Matemática 1
Segundo Parcial

CURE

27 de Julio de 2021

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [25 pts.]

(a) Sean las funciones:

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \int\limits_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt$ y

$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \int\limits_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt$

1. Halle una expresión para $g(x)$ independiente del símbolo de integral.
2. Sabiendo que $\sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4} \quad \forall t \in [0, +\infty)$ sin hallar una expresión para $f(x)$ independiente del símbolo de integral, pruebe que $f(x) \leq \frac{5}{4} \quad \forall x \in [0, +\infty)$.
3. Sin hallar una expresión para $f(x)$ independiente del símbolo de integral, pruebe que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$ y que f es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.

(b) Dados los gráficos(Figura 1.1) de las funciones:

$$h : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = x\sqrt{2 - x^2}$$
$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } p(x) = x^3,$$

halle el área sombreada.

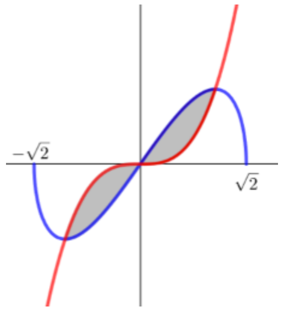

Figura 1.1

Problema 2 [20 pts.]

(a) Sea $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

- Demostrar que (a_n) está acotada superiormente por 2.
- Demostrar que (a_n) es monótona creciente.
- Demostrar que (a_n) converge y calcular su límite

(b) Estudiar la convergencia

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 - 7n + 1}{2^n + 9n^3 + 10}$$

Fundamente su respuesta.

Problema 3 [15 pts.]

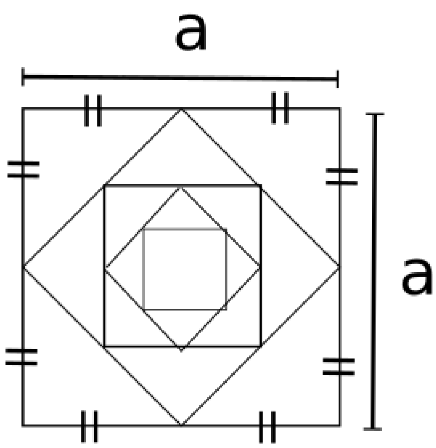

Figura 3.1

(a) Calcular la suma de las áreas de los cuadrados de la figura 3.1 sabiendo que la dimensión del cuadrado de mayor área es a^2. Fundamente su respuesta.

(b) Si $a = 1$ y existen infinitos cuadrados inscriptos de igual manera que la de la figura 3.1, ¿Cuál es la suma de esas infinitas áreas?. Fundamente su respuesta.

Solución

Problema 1

(a) **1-** Dado $g(x)=\int\limits_0^x \left(t+\frac{1}{4}\right)e^{-t}dt$ resuelvo por partes tomando, $f=t+\frac{1}{4}$ y $g'=e^{-t}$ entonces $g(x)=-e^{-x}(x+\frac{5}{4})+\frac{5}{4}$
2- Usando lo dado en la letra $\sqrt{t}\leq t+\frac{1}{4}\quad \forall t\in[0,+\infty)$(usando monotonía de la integral, Ver Teórico) puedo concluir que $g(x)\geq f(x)$. Por la **parte 1** tengo que $g(x)=-e^{-x}(x+\frac{5}{4})+\frac{5}{4}$, hago el $lim_x g(x)=\frac{5}{4}$.
Usando que $g(x)\geq f(x)$ y el calculo del limite anterior, entonces $f(x)\leq\frac{5}{4}$
3- Dado que $f(x)=\int\limits_0^x\sqrt{t}e^{-t}dt$ aplico la derivada de ambos lados de la igualdad, entonces $f'(x)=\sqrt{x}.e^{-x}=\frac{\sqrt{x}}{e^x}\geq 0\quad\forall x\in[0,+\infty)$ por lo que $f(x)$ es estrictamente creciente en $x\in[0,+\infty)$

(b) $h(x)=p(x)$ son los puntos donde la funciones h y p se cortan. $h(x)=p(x)$ en $x=1$ para $x\in[0,\sqrt{2}]$. Como ambas funciones son impares($h(-x)=-h(x)$) entonces, el área sombreada es: $2\int_0^1 h(x)-p(x)dx=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}$

Problema 2

(a) **1-** Por inducción completa:
Base inductiva: $a_0=0$
Hipotesis: $a_n\leq 2$; Tesis: $a_{n+1}\leq 2$
Como $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\Rightarrow a_{n+1}=\sqrt{2+2}\leq 2$
2- Probar que $a_{n+1}\geq a_n$ (monótona creciente)
$a_n\leq a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\Leftrightarrow a_n\leq 2$(demostrado en **parte 1**)
3- Como a_n es monótona creciente y esta acotado superiormente en 2, converge a 2 y el limite da 2.

(b) Ver Teórico.

Problema 3

(a) Reubicando los triángulos se puede ver que ocupan la mitad del área del cuadrado en el que estan. En el primer caso a^2, segundo caso $\frac{a^2}{2}$, tercer caso $\frac{a^2}{4}$. Generalizando: $\frac{a^2}{2^n}$.
Para calcular el área total: $\sum_{k=0}^4\frac{a^2}{2^n}=a^2(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16})$

(b) Si $a = 1$ y como son infintos cuadrados, entonces:
$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^2}{2^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n$, cara el calcular área total, uso que es una serie geométrica, $|r = \frac{1}{2}| \leq 1$ entonces converge a 2.