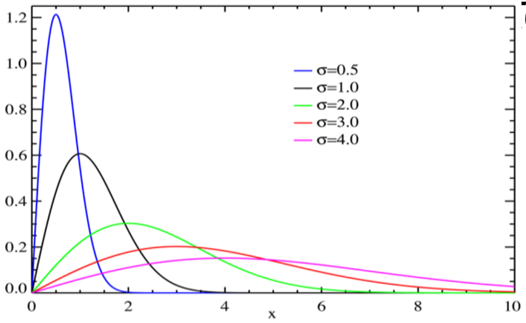
EXPONENCIAL: Definida a partir de un parámetro $\lambda > 0$ (tasa de ocurrencia por unidad de tiempo), permite modelar *fallas en componentes*, *tiempos de espera* e *intervalos entre eventos*.

$$\boxed{f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$$



RAYLEIGH: Definida a partir de un parámetro σ permite modelar *la velocidad del viento, el esfuerzo al que ... teriales y tiempo-falla en componentes*.

$$\boxed{f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}$$



Medias y desvios de distribuciones

Algunas Funciones de Distribución de Probabilidad continuas:

Efectivamente, dichas funciones de distribución se pueden ***caracterizar*** por su ***media*** y ***desvío estándar***:

Distribución	Media	D.E
UNIFORME	$(a+b)/2$	$(b-a)/\sqrt{12}$
POISSON	λ	$\sqrt{\lambda}$
GAUSSIANA	μ	σ
RAYLEIGH	$\sigma\sqrt{\pi/2}$	$\sigma\sqrt{(4-\pi)/2}$
EXPONENCIAL	$1/\lambda$	$1/\lambda$

Probabilidad acumulada

Distribución de Probabilidad Acumulada:

A partir de la función densidad $f_X(x)$, resulta factible calcular la ***probabilidad*** que la variable aleatoria ***X*** ***se encuentre dentro un intervalo [a,b]***:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Bajo dicha premisa, pudede definirse la ***función de distribución acumulada $F_X(x)$***, que determina la probabilidad de que la variable aleatoria asuma ***valores inferiores o iguales a un valor x:***

$$P(x \leq a) = F_X(x) = \int_{u=-\infty}^{x} f_X(u)du \Rightarrow f_X(x) = d\,\frac{F_X(x)}{dx}$$

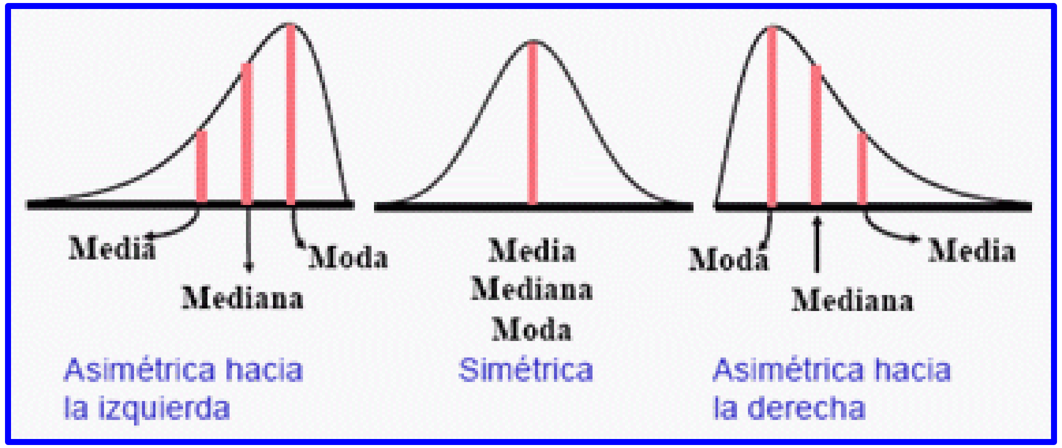
Asimetrias

Medidas de Asimetría

La asimetría constituye una medida ***de forma*** de la distribución :

Puede ser:

- **Negativa** (a la izquierda), donde ***media<mediana<moda (AS<0)***
- **Simétrica** (centrada), donde ***media=mediana=moda (AS=0)***
- ***Positiva*** (a la derecha), donde ***media>mediana>moda*** (***AS>0***)

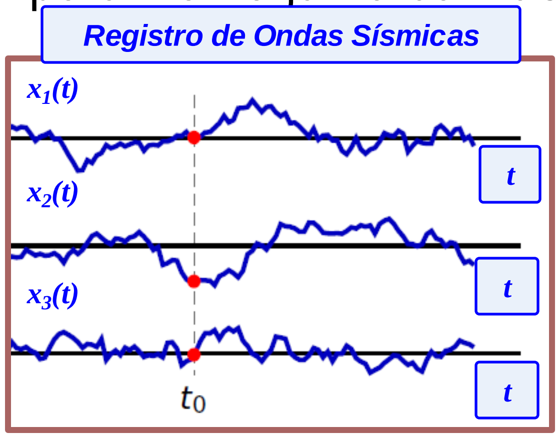


$$AS = \frac{3(\bar{X} - Mediana)}{SD}$$

Coeficiente de asimetría de Pearson

Procesos aleatorios

Un ***proceso físico*** recibe el nombre de "***aleatorio***" cuando los ***valores futuros*** de las variables que lo describen ***no pueden predecirse*** dentro del los límites del error experimental. Este tipo de sistemas generan ***señales dependientes del tiempo***, las cuáles se definen en un intervalo de observación. Un ejemplo de ello puede advertirse en las ***series temporales generadas por la voz humana*** o en las ***ondas sísmicas derivadas de las fuerzas geológicas***. Habida cuenta de tales cualidades, ***su caracterización se lleva a cabo en virtud de parámetros estadísticos***, los cuáles evolucionan temporalmente junto con las series bajo estudio.



Determinismo vs Aleatorio

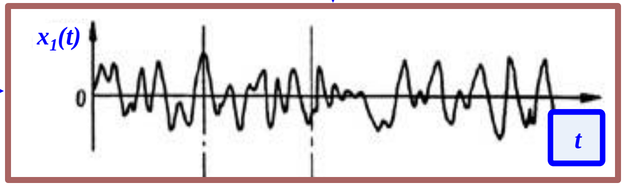
Señales Determinísticas:

Aquellas ***variaciones continuas o discretas*** que pueden ser descriptas por ***funciones matemáticas*** (su valor se encuentra definido para cualquier instante t_0). Dentro de este grupo se encuentran aquellas que pueden ser representadas por ***series matemáticas infinitas*** (Ej. Series de Fourier)

Señales Aleatorias o Estocásticas:

Presentan un ***comportamiento desconocido*** de tipo estocástico (azaroso) y ***no pueden ser descriptas en términos matemáticos***: *El índice bursátil, los parámetros biológicos, la voz humana, las variables climáticas…*

Para poder caracterizar una señal aleatoria se debe evaluar el "PROCESO ESTOCÁSTICO" al que pertenece. Para ello son necesarias HERAMIENTAS ESTADÍSTICAS



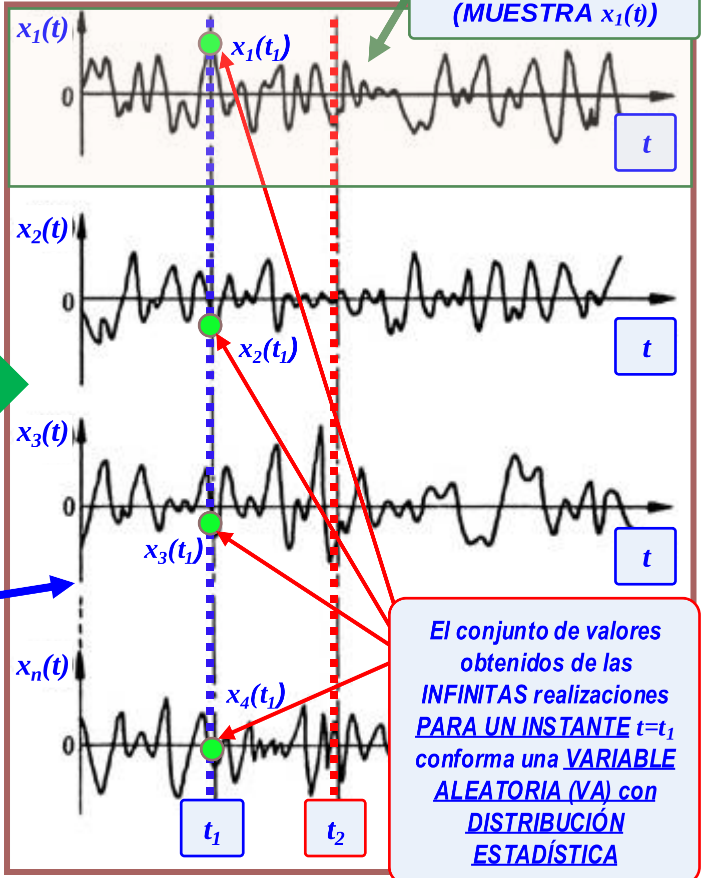
El soporte temporal puede ser CONTINUO o DISCRETO

Formalmente, un ***Proceso Estocástico (PE)*** constituye una ***colección o familia infinita*** de ***señales aleatorias*** (realizaciones del proceso $x_i(t)$ dependientes del tiempo). Como ejemplos, pueden mencionarse:

