Modulación y Procesamiento de Señales
Examen Febrero 2018

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

15 de febrero de 2018

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 4 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta

(a) Dar el diagrama de bloques del transmisor y receptor de un sistema PCM binario. Explicar la función de cada uno de los bloques.

(b) Bosquejar la relación señal a ruido en detección SNR_D, en función de la relación señal a ruido en el recepción SNR_R, para valores de niveles de cuantificación q_1 y q_2 tales que $q_1 > q_2$. Indicar el punto de trabajo óptimo en el caso del sistema propuesto.

Problema 1

Se desea enviar una señal analógica $x(t)$ utilizando un sistema PCM M-ario. La señal $x(t)$ tiene densidad espectral de potencia $G_x(f) = \frac{1}{W}\Pi\left(\frac{f}{W}\right)$, con $W = 10\,kHz$. El canal cumple las hipótesis habituales, tiene ancho de banda $B_T = 18\,kHz$, produce una atenuación $L = 5$ en potencia e introduce ruido blanco aditivo y gaussiano con densidad espectral de potencia $\eta/2 = 10^{-6}\,W/Hz$.

(a) Determinar el ancho de banda de la señal $x(t)$ y su potencia S_x.

(b) Calcular el número máximo n de símbolos por palabra de código, que es posible emplear.

(c) Indicar el rango de frecuencias de muestreo válidas del sistema PCM, con n obtenido en la parte anterior.

Asumiendo que el sistema PCM M-ario trabaja en la zona de predominio del error de cuantificación, se requiere que la SNR_D sea superior a $30\,dB$. El cuantificador tiene un factor de escala de $X_m = 1$.

(d) Para n y la mínima frecuencia de muestreo f_s obtenidos, determinar la menor cantidad de niveles de cuantización q necesarios, el mínimo número de símbolos M del código y la cadencia de símbolos r en kbps.

Para transmitir por el canal se utiliza señalización polar y pulsos rectangulares.

(e) Indicar el ancho de banda óptimo del filtro receptor para no introducir interferencia intersimbólica.

(f) Calcular la potencia de ruido en recepción N_R.

(g) Calcular la potencia mínima de transmisión S_T^{min} que garantice el predominio del error de cuantificación en detección.

Problema 2

Se desea implementar un filtro $h[n]$ SLIT y causal, dado por la ecuación en diferencias,

$$y[n] = kx[n] + (1-k)y[n-1]$$

donde $x[n]$ y $y[n]$ son la entrada y la salida del filtro respectivamente y k una constante real.

(a) Hallar la transformada $\mathcal{Z}$ de la respuesta al impulso $h[n]$, $H(z)$, indicando la región de convergencia del filtro.

(b) Dar un diagrama de bloques que implemente este filtro.

(c) Indicar los posibles valores de k para que el filtro digital $h[n]$ sea estable

(d) Sobre la hipótesis de que k es tal que el sistema es estable, hallar la magnitud al cuadrado de la respuesta en frecuencia del filtro $|H(e^{j\theta})|^2$.

(e) Hallar k para que la ganancia del filtro en frecuencia $\theta = \pi/3$ sea $1/\sqrt{3}$ asegurando que el sistema resultante sea estable.

En lo que sigue, se empleará el valor de k calculado en la parte anterior.

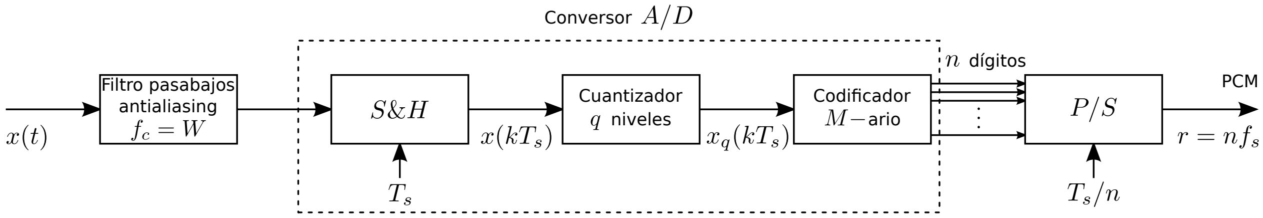
(f) Calcular y esbozar la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(g) Dibujar el diagrama de polos y ceros del sistema indicando la región de convergencia. Indicar de que tipo de filtro se trata en cuanto a selectividad de frecuencias.

