Modulación y Procesamiento de Señales
Segundo Parcial 2021

Tecnólogo en Telecomunicaciones - FING/CURE
Universidad de la República

julio 2021

Indicaciones:

- La prueba es de carácter individual.
- La prueba debe entregarse antes del domingo 18 de julio de 2021 a las 8:00 am (hora del servidor), en un único archivo en formato PDF.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Puede utilizarse todo el material del curso, incluyendo ejemplos de práctico, siempre y cuando se especifique su procedencia (además de justificar su validez o aplicabilidad).
- La prueba suma un total de 70 puntos, los que se desglosan aquí a modo ilustrativo pero incluyen tanto el desarrollo escrito como la presentación oral de los resultados. Sin embargo el resultado final de la prueba se topeará en 60 puntos. Esto quiere decir que aún no realizando la completitud de las partes, puede lograrse el puntaje máximo.

Problema 1 [35 pts.]

Advertencia: Los datos de este problema carecen de rigurosidad científica, se trata de burdas estimaciones realizadas por los docentes del curso. No deben ser referencia para surfistas ni pescadores.

Bethania decidió poner a prueba sus conocimientos de Modulación y Procesamiento de Señales y se propuso armar una boya automática para medir el nivel del mar en la zona de Playa Grande, Santa Teresa.
Lo primero que hizo fue tratar de conocer el espectro de la señal que quería medir (el nivel del mar). Entonces, asumiendo que se trataba de un proceso ergódico y estacionario, le pidió a los hermanos Otero que se turnaran para medir manualmente el nivel del mar durante un mes lunar; Esteban lo midió las semanas 1 y 3 mientras que Manuel lo midió las semanas 2 y 4. La tabla 1 muestra las medidas que realizaron los hermanos Otero.
Al finalizar el mes, Bethania observa los datos obtenidos y enseguida se da cuenta que Manuel y Esteban no estaban midiendo el nivel del mar de la misma manera y que por ende los datos obtenidos no le servían.

día	Medida de Esteban Otero	día	Medida de Manuel Otero	día	Medida de Esteban Otero	día	Medida de Manuel Otero
1	1.7360	8	3.8932	15	2.0657	22	3.2728
2	2.0316	9	3.8884	16	1.8191	23	5.0903
3	1.7965	10	5.4518	17	2.2706	24	4.1556
4	1.7233	11	3.4059	18	1.9233	25	3.0526
5	1.9783	12	2.8892	19	1.9988	26	5.7164
6	1.8202	13	5.5652	20	2.1421	27	3.3820
7	2.1301	14	6.4853	21	1.9771	28	5.0627

Cuadro 1: Datos del nivel del mar medidos por Esteban y Manuel Otero.

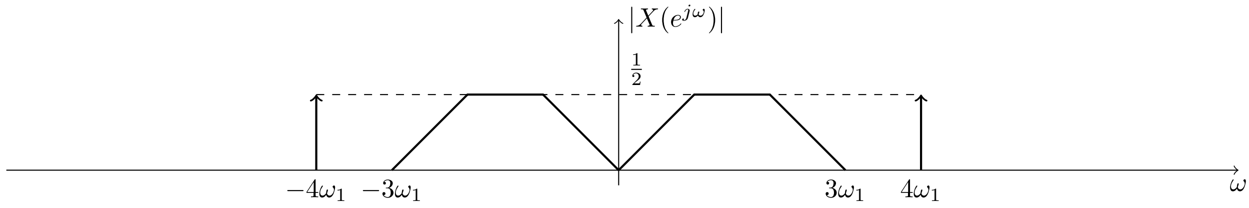


Figura 1: Espectro obtenido por Bethania muestreando a frecuencia $f_s = 0.5\ Hz$.

(a) [5 pts.] Explique por qué, mirando el cuadro 1, se puede deducir que, o bien el proceso no puede modelarse como ergódico y estacionario, o bien los datos obtenidos por Manuel y Esteban provienen, muy probablemente, de formas distintas de medición[1].

Sugerencia: puede ser útil realizar un gráfico de los datos en función del tiempo y analizar cualitativamente el comportamiento semana a semana para luego vincularlo con los temas del curso.

Bethania piensa que quienes mejor conocen la marea son los pescadores, con lo cual le consulta a su amigo Raúl, pescador artesanal de Punta del Diablo, sobre cuál es el espectro de la señal. Raúl le asegura que el espectro de la marea (asumiéndola a partir de ahora como señal determinística) es[2]

$$X_1(f) = \Lambda\left(\frac{f+2f_1}{f_1}\right) + \Lambda\left(\frac{f+f_1}{f_1}\right) + \Lambda\left(\frac{f-f_1}{f_1}\right) + \Lambda\left(\frac{f-2f_1}{f_1}\right) \tag{1}$$

con $f_1 = 6 \times 10^{-3}\ Hz$.