- *La temperatura hora a hora de una habitación, en diferentes días*
- *La frecuencia cardíaca durante 10 min., en diferentes individuos*
- *El nivel de un río durante 30 min, a la misma hora cada día*

- Cada ***realización*** $x_i(t)$ obtenida de observar el ***PE*** recibe el nombre de ***MUESTRA***
- Al conjunto de las ***infinitas realizaciones tem-porales*** generadas por el ***PE*** se lo denomina ***ENSAMBLE***

Realización del PE (MUESTRA $x_1(t)$)



El conjunto de valores obtenidos de las INFINITAS realizaciones PARA UN INSTANTE $t=t_1$ conforma una VARIABLE ALEATORIA (VA) con DISTRIBUCIÓN ESTADÍSTICA

Una VA es un valor numérico representativo de resultado de un experimento aleatorio

La CARACTERIZACIÓN del PE se efectúa a partir de la obtención de PROMEDIOS ESTADÍSTICOS DEL ENSAMBLE

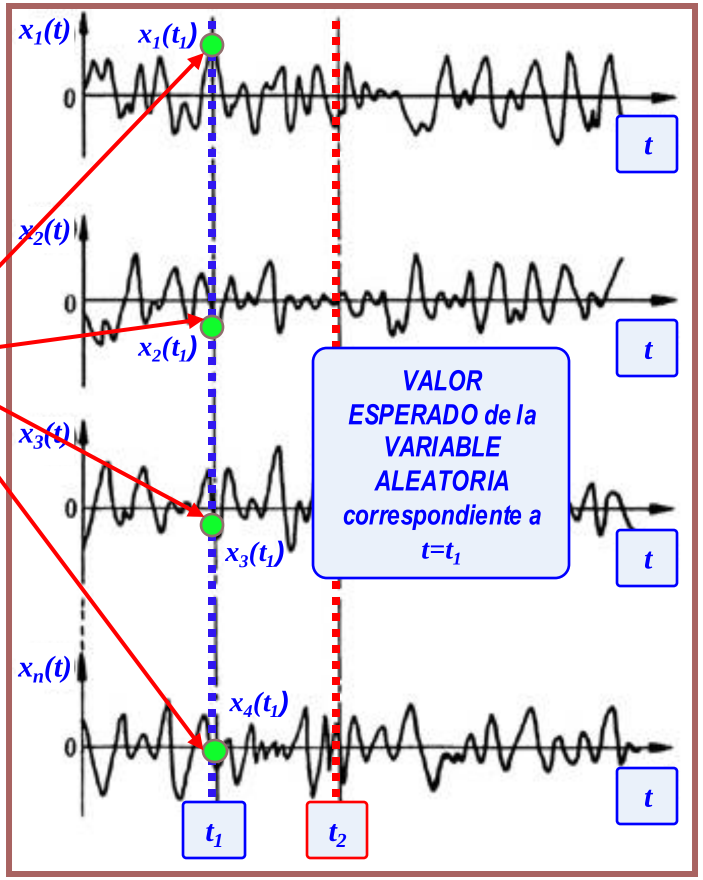
Un ***primer indicador*** lo constituye la ***Media de Ensamble*** (***valor esperado μ_{ti}***), que determina el ***promedio de la variable aleatoria*** correspon-diente a un ***instante específico*** $t=t_1$:

$$\mu_{t_1} = E\left[x(t_1)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)$$

$$\mu_{t_1} \neq \mu_{t_2} \text{ (los valores esperados varían en el tiempo)}$$

EN LA PRÁCTICA ES DIFUCULTOSO DE CALCULAR DEBIDO A QUE SE DESCONOCE LA TOTALIDAD DE LAS MUESTRAS DEL ENSAMBLE (INFINITAS)

- Se lo puede ***aproximar*** a partir de un ***con-junto FINITO de muestras***
- Se lo puede ***aproximar*** a partir de ***promedios temporales de las muestras*** (<u>en condiciones particulares</u>)



El mismo concepto se aplica a Tiempo Discreto

Estadísticos del Ensamble

Aplicando *la premisa anterior* y considerando ***todos los posibles valores del rango t***, pueden definirse ***indicadores estadísticos temporales del ENSAMBLE***:

PROMEDIO LINEAL TEMPORAL: Caracteriza la variación del VALOR MEDIO en el tiempo

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

PROMEDIO CUADRÁTICO TEMPORAL: Permite efectuar la evaluación de la "POTENCIA PROMEDIO" del proceso en el tiempo

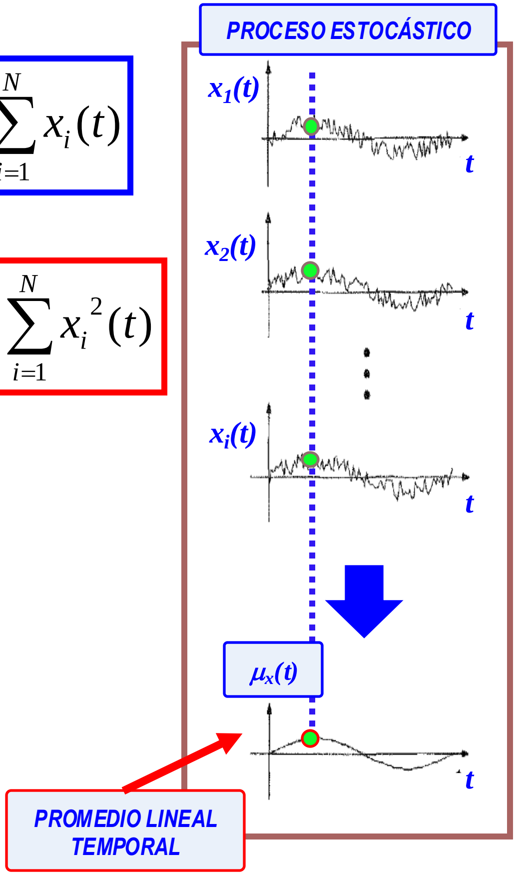
$$p_x(t) = E[x^2(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}(t)$$

VARIANZA TEMPORAL: Cuantifica la DISPERSIÓN de los datos en torno al promedio lineal temporal, en términos del cuadrado de la desviación

$$\sigma_x^{\,2}(t) = E\left[(x(t) - \mu_x(t))^2\right]$$

$$\sigma_x^{\,2}(t) = p_x(t) - \mu_x^{\,2}(t)$$

Mientras que el Promedio Lineal Temporal constituye un momento de PRIMER ORDEN, el promedio cuadrático y la varianza corresponden a momentos de SEGUNDO ORDEN (promedio sobre valores elevados al cuadrado)



Ejemplo numerico de un Ensamble

Ejemplo: Una moneda es lanzada ***3 veces*** secuencialmente cada ***1s*** (tiempo discreto). El resultado obtenido (***0*** cara, ***1*** ceca) se evalúa a partir de las siguientes ***8 realizaciones del proceso*** ¿Qué análisis puede llevarse a partir del ***ensamble en términos de su valor esperado***?

Evaluando entonces el ***promedio temporal del ensamble***:

$$\boxed{\mu_x[n] = E\left[x[n]\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i[n]}$$

Se calcula un promedio μ_i para cada instante t_i sobre todas las muestras

Realizaciones (i)	t=0	t=1	t=2
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0
4	0	0	1
5	1	1	0
6	1	0	1
7	0	0	0
8	1	1	1
μ_x	5/8	4/8	5/8

Tiempo [s]

VARIABLE ALEATORIA en $t=0$

Media de Ensamble

Analizando la VA resultante en cada instante t_k ($t=0$, $t=1$ y $t=2$), los valores esperados (media de ensamble) se acercan a 1/2. Dicho resultado es consistente en términos estadísticos, donde se obtendrían un número de caras igual al de cecas (promedio 1/2), si el número de realizaciones fuera INFINITO

Calculo de los indicares del Ensamble

```
%Lanzamiento secuencial de una moneda
(3 veces, 8 realizaciones)
%Realizaciones del Proceso Estocástico
x=[0 1 1; 1 0 1; 1 1 0; 0 0 1;
   1 1 0; 1 0 1; 0 0 0; 1 1 1]
%Promedio Lineal ENSAMBLE
mx=mean(x,1)
%Promedio Cuadrático ENSAMBLE
px=mean(x.^2,1)
%Varianza ENSAMBLE
s2x=var(x,0,1)
```

Los indicadores estadísticos del ensamble pueden obtenerse a partir de la funciones MEAN (valor esperado) y VAR (varianza). Ambas funciones posibilitan delimitar la dimensión "d" (fila o columna) sobre la que se llevará a cabo el cálculo. Particularmente en este caso (realizaciones del lanzamiento de una moneda en $t=0$, $t=1$ y $t=2$), el valor $d=1$ (columna a columna) proporciona como resultado el comportamiento TEMPORAL del indicador correspondiente

```
x =

     0     1     1
     1     0     1
     1     1     0
     0     0     1
     1     1     0
     1     0     1
     0     0     0
     1     1     1
```

Ensamble correspondiente al lanzamiento secuencial de una moneda en tres instantes

```
mx =

    0.6250    0.5000    0.6250


px =

    0.6250    0.5000    0.6250


s2x =

    0.2679    0.2857    0.2679
```