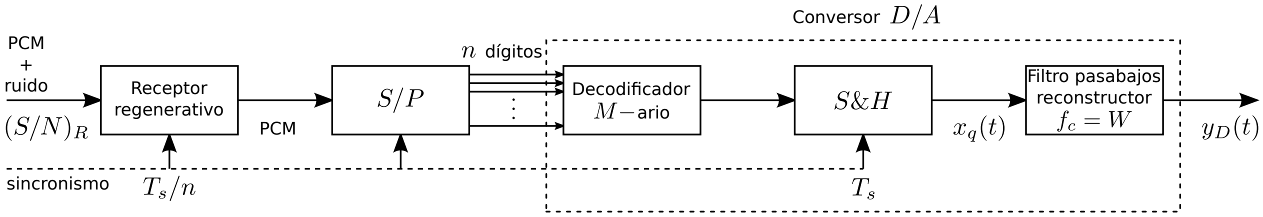
Solución

Pregunta

(a) Transmisor PCM:

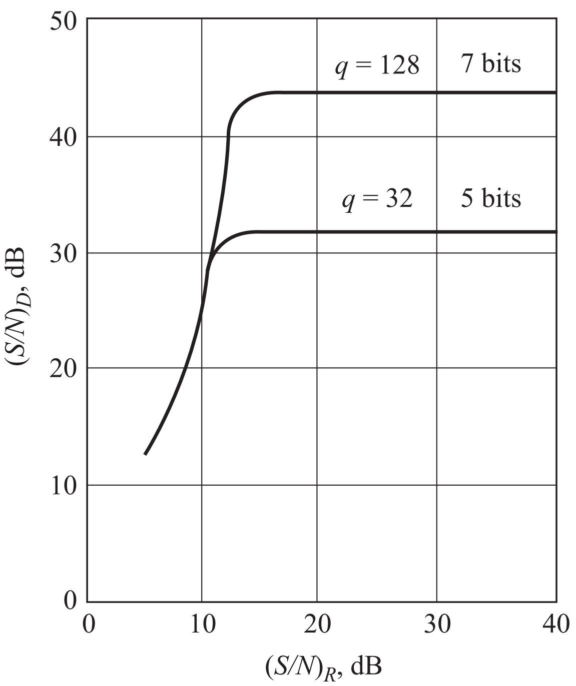


Receptor PCM:



Explicación de los bloques: ver teórico.

(b) En un sistema PCM deben evitarse los errores de decodificación, ya que alteran la amplitud de la señal en gran magnitud y si ocurren muy frecuentemente, deterioran tanto la forma de onda que el mensaje se hace irreconocible. Los sistemas de comunicación PCM se diseñan para operar en la región donde $P_e \ll 1/4q^2$, es decir, donde el ruido de decodificación es despreciable frente al ruido de cuantización. En la figura de la SNR_D en función de la SNR_R, es la región alrededor del punto de inflexión.



Problema 1

(a) El ancho de banda de la señal es $W_x = W/2$ y la potencia es $S_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = 1$

(b) Para que no se produzca ISI y el muestreo sea el adecuado, el ancho de banda de transmisión tiene que cumplir que

$$B_T \geq \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}nf_s \geq nW_x.$$

Con lo cual se tiene que

$$n \leq \frac{B_T}{W_x} = \frac{2B_T}{W} = \frac{2 \times 18}{10} = 3.6$$

por lo tanto

$$n_{max} = \left\lfloor \frac{2B_T}{W} \right\rfloor = 3$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa la función piso, cuya salida es el entero inmediatamente inferior al argumento.

(c)

$$\frac{2B_T}{n} \geq f_s \geq 2W_x \Longrightarrow 12\,kHz \geq f_s \geq 10\,kHz.$$

Se tienen una frecuencia de muestreo mínima de $f_s^{min} = 10\,kHz$

(d) La relación señal a ruido en un sistema PCM esta dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{S_x}{X_m^2}\left(\frac{3q^2}{1 + 4q^2 P_e}\right)\frac{f_s}{2W_x}.$$

Como se trabaja sobre el umbral de error, el ruido de cuantización predomina sobre el ruido de decodificación ($P_e \ll 1/4q^2$) resultando en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W_x},$$

Por lo tanto, la cantidad de niveles q del cuantizador para lograr cierto valor SNR_D es

$$q = \left\lceil \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D}{3S_x}\frac{2W_x}{f_s}} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{\frac{10^2 \times 10\,kHz}{3 \times 10\,kHz}} \right\rceil = 19$$

donde $\lceil \cdot \rceil$ representa la función techo, cuya salida es el entero inmediatamente superior al argumento. Luego se tiene que $M^n \geq q$ con lo cual resulta

$$M = \lceil \sqrt[n]{q} \rceil = 3$$

La cadencia de símbolos de la señal PCM es $r = nf_s = 30\,kbps$.