(b) [4 pts.] Siendo $x_1(t)$ el nivel del mar, bosqueje su espectro, $X_1(f)$, dado por Raúl.

(c) [3 pts.] ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo (f_{min}) que debe utilizarse para poder reconstruir la señal a partir de sus muestras?

Bethania decide muestrear a una frecuencia $f_s = 0.5\ Hz$.

(d) [5 pts.] Bosqueje el espectro ($X_1(e^{j\omega})$) de la señal muestreada que espera obtener.

Nota: Puede que el eje horizontal resulte difícil dibujarlo a escala, no será un requerimiento. Lo importante es realizar un bosquejo cualitativo y colocar correctamente las ordenadas y abscisas de interés.

Después de un tiempo obtiene un espectro como el de la figura 1.
Sorprendida por las dos deltas que aparecen en el espectro, consulta a su amiga Rebecca, surfista, que le dice que esas deltas son las olas, pero que por la baja frecuencia a la que aparecen, sospecha que hubo aliasing.

A partir de ahora asuma que la señal $x(t)$, muestreada por Bethania, es la suma de dos componentes, $x_1(t)$ correspondiente a la marea (cuyo espectro fue dado en la ecuación 1) y $x_2(t)$ correspondiente a las olas. Es decir, $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

(e) [6 pts.] Asumiendo que, efectivamente, hubo aliasing, calcule cuál era la frecuencia original a la que se producen las olas. Si encuentra varios resultados posibles, quédese con el que le parezca más razonable.

Sugerencia: Dado que el espectro de las olas son dos deltas, la señal puede modelarse como $x_2(t) = \alpha cos(\Omega_l t)$. Además puede analizarse sólamente $x_2(t)$, dejando de lado, sólo para esta parte, la señal $x_1(t)$. Lo que se pide, entonces, es calcular la frecuencia $\Omega_l = 2\pi f_l$ original.

Si bien se sabe que hubo aliasing, Bethania decide mantener la frecuencia de muestreo elegida ($f_s = 0.5\ Hz$). Pero decide aprovechar su sistema para conocer, además de la marea, la intensidad de las olas, ya que es de interés para Rebecca y sus amigas.

[1] Se adjunta un archivo .csv por si le es útil importarlo en algún programa de cálculo.

[2] Tenga en cuenta que la marea tiene períodos de subida y bajada del orden de días (decenas de miles de segundos) lo que implica frecuencias extremadamente bajas (millonésima de hercios), por lo que no debe extrañarse que las frecuencias involucradas sean de este orden de magnitud.

(f) [4 pts.] Diseñe un sistema de filtros[3] (representado en un diagrama de bloques) que permita obtener $x_1[n] = x_1(nT_s)$ y $x_2[n] = x_2(nT_s)$ por separado, a partir de la señal $x[n]$ cuyo espectro se muestra en la figura 1 (siendo $T_s = \frac{1}{f_s}$).

Bethania decide enviar la señal $x_1[n]$ por un canal de radiofrecuencia, pero se da cuenta que no tiene sentido enviar tantas muestras, entonces decide utilizar, ahora sí, la mínima frecuencia de muestreo posible (f_{min}), hallada en la parte (c).

(g) [3 pts.] Diseñe un sistema (representado en un diagrama de bloques) que permita variar la frecuencia de muestreo de la forma deseada.

(h) [5 pts.] Bosqueje la señal en los puntos intermedios indicando ordenadas y abscisas de interés.

Nota: Puede que el eje horizontal resulte difícil dibujarlo a escala y en detalle, no será un requerimiento (puede usar puntos suspensivos u otros indicativos que faciliten el bosquejo sin descuidar la claridad de la respuesta). Lo importante es realizar un bosquejo cualitativo y colocar correctamente las ordenadas y abscisas de interés.

Problema 2 [35 pts.]

Observación: Los datos de este problema, en su mayoría, fueron tomados de la publicación del Proyecto de Fin de Carrera *Pestibee* realizada por estudiantes de Facultad de Ingeniería en 2015.