Variación temporal ($t=0$, $t=1$ y $t=2$) de los indicadores estadísticos

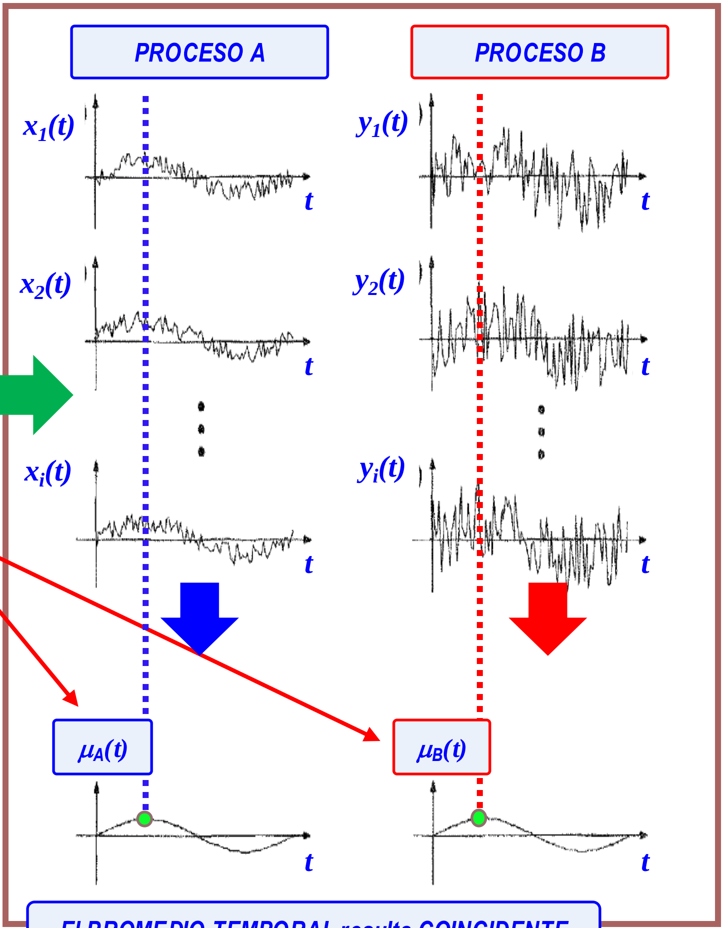
Ejemplo numerico del Ensamble

Frecuentemente, los ***PE*** son descriptos en tér-minos de su ***promedio lineal*** y ***varianza***. ***Ambos parámetros resultan necesarios***, habida cuenta que pueden presentarse situaciones co-mo la que se describe a continuación:

Sean dos procesos estocásticos A y B

Se obtiene el MISMO Promedio Temporal $\mu(t)$ en ambos casos!

Entonces SE LOS DIFERENCIA en virtud de su Varianza Temporal $\sigma^2(t)$



El PROMEDIO TEMPORAL resulta COINCIDENTE en ambos PE pero las VARIANZAS TEMPORALES (dispersión) son distintas!

NO OBSTANTE, la DESCRIPCIÓN COMPLETA de la dinámica temporal del PE exige la incorporación de un momento adicional de SEGUNDO ORDEN CONJUNTO: LA FUNCIÓN DE CORRELACIÓN

Autocorrelacion del Ensamble

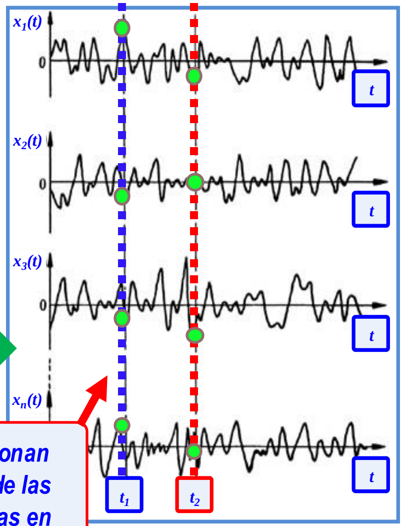
Incorporando medidas de Similaridad: Autocorrelación en el Ensamble

Conforme se ha visto anteriormente en el ensamble, ***el promedio*** *y* ***la varianza*** se ***focalizan*** en un ***instante temporal específico***. Por este motivo resultan ***incapaces*** de evaluar las ***dependencias estadísticas entre DISTINTOS INSTANTES del conjunto de muestras***. Como consecuencia de ello, se utiliza la ***FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN DEL ENSAMBLE*** (***FAC, φ_{xx}***) definida de la siguiente manera:

(Momento de 2do orden CONJUNTO)

$$\boxed{\phi_{xx}(t_1,t_2) = E\left[x(t_1)x(t_2)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)x_i(t_2)}$$

La FAC $\varphi_{xx}(t_1,t_2)$ describe la relación entre las variables aleatorias RESULTANTES DEL ENSAMBLE en los instantes t_1 y t_2. Si resulta elevada, el comportamiento del ensamble en $t=t_1$ se correlaciona linealmente con el comportamiento en $t=t_2$. De esta manera, se obtiene una NOCIÓN del COMPORTAMIENTO del PE en términos de CUAN RÁPIDAMENTE cambian sus valores a lo largo del tiempo



Se correlacionan los valores de las VAs obtenidas en $t=t_1$ y $t=t_2$

Ejemplo numerico de Autocorrelacion

Ejemplo: Se efectúan ***8 realizaciones*** de un proceso estocástico, lanzando una moneda secuencialmente ***3 veces cada 1s*** (tiempo discreto). Efectuar un análisis del ***ensamble en términos de la Función de Autocorrelación***.

Partiendo entonces de la expresión de la ***FAC***:

$$\boxed{\phi_{xx}(t_1,t_2)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i[t_1]x_i[t_2]}$$

y efectuando el cálculo según t_1 y t_2:

$$\phi_{xx}(0,0)=5/8;\ \phi_{xx}(0,1)=3/8;\ \phi_{xx}(0,2)=3/8$$

$$\phi_{xx}(1,0)=3/8;\ \phi_{xx}(1,1)=4/8;\ \phi_{xx}(1,2)=2/8$$

$$\phi_{xx}(2,0)=3/8;\ \phi_{xx}(2,1)=2/8;\ \phi_{xx}(2,2)=5/8$$

Conforme puede advertirse, la FAC es máxima si $t_1=t_2$ y disminuye si $t_1 \neq t_2$

Realizaciones	$t_1=0$	$t_2=1$	$t_3=2$
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0
4	0	0	1
5	1	1	0
6	1	0	1
7	0	0	0
8	1	1	1

Tiempo [s]

$$\phi_{xx}(0,1)\neq\phi_{xx}(1,2)$$

Se observa asimismo que el resultado obtenido de evaluar un instante t_1 y compararlo con el correspondiente instante t_2, UN SEGUNDO DESPUÉS, DEPENDE DEL INSTANTE DE PARTIDA ELEGIDO

¿Y qué implica entonces efectuar la Autocovarianza sobre el ensamble?

La Función de Autocovarianza (***FACV***) consituye esencialmente la ***FAC*** del ensamble ***con remoción del valor medio***:

$$\boxed{C_{xx}(t_1,t_2)=E\left[\left(x(t_1)-\mu_1\right)\left(x(t_2)-\mu_2\right)\right]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x(t_1)-\mu_1\right)\left(x(t_2)-\mu_2\right)}$$

Remoción de los valores medios μ_1 y μ_2 correspondientes a las VAs en t_1 y t_2

Evaluada en $t_1=t_2$ representa ***la varianza*** de la ***VA*** correspondiente a dicho instante:

$$\boxed{C_{xx}(t_1,t_1)=\sigma^2_{x(t_1)}}$$

Varianza en $t=t_1$

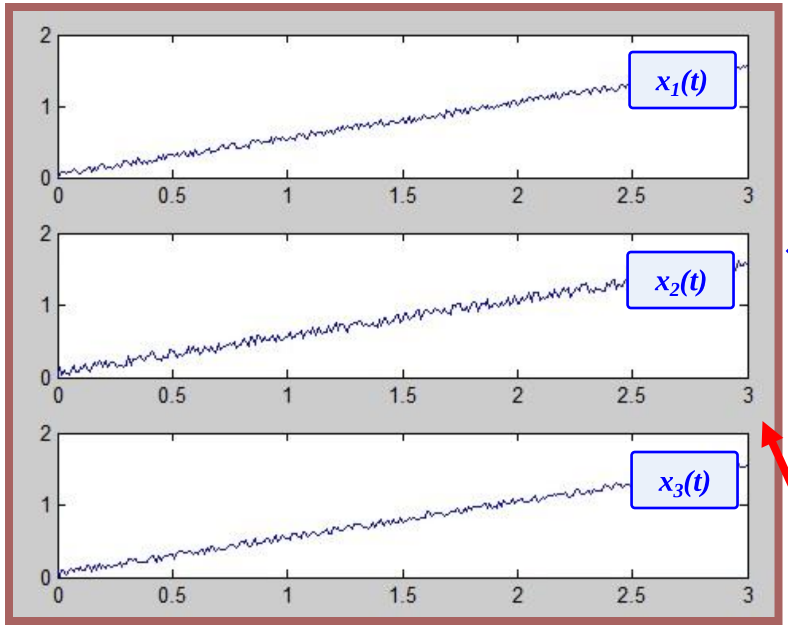
y además puede evidenciarse su ***relación directa con la FAC*** del ensamble:

$$\boxed{C_{xx}(t_1,t_2)=\varphi_{xx}(t_1,t_2)-\mu_1\mu_2}$$

Una FACV POSITIVA, implica una ASOCIACIÓN LINEAL entre las VA obtenidas en t_1 y t_2 de PENDIENTE POSITIVA (valores elevados de una de las variables se corresponden con valores elevados de la otra). Si la FACV resulta NEGATIVA, valores elevados de una de las variables se corresponderán con valores mnínimos de la otra. El VALOR ABSOLUTO de la FACV indica la FUERZA de dicha asociación.