(e) Para no introducir más ruido de lo necesario y no generar ISI el ancho de banda del filtro de recepción debe ser $B_R = B_T$.

(f) $N_R = \int_{-B_R}^{B_R} \eta/2 df = \eta B_R = 0.018\,W$

(g) Para trabajar sobre el umbral de error se debe cumplir $SNR_R = \frac{S_T}{LN_R} \geq 6(M^2 - 1)$ por lo tanto

$$S_T^{min} = 6L\,N_R(M^2 - 1) = 6 \times 5 \times (0.018\,W) \times 8 = 4.32\,W$$

Problema 2

(a) La función de transferencia del sistema se obtiene aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ a la ecuación en recurrencia,

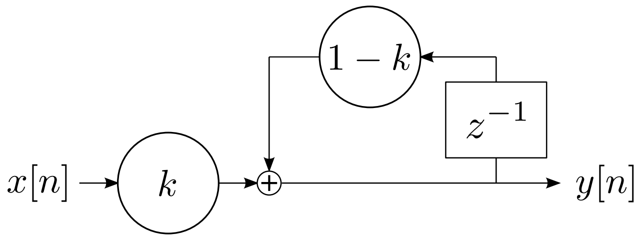
$$Y(z) - (1-k)z^{-1}Y(z) = kX(z)$$

y despejando $H(z) = Y(z)/X(z)$,

$$H(z) = \frac{k}{1-(1-k)z^{-1}}$$

El sistema tiene un polo en $z_p = 1-k$. Como el sistema es causal, la región de convergencia es $|z| > 1-k$.

(b) Diagrama de bloques del sistema



(c) Para que el filtro sea estable, la circunferencia unidad debe estar contenida en la ROC. Como además el sistema es estable, lo anterior implica que todos los polos deben estar contenidos dentro del círculo unidad. En este caso,

$$|z_p| = |1-k| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < 1-k < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 < -k < 0,$$

concluyendo que la condición de k para estabilidad del sistema es

$$0 < k < 2. \tag{1}$$

(d) La respuesta en frecuencia del sistema es

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\theta}\right) &= \frac{k}{1-(1-k)e^{-j\theta}} \\ &= \frac{k}{1-(1-k)\cos(-\theta) - j(1-k)\sin(-\theta)} \\ &= \frac{k}{1-(1-k)\cos(\theta) + j(1-k)\sin(\theta)} \end{aligned}$$

Tomando la magnitud al cuadrado, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|^2 &= \frac{k^2}{\left(1-(1-k)\cos(\theta)\right)^2 + (1-k)^2\sin^2(\theta)} \\ &= \frac{k^2}{1-2(1-k)\cos(\theta) + (1-k)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

(e) Se quiere encontrar k de forma que $\left|H\left(e^{j\pi/3}\right)\right|^2 = 1/3$. Para eso, se evalúa la ecuación 2 en $\theta = \pi/3$,

$$\left|H\left(e^{j\pi/3}\right)\right|^2 = \frac{k^2}{1-(1-k)+(1-k)^2} = \frac{1}{3}$$

Despejando, se llega a que k tiene que cumplir que

$$2k^2 + k - 1 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad k = -1$$

Para que el sistema sea estable, se tiene que cumplir la condición de la ecuación 1, y por lo tanto, se elige

$$k = \frac{1}{2}.$$

(f) Con el valor de k encontrado, la función de transferencia del sistema es

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

y aplicando la antitransformada $\mathcal{Z}$ se obtiene la respuesta al impulso,

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n]. \end{aligned}$$

(g) El sistema tiene un polo en $z_p = 1/2$ y un cero en $z_z = 0$. De esta forma, el sistema es un filtro pasabajos.