Las abejas recorren un radio de hasta 3 kilómetros en busca de alimento y su comportamiento (y estado de salud) puede sufrir modificaciones en función de la contaminación a la que se someten (en particular producto de agrotóxicos). Esto las convierte en un potencial indicador biológico. Hay estudios que analizan la posibilidad de conocer la contaminación de los campos a partir del sonido del aleteo de las abejas en una colmena. En particular se analiza la especie *Apis Mellifera*, que habita en colonias de entre 15.000 y 50.000 individuos, los que zumbando en simultáneo podrían producir un patrón medio de sonido que contiene información acerca de la actividad que desarrolla la colmena y su estado de salud.
Camila, apicultora, se propone estudiar este fenómeno, pero como sus colmenas están en lugares poco accesibles (campo adentro), quiere contruir un sistema de comunicación que envíe el sonido de una colmena hasta su casa. No sabe cómo hacerlo y ud debe asesorarla.
Camila leyó varias publicaciones y aporta los siguientes datos:

- El sistema a utilizar será PCM binario.
- Se desean utilizar **al menos** 2000 niveles de cuantización.
- La densidad espectral de potencia del sonido emitido por las abejas, en condiciones normales, es aproximadamente $G_x(f) = \frac{1}{1000}\Lambda\left(\frac{f}{f_0}\right)$ con $f_0 = 700\ Hz$.
- La señal a muestrear se asumirá normalizada, es decir $|x(t)| < 1$ y, consecuentemente, el fondo de escala del conversor analógico a digital es $X_m = 1$.
- Los bits se transmitirán con amplitudes moduladoras $-A/2$ y $A/2$ para 0 y 1 respectivamente y se asumirán equiprobables.
- La señal PAM utilizará un pulso conformador $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ con τ un parámetro a determinar.
- El canal se modelará como lineal, ancho de banda B_T a determinar, e introduce ruido blanco gaussiano con densidad espectral de potencia $\eta/2$ constante, con $\eta = 1\ \mu W/Hz$.

(a) [2 pts.] ¿Cuál es la mínima cantidad de bits (n) necesaria para codificar la cantidad deseada de niveles de cuantización?

(b) [2 pts.] Utilizando esa cantidad n de bits hallada en la parte anterior, ¿cuál es la máxima cantidad (q) de niveles posibles para el cuantizador?

[3] No se pide decir cómo se hacen esos filtros, simplemente decir qué filtros son, cuáles son sus frecuencias y ganancias características, y mostrar como se interconectarían.

A partir de ahora se utilizarán los valores de n y q hallados en las partes anteriores.

(c) [3 pts.] Proponga un valor de probabilidad de error P_e para que el ruido de decodificación sea despreciable frente al ruido de cuantización.

Utilice de aquí en adelante este valor de P_e.

(d) [3 pts.] Calcule la potencia (S_x) de la señal $x(t)$ producida por las abejas.

(e) [4 pts.] Proponga una frecuencia de muestreo f_s y una frecuencia de corte W del filtro de entrada que permita lograr una relación señal a ruido de al menos 72 dB en el destino.

(f) [2 pts.] Cuál es la tasa de símbolos o bits por segundo (r) a transmitir.

(g) [2 pts.] Calcule el valor del parámetro τ.

(h) [2 pts.] Bosqueje la señal PAM cuando se envía la secuencia `0010`.

(i) [1 pts.] ¿Cuál es el umbral de decisión óptimo a utilizar?

A partir de ahora asuma que se utiliza este umbral óptimo de decisión.

(j) [3 pts.] Utilizando el valor de P_e hallado anteriormente, calcule la relación señal a ruido en recepción ($\mathrm{SNR_R}$) de la señal PAM.

(k) [3 pts.] Calcule y bosqueje la densidad espectral de potencia de la señal PAM a transmitir.

(l) [2 pts.] Determine el ancho de banda mínimo de transmisión B_T (proponga un criterio que le parezca razonable) y calcule la potencia N_R del ruido luego del filtro pasabajos de recepción (asumiendo $B_R = B_T$).

(m) [3 pts.] Calcule la amplitud A necesaria para lograr la $\mathrm{SNR_R}$ deseada.

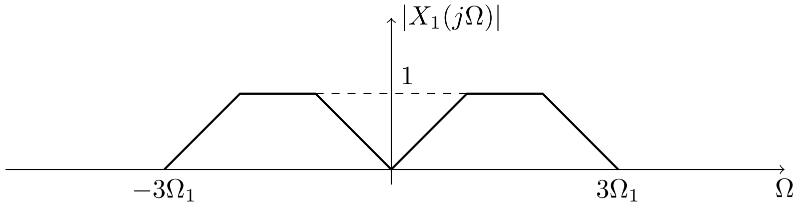
(n) [3 pts.] Realice un diagrama de bloques de todo el sistema, desde el micrófono en la colmena hasta el parlante en su casa, indicando los parámetros relevantes de cada uno de ellos.

Solución

Problema 1

(a) Si el proceso es ergódico, los momentos estadísticos coinciden con los momentos temporales. Por otra parte si el proceso es estacionario, los momentos estadísticos se mantienen en el tiempo. En el ejemplo de la tabla se puede ver que la media y la varianza son bien diferentes semana a semana, según haya medido Manuel o haya medido Esteban.
En las semanas 1 y 3, la media es cercana a 2 y la varianza del orden de 0,03; mientras que en las semanas 2 y 4 la media es cercana a 4 y la varianza del orden de 1,3. Claro esta, sería una opción que *justo* la dinámica de la marea haya cambiado esas semanas por su naturaleza misma.