¿Cuándo es conveniente utilizar la FACV en lugar de la FAC?

Si la media temporal $\mu_x(t)$ del proceso se mantiene estable, ambas medidas (***FAC*** y ***FACV***) permiten efectuar una comparación efectiva de la dinámica del ***PE***. En caso de no ser así, resulta imperativa la utilización de la ***FACV***:



Se observa particularmente en este caso que PRESENCIA DE UNA TENDENCIA DETERMINÍSTICA (lineal) $\mu_x(t)$ AFECTARÁ las COMPARACIONES TEMPORALES DE CARÁCTER ALEATORIO obtenidas del cálculo de la FAC. El valor de esta última, en virtud de la diferencia entre t_1 y t_2, se verá INFLUENCIADO por la VARIACIÓN de $\mu_x(t)$. Es por ello que resulta CONVENIENTE la implementación de la FACV, donde el comportamiento de la media del ensamble NO SE TOMA en CONSIDERACIÓN.

Realizaciones del PE afectadas por una tendencia LINEAL

¿Cuándo un proceso estocástico se considera "ESTACIONARIO"?

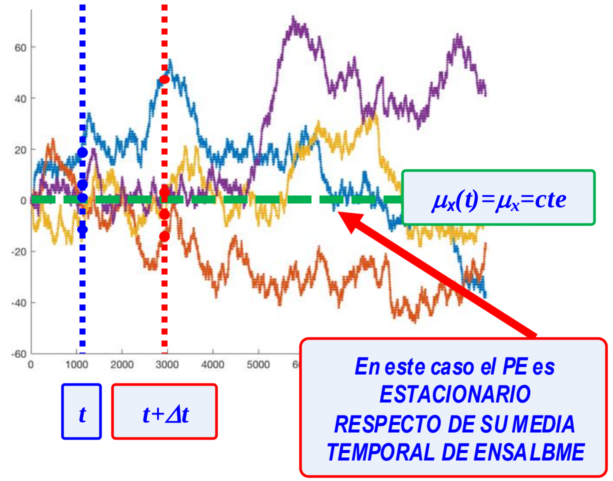
Un ***PE*** se denomina ***"ESTACIONARIO en Sentido ESTRICTO"*** si la ***totalidad*** de sus ***indicadores estadísticos NO varían*** a lo largo del ***tiempo***. Considerando entonces cualquier ***corrimiento temporal Δt***:

1. Para momentos de Primer y Segundo Orden:

$$E\left[g(x(t_1))\right]=E\left[g(x(t_1+\Delta t))\right]\Rightarrow\begin{cases}\mu_x(t)=\mu_x\\ p_x(t)=p_x\\ \sigma_x{}^2(t)=\sigma_x{}^2\\ \vdots\end{cases}$$

$g(x(t))$ indica el tipo de momento a evaluar

Los INDICADORES ESTADÍSTICOS NO DEPENDEN del instante de evaluación y resultan constantes



2. Para momentos conjuntos de Segundo orden (FAC y FACV)

$$\phi_{xx}(t_1,t_2)=E\left[x(t_1)x(t_2)\right]=E\left[x(t_1+\Delta t)x(t_2+\Delta t)\right]$$

El resultado de la FAC (FACV) RESULTA CONSTANTE si los instantes de evaluación t_1 y t_2 PRESERVAN LA MISMA SEPARACIÓN TEMPORAL $\phi_{xx}(1,3)=\phi_{xx}(5,7)=\phi_{xx}(20,22)$

En virtud de lo anterior, la ***FAC*** (y ***FACV***) ***del ensamble*** sólo ***dependerá*** de la ***DIFERENCIA entre los instantes t_1*** y ***t_2*** (salto temporal ***$\tau=t_1-t_2$***) ***y no de sus valores específicos***, quedando expresada como:

$$\boxed{\phi_{xx}(t_1,t_2)=\phi_{xx}(t_1-t_2)=\phi_{xx}(\tau)=E\left[x(t)x(t+\tau)\right],\ con\ \tau=t_1-t_2}$$

Por lo tanto, ***en procesos estacionarios***, se observa asimismo:

$$\phi_{xx}(0)=\sigma_x{}^2+\mu_x{}^2 \quad \text{MÁXIMA en el origen}$$
$$\phi_{xx}(\tau)=\phi_{xx}(-\tau) \quad \text{Función PAR}$$

En los PE ESTACIONARIOS la FAC pasa a depender del parámetro "τ" (diferencia entre los instantes t_1 y t_2) y resulta MÁXIMA si $\tau=0$ (además de comportarse como una función PAR)

Por su parte, si en lugar de que la totalidad de la estadística se mantenga constante, ***sólo se cumple la condición de estacionariedad*** relativa al ***promedio temporal*** *(constante para todo* ***t****)* y la ***FAC*** *(sólo dependiente de* ***$\tau=t_1-t_2$****)*, el ***PE*** se denomina ***"Estacionario en sentido AMPLIO o DÉBIL"***

$$\boxed{\mu_x=E\left[x(t)\right] \quad y \quad \phi_{xx}(\tau)=E\left[x(t)x(t+\tau)\right]}$$

PE ESTACIONARIO EN SENTIDO AMPLIO (estacionario respecto del valor medio del ensamble y la FAC)

Ergodicidad

La condición de "ERGODICIDAD"

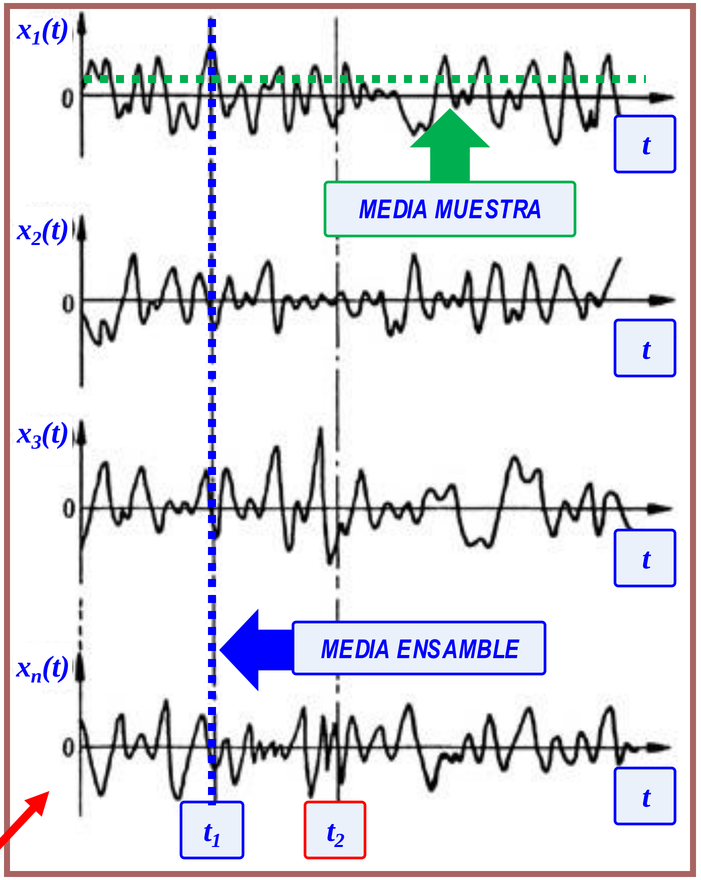
Sea el <u>promedio temporal</u> de *una MUESTRA* del ensamble (tiempo continuo o discreto):

$$\boxed{\overline{x_i(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)dt} \quad \boxed{\overline{x_i[n]} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} x_i[n]}$$

Un ***PE ESTACIONARIO*** se denomina ***"ERGÓDICO respecto del VALOR MEDIO"*** si el ***pro-medio temporal de <u>cualquiera</u> de las muestras*** generadas por el mismo **coincide con la media del ensamble μ_x** (estacionaria)

$$\boxed{\overline{x_i(t)} = \mu_x, \text{ para todo } i}$$

PE ERGÓDICO (debe ser ESTACIONARIO de modo que $\mu_x(t)$=cte)



Si se cumple la CONDICIÓN DE ERGODICIDAD, <u>puede utilizarse CUALQUIER MUESTRA del PE para determinar la MEDIA DEL ENSAMBLE μ_x</u>

