Matemática 1
Examen

CURE

13 de Agosto de 2021

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [30 pts.]

(a) [10 pts.] Discutir para que valores de $a \in R$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - sen(x) - ax^2}{x^3} = \frac{1}{3}$

(b) [10 pts.] Siendo f una función que satisface $|f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en 0. Fundamente su respuesta.

(c) [10 pts.] Dado g continua en $x = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(0) = 0$, $|f(x)| \leq |g(x)|$. Demostrar que f es continua en 0. Fundamente su respuesta.

Problema 2 [35 pts.]

(a) [15 pts.] Calcular la siguiente integral definida.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)^4.tg(x)}{1 - cos^2(x)} dx$$

(b) [5 pts.] Sea $f : f(x) = ln(x), \forall x \geq 1$ y la partición Q del intervalo $[1, n]$ dado por:

$$Q = \{1, 2, 3, ..., n-1, n\}, n \in \mathbb{N}^*$$

Calcular $\overline{S}(f, Q)$ y $\underline{S}(f, Q)$.

(c) [15 pts.] Calcular $\int_1^n f(x)dx$ y deduzca:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Sugerencia: $n! = n(n-1)!$

Problema 3 [35 pts.]

(a) [10 pts.] Una pelota se tira desde una altura de un metro y medio comienza a rebotar. Cada vez que rebota, la pelota alcanza los $3/5$ de la altura máxima que había alcanzado antes de la caída anterior. Calcular la distancia vertical recorrida por la pelota. Fundamente su respuesta.

(b) [25 pts.] Asisten n personas a un evento. El evento al principio esta vació(no hay personas), las personas van llegando de a una. Cada persona que llega saluda con el puño a las personas que ya están en el evento. ¿Cuántos saludos de puños se han efectuado en el evento al que asistieron n personas?.
Si al evento asisten 6 personas: ¿Cuántos saludos se dieron?
Ahora suponer que las personas se dan 2 saludos de puños, en vez de uno. ¿Cuántos saludos de puños se dieron en total en un evento al que asisten 5 personas? Fundamente su respuesta.

Solución

Problema 1

(a) Indeterminación $\frac{0}{0}$. Paso a hacer el desarrollo de Taylor entorno a cero de orden 3 de $sen(x)$ y $e^x - 1$

- $sen(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

- $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$

Entonces el limite queda :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - sen(x) - ax^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - x + \frac{x^3}{3!} - ax^2}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - ax^2}{x^3}$$

Aplico L'hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x - 2ax}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

si $a = \frac{1}{2}$

(b) Usando la definición de continuidad de una función:
f es cont. en $a \in \mathbb{R}$ si: $\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{R}$ si $|x - a| < \sigma \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$
Dem
Fijo un $\sigma > 0 \ / \ \forall \epsilon > 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}$,$|x - a| = |x - 0| = |x| < \sigma$ usando que a=0.
Usando que $|f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$, en $x = 0$ tenemos que $|f(0)| \leq 0$, por lo tanto $f(0) = 0$.
Como $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \sigma$, si tomo $\sigma = \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \epsilon \Rightarrow$ f es cont. en x=0.

(c) g continua en $x = 0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \quad \exists \sigma > 0$ tal que si $|x - 0| = |x| < \sigma \Rightarrow |g(x) - g(0)| = |g(x)| < \epsilon$ (1)
Como $|f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in (-\sigma, \sigma) \subset \mathbb{R}$ (2)
De (1) y (2) $|f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in (-\sigma, \sigma) \Rightarrow f$ continua en $x = 0$ (por definición de continuidad)

Problema 2

(a) $\int \frac{cos(x)^4.tg(x)}{1-cos^2(x)}dx = \int \frac{cos(x)^4.tg(x)}{sen^2(x)}dx = \int \frac{cos(x)^2}{tg(x)}dx$

Usando que $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ entonces, $\int \frac{1-sen(x)^2}{\frac{sen(x)}{cos(x)}}dx = \int \frac{cos(x)}{sen(x))}dx - \int sen(x)cos(x)dx$

Por lo tanto:

$$\int \frac{cos(x)^4.tg(x)}{1-cos^2(x)}dx = ln|sen(x)| - \frac{sen^2(x)}{2} + K$$

Luego es aplicar Barrow:

$$ln|sen(\frac{\pi}{2})| - \frac{sen^2(\frac{\pi}{2})}{2} - ln|sen(\frac{\pi}{6})| + \frac{sen^2(\frac{\pi}{6})}{2} = \frac{-1}{2} + ln(2) + \frac{1}{8}$$

(b) Ver anotaciones del práctico.

(c) Ver anotaciones del práctico.

Problema 3

(a) La pelota se tira de 1.5 m de altura y con cada rebote con el piso, disminuye en un 40 % si trayectoria vertical.

Primero a $1.5m$, con 1 rebote $1.5(\frac{3}{5})m$ pero el recorrido de este es el doble de la altura del rebote, con 2 rebotes $1.5(\frac{3}{5})^2m$ y así sucesivamente. Generalizando para n rebotes, el recorrido seria: $1.5 + 2\sum_{n\geq 0} 1.5(\frac{3}{5})^n = 1.5 + 3\sum_{n\geq 0}(\frac{3}{5})^n$.

La suma de esta serie representa la distancia recorrida por la pelota, luego de una sucesiva cantidad de rebotes.

Usando que la serie geométrica $\sum_{n\geq 0} r^n$ su suma converge a $\frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$. Como $|r| = |\frac{3}{5}| < 1$, entonces la serie converge a 2.5 y la distancia recorrida por la pelota es $(1.5 + 3 * 2.5)m = 9m$.

(b) Sea a_n el total de saludos de puños con n personas en el evento. Defino

$a_0 = 0$ no se realizaron saludos ya que no asistió nadie aun al evento.

$a_1 = 0$ la primer persona que llega no saluda a nadie dado que es la primera.

Dado una persona m con $m < n$ que asiste al evento, al momento que m entra al evento van a_{m-1} saludos en total y m además tiene que saludar a los que están en el evento, que son $m - 1$. Esto se puede generalizar y obtenemos una sucesión definida por recurrencia $a_n = a_{n-1} + (n - 1)$

Si $n = 6$ entonces $a_6 = 15$.

Si se dan 2 saludos, la dinámica del problema es la misma solo que hay 2 veces la cantidad de saludos. Resultado seria: $2a_5 = 30$