Resuemen

$$E[x(t)] = \mu_x = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

Valor medio

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = E[x(t)x(t+\tau)]$$

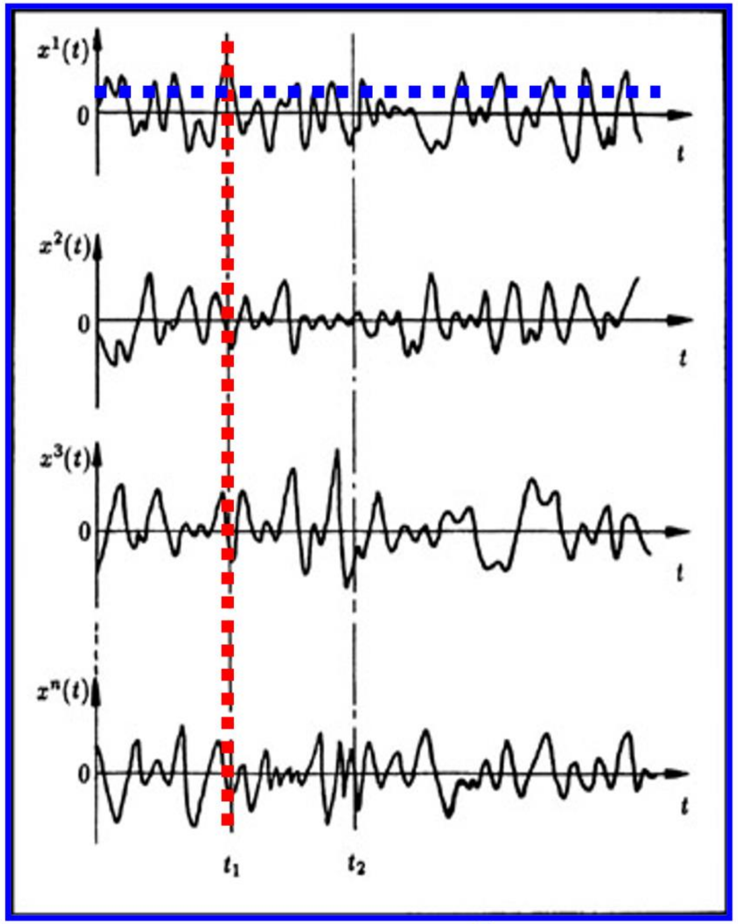
$$R_{xx}(\tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{t=-T}^{T} x(t)x(t\pm\tau)dt$$

Función de Autocorrelación

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)dt$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

Correlación Cruzada



Proceso ERGÓDICO

Ergodicidad de la media

Ejemplo: Se efectúan ***8 realizaciones*** de un proceso estocástico, lanzando una moneda secuencialmente ***3 veces cada 1s*** (tiempo discreto). Efectuar un análisis ***del ensamble en términos de la ERGODICIDAD de la MEDIA***.

Realizaciones				Media Muestra
1	0	1	1	2/3
2	1	0	1	2/3
3	1	1	0	2/3
4	0	0	1	1/3
5	1	1	0	2/3
6	1	0	1	2/3
7	0	1	0	1/3
8	1	1	1	1
μ_x (Media Ensamble)	5/8	5/8	5/8	
	t=0	t=1	t=2	

Tiempo [s]

$$\mu_x[n] = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i[n]$$

Media Ensamble

$$\overline{x_i[n]} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x_i[n]$$

Media Muestra

Los valores medios de ensamble μ_x RESULTAN CONSTANTES, cumpliéndose la condición de ESTACIONARIEDAD. Sin embargo, LOS PROMEDIOS DE LAS MUESTRAS son DIFERENTES según la realización. EL PE NO RESULTA ERGÓDICO EN EL VALOR MEDIO, ya que no puede determinarse la media del ensamble (de valor μ_x=5/8) a partir del promedio temporal de CUALQUIERA de las muestras x_i

NOTA: Si se consideraran las infinitas realizaciones x_i, la media del ensamble tendería a estabilizarse en 1/2 (condición de ergodicidad), pero la totalidad de los promedios de las muestras NO COINCIDIRÍAN CON DICHO VALOR. SIN EMBARGO, si el número de lanzamientos por realización también tendiera a infinito, se alcanzaría la condición de ERGODICIDAD (todas las medias, ya sea de ensamble o muestras adquirirían el valor 1/2)

Proceso ergodico con $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$

Ejemplo: Determinar si $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$ es un proceso ergódico, si A y ω_0 son constantes y ϕ se distribuye uniformenente en $[-\pi, \pi]$ (es un generador con fase estocástica)

Para que sea ergódico ***respecto a la media***:

$$\overline{x(t)} = E[x(t)] = \mu_x$$

1. Análisis temporal de las muestras ($\phi = cte$):

$$\overline{x_i(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_i(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \cos(\omega_0 t + \phi_i)dt = 0 \quad \forall \phi$$

$$\overline{x(t)} = 0$$

Analisis del ensamble

2. Análisis del ensamble (t=*cte*):

En este caso, ***cada realización*** está atada a la variación continua de ϕ, con densidad de probabilidad uniforme $f(\phi)$, por lo que la esperanza ***se calcula a partir de una integral, en lugar de una sumatoria***:

$$E[x(t)] = \int_{\varphi=-\infty}^{\infty} x(\phi) f(\phi) d\phi = \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \cos(\phi + \omega_0 t_i) \frac{1}{2\pi} d\phi = 0 \quad \forall t_i$$

(el coseno resulta nulo pues es periódico en $\mathbf{2\pi}$)

El proceso es ***ergódico respecto a la media*** dado que:

$$\boxed{\overline{x(t)} = E[x(t)] = 0}$$

Es ergodico respecto de la autocorrlacion?

Para que sea ergódico ***respecto a la autocorrelación***:

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau)$$

1. Analizando el ensamble para ***ϕ=cte*** (temporal):

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^{T} A\cos(\omega_0 t + \phi_i) A\cos(\omega_0 t + \phi_i + \tau) dt$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2T} \int_{t=-T}^{T} \cos(\omega_0 t + \phi_i) \cos(\omega_0 (t + \tau) + \phi_i) dt$$

y aplicando la identidad trigonométrica del producto de dos cosenos:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2T}\frac{1}{2}\int_{t=-T}^{T}\left[\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\phi_i) + \cos(-\omega_0\tau)\right]dt$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2T}\frac{1}{2}\left\{\int_{t=-T}^{T} \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\phi_i)dt + \cos(\omega_0\tau)\int_{-T}^{T} dt\right\}$$

Dado que la integral en un período del coseno es nula:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2T}\frac{2T}{2}\cos(\omega_0\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

Analizando el ensamble

2. Analizando ***el ensamble*** en tiempos t_1 y t_2 ctes:

$$\varphi(t_1,t_2) = E[A\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)A\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)]$$

$$\varphi(t_1,t_2) = A^2 E[\cos(\omega_0 t_1 + \varphi)\cos(\omega_0 t_2 + \varphi)]$$

Aplicando nuevamente la identidad trigonométrica del producto de dos cosenos:

$$\varphi(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2}\{E[\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi) + \cos(\omega_0(t_1 - t_2))]\}$$

y dado que el valor esperado de una suma es la suma de los valores esperados resulta:

$$\varphi(t_1,t_2)=\frac{A^2}{2}\frac{1}{2\pi}\{E[\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\varphi)]+E[\cos(\omega_0(t_1-t_2))]\}$$

$$\varphi(t_1,t_2)=\frac{A^2}{2}\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\varphi+\omega_0(t_1+t_2))d\varphi+\cos[\omega_0(t_1-t_2)]\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\right\}$$

(recordar que t_1 y t_2 son constantes y el coseno varía en ϕ, por lo que es periódico cada 2π):

$$\varphi(t_1,t_2)=\frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(t_1-t_2)]=\frac{A^2}{2}\cos[\omega_0(t_2-t_1)]$$

Por lo que finalmente y dado que el sistema ***es estacionario*** (sólo depende de la diferencia de t_2-t_1=τ), ***resulta ergódico respecto FAC***:

$$\boxed{\varphi_{xx}(t_1,t_2)=R_{xx}(\tau)}$$

Autocorrelacion

Si a la condición de ***ergodicidad respecto del va-lor medio*** se le incorpora la condición de ***ergodicidad respecto de la Función de Autocorrelación***:

$$\phi_{xx}(\tau) = R_{x_i x_i}(\tau) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} x_i(t) x_i(t+\tau) dt, \text{ para todo } i$$

Tanto ϕ_{xx} como R_{xx} se calculan en términos del corrimiento de la MISMA VARIABLE "τ" (o "k" en el caso discreto)

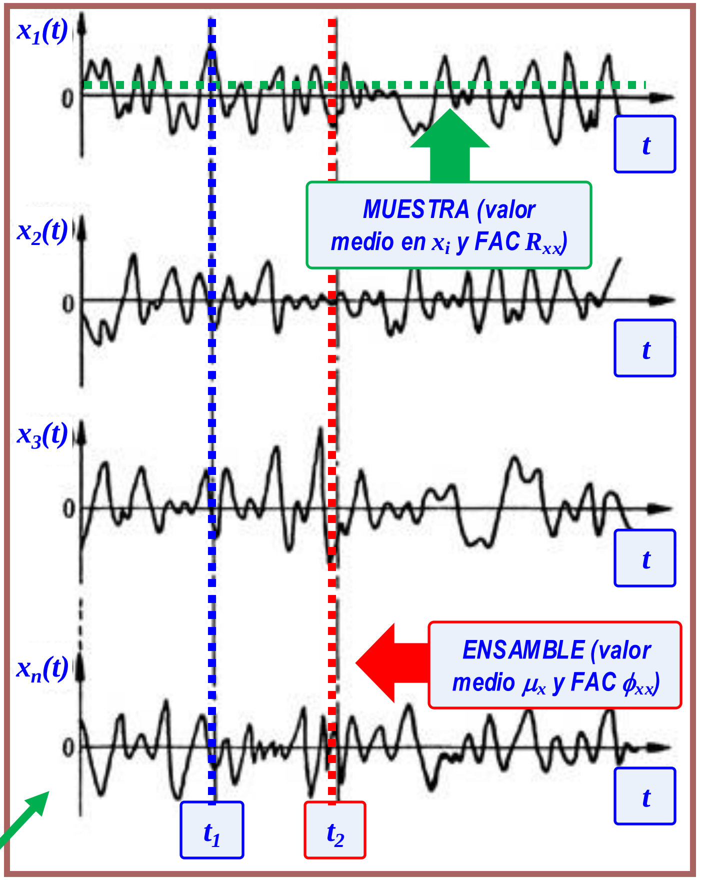
Autororrelación de una muestra R_{xx}

entonces el proceso resulta ***"ERGÓDICO en SEN-TIDO AMPLIO o DÉBIL"***:

$$\mu_x = \overline{x_i(t)} \quad y \quad \phi_{xx}(\tau) = R_{x_i x_i}(\tau) \quad \text{para todo } i$$

La MEDIA DE ENSAMBLE μ_x (estacionaria) coincide con la media de CUALQUIERA de las muestras x_i

La FAC del ensamble $\phi_{xx}(\tau)$ coincide con la FAC $R_{xx}(\tau)$ de CUALQUIERA DE LAS MUESTRAS



Si el proceso es ERGÓDICO EN SENTIDO AMPLIO, puede obtenerse la MEDIA DE ENSAMBLE y su FAC en virtud del ANÁLISIS DE CUALQUIER MUESTRA

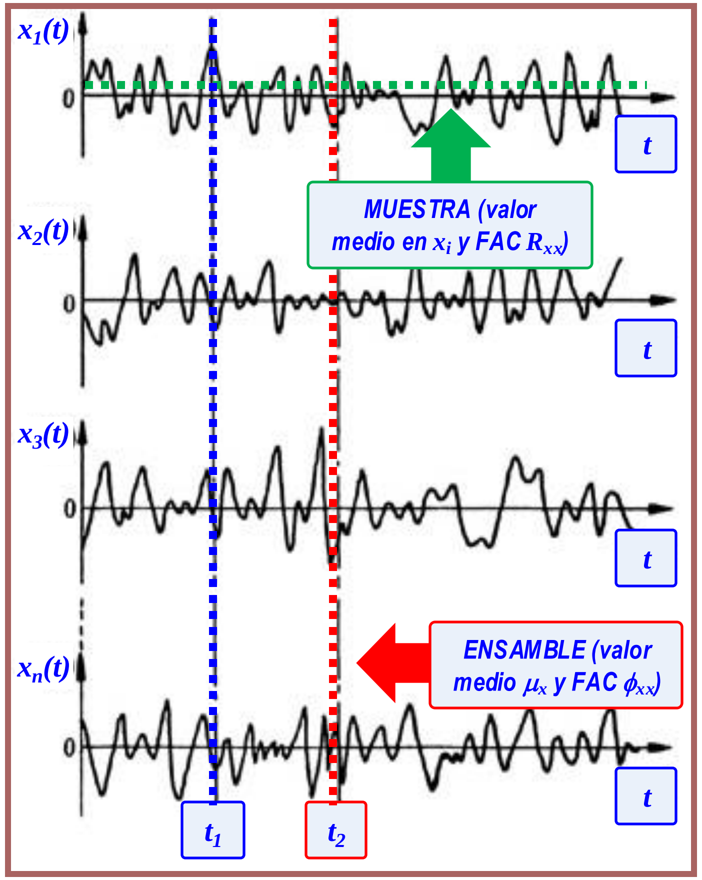
Ergodicidad

Puede demostrarse que el **PE** $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$, donde la fase ϕ varía aleatoriamente de manera uniforme en $[-\pi, \pi]$ resulta **ergódico** respecto al **valor medio** y la **FAC** (sentido amplio)

Finalmente, si resulta factible calcular **la totalidad de los indicadores estadísticos** a partir de una **única muestra**, el proceso se define como **"ERGÓDICO en sentido ESTRICTO"**

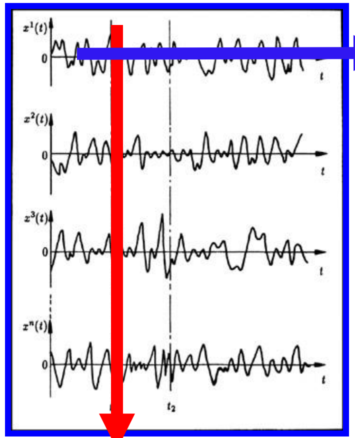
Un proceso ERGÓDICO es ESTACIONARIO. EL RECÍPROCO NO ES CIERTO (la estacionariedad NO ASEGURA ERGODICIDAD)

En la práctica general, los procesos NO SUELEN ser ergódicos (o estacionarios). Bajo determinadas circunstancias se "ASUME o ESPERA ERGODICIDAD" de modo de abordar el PE A PARTIR DE UNA ÚNICA REALIZACIÓN, dado que no es posible tener acceso al ensamble



Ensamble

PROCESO ESTOCÁSTICO (ENSAMBLE)



$\overline{x_1(t)}$

$E[x(t_1)]$

$$\mu_x(t) = E[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$$

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E\left[x(t_1)x(t_2)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)x_i(t_2)$$

CARACTERIZACIÓN INICIAL DEL PROCESO ESTOCÁSTICO (Ej. Valor Medio y Función de Autocorrelación)

$$\mu_x(t) = \mu_x = cte$$

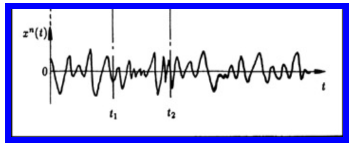
$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = \phi_{xx}(\tau) \ con \ \tau = t_1 - t_2$$

Condición de ESTACIONARIERAD (en sentido amplio)

$$\mu_x = \overline{x_1(t)} = \overline{x_2(t)} = \overline{x_3(t)} = \ldots$$

$$\phi_{xx}(\tau) = R_{x_1x_1}(\tau) = R_{x_2x_2}(\tau) = R_{x_3x_3}(\tau) = \ldots$$

Condición de ERGODICIDAD (debe cumplirse estacionariedad)



UNA ÚNICA MUESTRA permite CARACTERIZAR EL ENSAMBLE en virtud de su media temporal y FAC (representa a todas las x_i)

Ruido Blanco

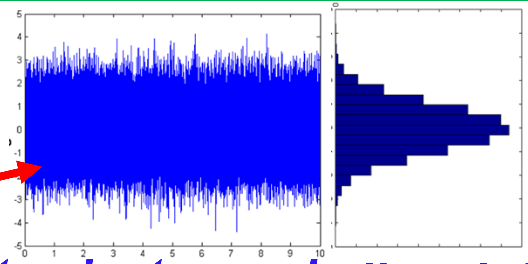
El Proceso de RUIDO BLANCO: Un ***PE*** que se manifiesta frecuentemente en diversas aplicaciones es aquel de-nominado "***Proceso de Ruido Blanco***". Es un proceso de ***carácter ESTACIONARIO en sentido AMPLIO*** e ***IDEAL*** (no existe en términos prácticos), que presenta las siguientes características:

El RGB es <u>ERGÓDICO</u> respecto del valor medio y la FAC

$$\mu_x(t) = 0$$
$$\sigma_x^2(t) = \sigma^2$$
$$\phi_{xx}(\tau) = G_0\delta(\tau)$$

El RUIDO BLANCO es un PE de MEDIA NULA, VARIANZA FINITA y se encuentra totalmente DESCORRELACIONADO (su AUTOCORRELACIÓN ES NULA EXCEPTO en τ=0)

Si la distribución de la VA correspondiente a $t=t_i$ es NORMAL, se lo denomina RUIDO BLANCO GAUSSIANO (RGB)



En ***condiciones reales***, entre los ***PE*** cuyo ***comportamiento es similar al de Ruido Blanco*** pueden mencionarse:

Ruido Térmico: Es generado por el movimiento aleatorio de electrones den-tro de un conductor. Su distribución de probabilidad es gaussiana, de valor medio nulo. Su ***FAC*** se comporta aproximadamente como $\phi_{xx}(\tau)\sim G_0/(1+\tau^2)$

Ruido Rosa

- ***Ruido Rosa:*** Su ***FAC*** adquiere la forma $\phi_{xx}(\tau)=G_0\, sen(\tau)/\tau$

Particularmente, si se lleva a cabo la combinación de señal de ***carácter deter-minista*** $\mathbf{x(t)}$ junto con un proceso de tipo ***Ruido Blanco*** $\mathbf{n(t)}$, puede demostrarse que la ***FAC*** resultante es:

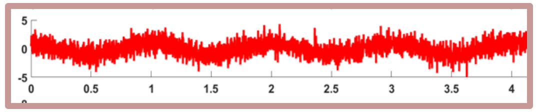
$$\boxed{p(t)=x(t)+n(t) \quad \rightarrow \quad R_{pp}(\tau)=R_{xx}(\tau)+R_{nn}(\tau)+R_{xn}(\tau)+R_{nx}(\tau)}$$

por lo que ***si x(t) y n(t) no se encuentran correlacionadas*** (<u>no presentan depen-dencia entre si</u>):

$$\boxed{R_{pp}(t)=R_{xx}(t)+R_{nn}(t)}$$

Un ejemplo representativo lo constituye el análisis de señales sinusoidales ***afecta-das por PE de ruido blanco:***

$$p(t)=\cos(\omega_0 t+\varphi)+n(t)$$



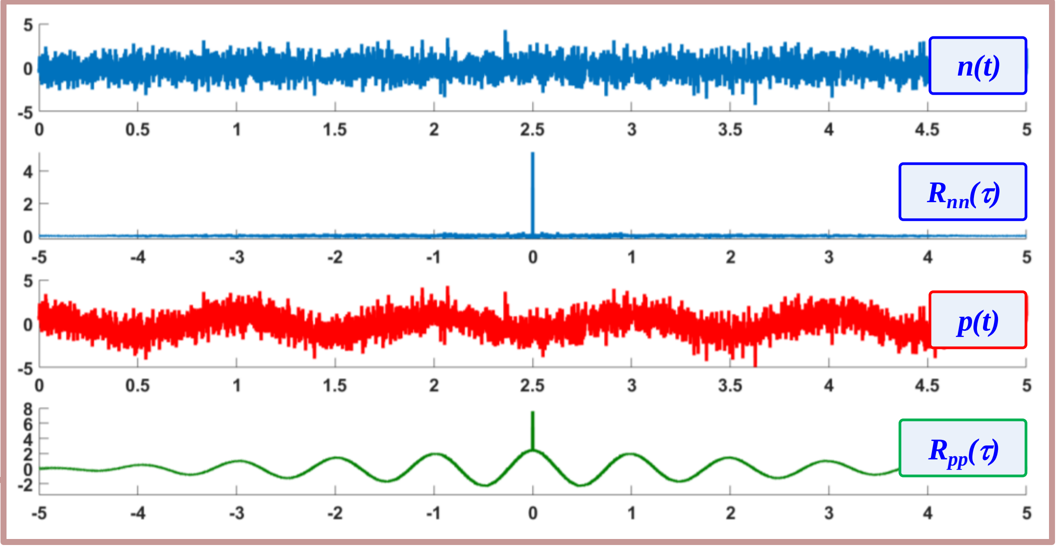
$$\boxed{R_{pp}(\tau)=\frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)+G_0\delta(\tau)}$$

Al efectuar la AUTOCORRELACIÓN de la señal sinusoidal afectada por el PE de Ruido Blanco, se obtiene otra señal sinusoidal (su autocorrelación) y una función impulso. De esta manera se accede información específica relacionada con dicha sinudoide

Procesos aleatorios

```
%Señal DETERMINÍSTICA
Ts=0.001;
t=0:Ts:5;
x=cos(2*pi*t);
%Señal ESTOCÁSTICA (R. B. Gaussiano)
n=wgn(1,length(x),0);
%COMBINACIÓN x+n
p=x+n;
%MEDIA TEMPORAL MUESTRA RBG (=0)
mx=mean(n)
%VARIANZA TEMPORAL MUESTRA RGB (=1)
s2x=var(n)
%AUTOCORRELACIÓN RGB
[Rnn,tau]=xcorr(n,n);
%AUTOCORRELACIÓN x+n
[Rpp,tau]=xcorr(p,p);
subplot(411),plot(t,n);
subplot(412),plot(tau*Ts,Rnn*Ts);
subplot(413),plot(t,p);
subplot(414),plot(tau*Ts,Rpp*Ts);
```

La generación de una muestra $n(t)$ perteneciente a un proceso de ruido blanco de tipo gaussiano, puede llevarse a cabo en MatLab/Octave en virtud de la función "WGN". Puede verificarse que dicha muestra posee promedio temporal nulo (MEAN) y varianza unitaria (VAR) por defecto. Al aplicar la función de autocorrelación (XCORR) se advierte un único valor no nulo en $\tau=0$ (función impulso). Si la muestra de ruido se combina con una señal determinística $x(t)=\cos(2\pi t)$, el cálculo de la función autocorrelación proporciona en este caso la suma de las autocorrelaciones de $x(t)$ y $n(t)$, debido a que ambas señales son independientes entre sí.



Procesos aleatorios estacionarios

Procesos Estocásticos Estacionarios y Sistemas LIT

En un sistema ***Lineal e Invariante en el tiempo***, las propiedades de ***estaciona-riedad*** y ***ergodicidad de la EXCITACIÓN*** se ***CONSERVAN*** en la ***RESPUESTA***:

$$x(t) \quad x[n] \longrightarrow \boxed{T[x(t)] \equiv h(t)} \longrightarrow y(t) \quad y[n]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t) = x(t) * h(t) \\ y[n] = x[n] * h[n] \end{array}}$$

En una primera instancia, puede determinarse la ***media temporal de ensamble de la respuesta $\mu_y(t)$***, generada como ***consecuencia*** del ***PE*** de excitación $x(t)$:

$$\boxed{\mu_y(t) = E[y(t)] = E[x(t) * h(t)] = E[x(t)] * h(t) = \mu_x(t) * h(t)}$$

El Valor Esperado de la RESPUESTA $\mu_y(t)$ es el resultado de la CONVOLUCIÓN entre el valor esperado de la EXCITACIÓN $\mu_x(t)$ y la respuesta impulsional $h(t)$

de modo que si el proceso ***$x(t)$ resulta estacionario:***

NOTA: El valor esperado sólo se calcula sobre el PE $x(t)$, ya que $h(t)$ es una SEÑAL DETERMINÍSTICA (todas las muestras de su "ensamble" son idénticas y por ende $E[h(t)]=h(t)$)

$$\mu_x(t) = \mu_x \Rightarrow \mu_y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\mu_x d\tau = \mu_x \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t)d\tau \Rightarrow \boxed{\mu_y = \mu_x \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t)dt}$$

Correlacion cruzada

Bajo la misma premisa, puede evaluarse la ***FAC*** correspondiente a las ***muestras de ensamble de la respuesta y(t)***:

$$\boxed{R_{yy}(\tau)=E[y(t)y(t+\tau)]} \Rightarrow \boxed{y(t)=x(t)*h(t)} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} R_{yy}(\tau)&=R_{hh}(\tau)*R_{xx}(\tau)\\ R_{hh}(\tau)&=h(\tau)*h(-\tau)\end{aligned}}$$

Recordar que la FAC correspondiente a la RESPUESTA del sistema LIT es el resultado de la CONVOLUCIÓN entre las FAC de x y h

De modo que si el ***PE de EXCITACIÓN*** resulta ***ERGÓDIGO***, la ***FAC*** correspondiente al ***PE de respuesta del sistema LIT*** puede obtenerse a partir de la ***CONVOLUCIÓN*** entre las autocorrelaciones de cualquiera de las muestras de ***x(t)*** y la ***FAC*** de ***h(t)***. Asimismo, si se evalúa la ***FCC*** entre ***excitación*** y ***respuesta*** se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{xy}(\tau)&=h(\tau)*R_{xx}(\tau)\\ R_{yx}(\tau)&=h(-\tau)*R_{xx}(\tau)\end{aligned}}$$

La CORRELACIÓN CRUZADA ente EXCITACIÓN y RESPUESTA está vinculada DIRECTAMENTE con la respuesta impulsional h(t)

por lo que si ***x(t)*** resulta un ***PE*** de ***Ruido Blanco Gaussiano*** ($R_{xx}(\tau)=G_0\delta(\tau)$):

$$\boxed{R_{xy}(\tau)=h(\tau)*G_0\delta(\tau)=G_0h(\tau)}$$

LA RESPUESTA IMPULSIONAL h(t) puede ser obtenida como EL RESULTADO DE LA CORRELACIÓN CRUZADA ENTRE UNA EXCITACIÓN ESTOCÁSTICA Y SU RESPUESTA asociada!!!

Teorema de Wiener-Khinchine

¿Cómo se procesa una señal estocástica en frecuencia en términos de su DE?

Un proceso **ergódico** y **estacionario** puede ser caracterizado a partir de su ***FAC***, ***correspondiente a una muestra tempo-ral***. Consecuentemente puede aplicarse (*dado que la autoco-rrelación resulta determinística*) el ***Teorema de Wiener-Khinchine***:

$$\boxed{G_{xx}(\omega) = F[R_{xx}(\tau)]} \qquad \boxed{G_{xy}(\omega) = F[R_{xy}(\tau)]}$$

Autoespectro — **Espectro Cruzado**

De esta manera se puede trabajar con señales que no pueden ser descriptas por funciones matemáticas

Densidad espectral de Potencia

¿Todo es información? Las fuentes de interferencia (en términos generales "ruido" ***n(t)***) pueden ser caracterizadas a partir de su ***DEP,*** a saber:

- **RUIDO BLANCO**: Su ***DEP*** resulta ***constante*** para todas las frecuencias. Es por ello que se lo denomina blanco, en analogía con la luz blanca. Consecuentemente, puede establecerse que:

$$\boxed{G_{nn}(\omega) = N_0 \rightarrow R_{nn}(\tau) = N_0\delta(\tau)}$$

El ruido blanco se encuentra totalmente DESCORRELACIONADO en relación a τ. No se parece a si mismo excepto en $\tau=0$.
Es IDEAL y posee potencia INFINITA ($R_{xx}(0)\rightarrow\infty$)

Ruido Termico en la frecuencia

- **RUIDO TÉRMICO**: Es generado por el movimiento aleato-rio de electrones dentro de un conductor. Su distribución de probabilidad es gaussiana, de valor medio nulo. Conside-rando una resistencia $\boldsymbol{R}$ a temperatura $\boldsymbol{T}$ su ***DEP*** resulta:

$$\boxed{G(f) = \frac{2Rh|f|}{e^{\frac{h|f|}{kT}} - 1}}$$

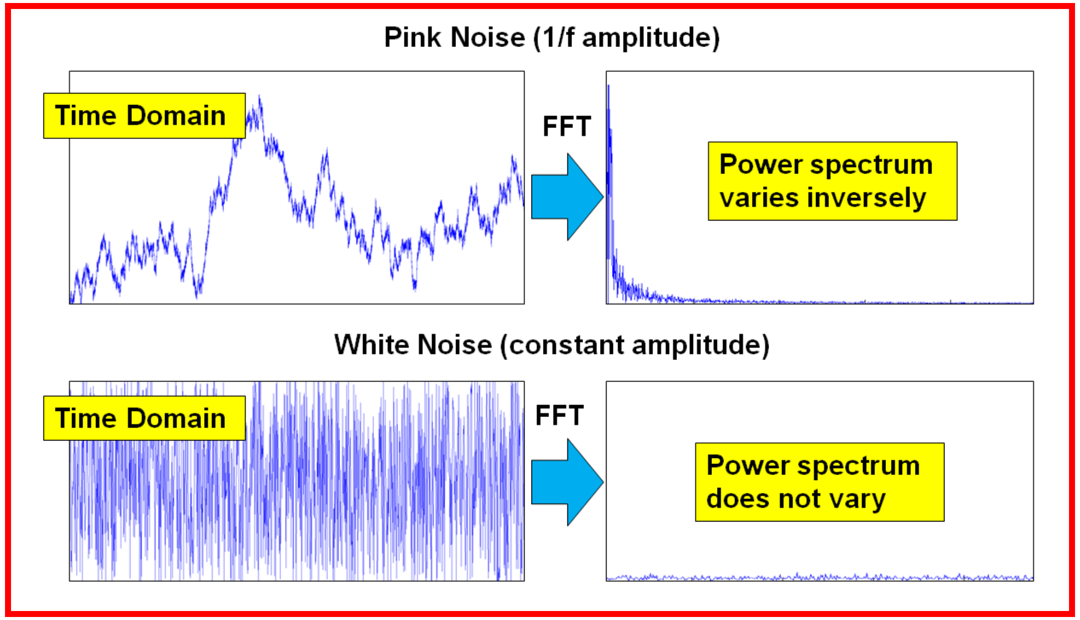
donde $\boldsymbol{k}$ es la constante de Boltzman y $\boldsymbol{h}$ la constante de Plank. ***Su DEP puede considerarse como*** $\boldsymbol{2RkT}$ si $\boldsymbol{f} \ll \boldsymbol{kT/h}$ (orden de 10^{12}Hz).

Ruido Rosa en la frecuencia

- **RUIDO ROSA**: En la mayoría de los casos se utiliza el rui-do ***limitado en banda (rosa)*** de manera que (idealmente):

$$G_{nn}(\omega)\begin{cases} N_0 & |\omega| < \omega_{max} \\ 0 & \forall \omega \end{cases}$$

$$R_{nn}(\tau) = \frac{N_0 \omega_{max}}{\pi} \frac{\sin(\omega_{max}\tau)}{\omega_{max}\tau}$$



(en términos reales, la DEP del ruido rosa decrece inversamente con la frecuencia, 1/f)

Señal Ruido

Sea entonces ***y(t)=x(t)+n(t)*** la suma de una señal y ruido, pue-de demostrarse que la ***FAC*** resultante es:

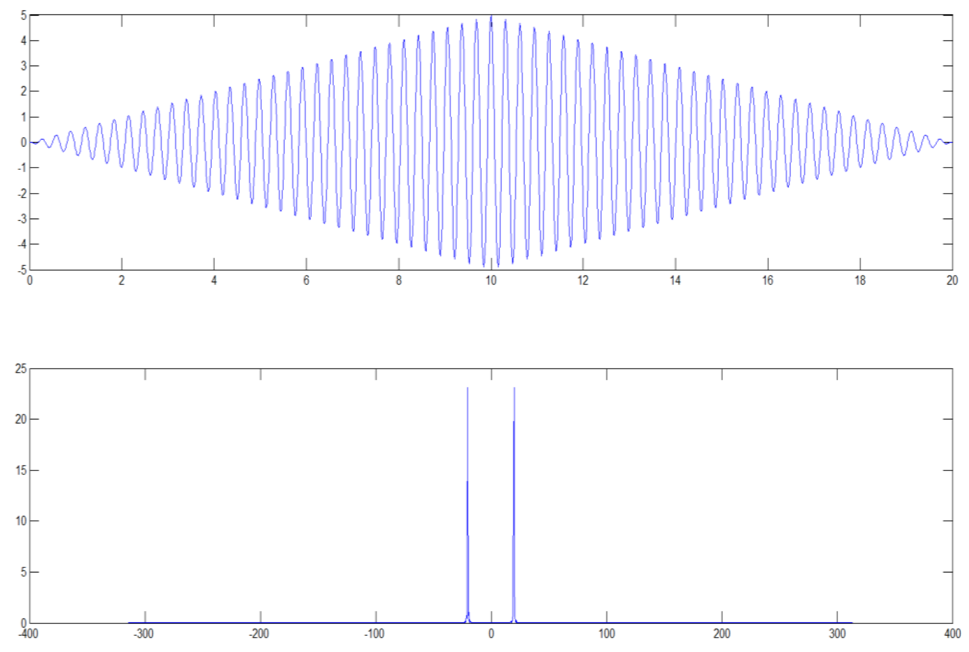
$$\boxed{\begin{aligned} R_{yy}(t) &= R_{xx}(t) + R_{nn}(t) + R_{yn}(t) + R_{ny}(t) \\ G_{yy}(\omega) &= G_{xx}(\omega) + G_{nn}(\omega) + G_{yn}(\omega) + G_{ny}(\omega) \end{aligned}}$$

por lo que ***si x(t) y n(t) no están correlacionadas*** (no presen-tan dependencia entre si):

$$\boxed{\begin{aligned} R_{yy}(t) &= R_{xx}(t) + R_{nn}(t) \\ G_{yy}(\omega) &= G_{xx}(\omega) + G_{nn}(\omega) \end{aligned}}$$

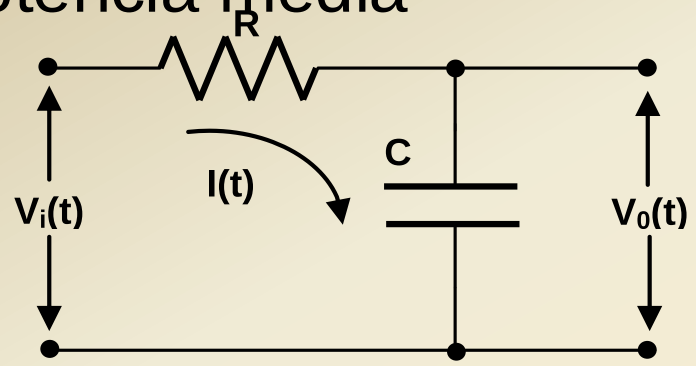
Señal Ruido calculo

```
%Señal determinística:
%COSENO*PULSO 10s
dt=0.01;
t=0:dt:10;
x=cos(20*t);
%Autocorrelación
Rxx=xcorr(x)*dt;
tau=0:dt:20;
N=length(tau);
%Transformada de la autocorrelación
Gxx=fftshift(fft(Rxx)*dt);
ws=(2*pi/(N*dt));
w=(-N/2:(N/2)-1)*ws;
Gxx=abs(Gxx_ac);
%Graficación
subplot(211),plot(tau,Rxx);
subplot(212),plot(w,Gxx);
```



Caracterizacion por Ruido Blanco i

Ejemplo: Sea un sistema excitado con ***RBG*** de densidad espectral de potencia S_0. Determinar la función de autocorrelación de la salida $V_{00}(\tau)$ y su potencia media



$$\frac{V_i(t)}{RC} = V_0'(t) + \frac{V_0(t)}{RC}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{RC}\frac{1}{\omega^2 + \frac{1}{RC}}$$

$$G_{ViVi}(\tau) = S_0$$

Considerando que la entrada es ruido blanco gaussiano, con ***DEP*** constante:

Caracterizacion por Ruido Blanco ii

Y sabiendo que la ***DEP*** de la salida es:

$$\boxed{G_{V_0V_0}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{V_iV_i}(\omega)}$$

La misma resulta:

$$G_{V_0V_0}(\omega) = S_0 \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \frac{1}{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}$$

En virtud del Teorema de ***Wiener-Khinchine***, se aplica transformada inversa de Fourier para obtener la ***FAC***: $\boxed{R_{V_0V_0}(\tau) = F^{-1}\left[G_{V_oV_0}(\omega)\right]}$

Caracterizacion por Ruido Blanco iii

Y sabiendo que:

$$e^{-a|t|} \rightarrow \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

Se obtiene finalmente:

$$R_{V_0V_0}(\tau) = F^{-1}\left[S_0 \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \frac{1}{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} \right] = \frac{S_0}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

$$\boxed{R_{V_0V_0}(\tau) = \frac{S_0}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}} \Rightarrow P_{MV0} = R_{V_0V_0}(0) = \frac{S_0}{2RC}}$$

Resumen

$$\boxed{G_{xx}(\omega) = F[\varphi_{xx}(\tau)]}$$

Autoespectro

$$\boxed{G_{xy}(\omega) = F[\varphi_{xy}(\tau)]}$$

Espectro Cruzado

$$\boxed{G_{yy}(\omega) = \left|H(\omega)\right|^2 G_{xx}(\omega)}$$

DEP de la salida

$$\boxed{\begin{aligned} G_{yx}(\omega) &= H(\omega)G_{xx}(\omega) \\ G_{xy}(\omega) &= \overline{H(\omega)}G_{xx}(\omega) \end{aligned}}$$

DEP Cruzada