(b) El espectro es:

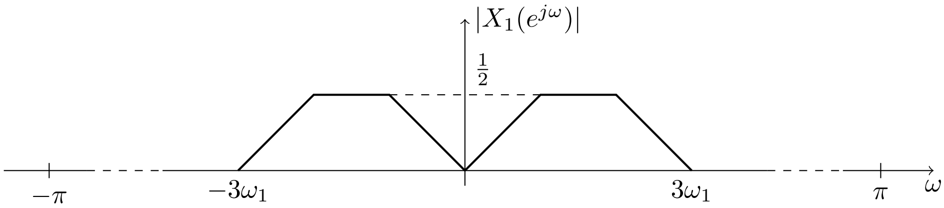


donde $\Omega_1 = 2\pi f_1$.

(c) $f_{min} = 6f_1 = 36\ mHz$

(d)

$$X_1(e^{j\omega}) = X_{s1}(j\Omega)|_{\Omega=\omega f_s} = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1(j(\omega f_s - 2k\pi f_s)) \tag{2}$$



donde $\omega_1 = \frac{\Omega_1}{f_s} = 2\pi\frac{f_1}{f_s} = \frac{3\pi}{125} \approx 75 \times 10^{-3}$ rad/muestra.

(e) Si $x_2(t) = \alpha cos(\Omega_l t)$ su espectro es $X_2(j\Omega) = \pi\left[\delta(\Omega + \Omega_l) + \delta(\Omega - \Omega_l)\right]$. Lo que se obtuvo fue

$$X_2(e^{j\omega}) = X_{s2}(j\Omega)|_{\Omega=\omega f_s} = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_2(j(\omega f_s - 2k\pi f_s)) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(j(\omega f_s - 2k\pi f_s \pm \Omega_l)) \tag{3}$$

Entonces lo que hay que resolver es

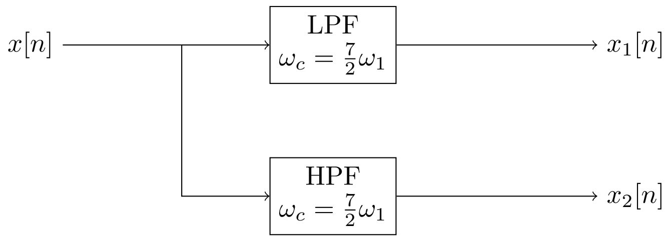
$$\Omega_l = \pm(2k\pi - \omega_l)f_s \tag{4}$$

con $\omega_l = 4\omega_1$.
Lo que se hace es probar con distintos valores de k y buscar un valor para la frecuencia de las olas que sea razonable:

k	$\frac{(2k\pi-\omega_l)f_s}{2\pi}$	$-\frac{(2k\pi-\omega_l)f_s}{2\pi}$
-5	-2.5239	2.5239
-4	-2.0239	2.0239
-3	-1.5239	1.5239
-2	-1.0239	1.0239
-1	-0.5239	0.5239
0	-0.0239	0.0239
1	0.4761	-0.4761
2	0.9761	-0.9761
3	1.4761	-1.4761
4	1.9761	-1.9761
5	2.4761	-2.4761

Una opción sería $k = -1$ lo que implica olas cada 2 segundos.

(f)



En lugar del filtro pasa-altos se podría haber considerado un filtro pasabanda.

(g) La frecuencia de muestreo fue $f_s = 0,5\ Hz$ mientras que la nueva frecuencia de muestreo será $f_{min} = 0,036\ Hz$:

$$\frac{L}{M} = \frac{f_{min}}{f_s} = \frac{36}{500} = \frac{9}{125} \qquad (5)$$

por lo tanto se precisará un interpolador de $L = 9$ y un decimador de $M = 125$.

(h)

Problema 2

(a)

$$2^n \geq q \geq 2000 \Longrightarrow n > \log_2(2000) = 10,97 \Longrightarrow n = 11$$

(b)

$$q_{max} = 2^n = 2048$$

(c)

$$P_e << \frac{1}{4q^2} = 5,96 \times 10^{-8}$$

Elijo $P_e = 1 \times 10^{-9}$ (podría haber elegido otro valor, pero esta solución se hará considerando ese valor arbitrario).

(d) La potencia de $x(t)$ es la integral de su densidad espectral de potencia, por lo tanto

$$S_x = \frac{700}{1000} = 0,7\ W$$

(e)

$$3q^2 \frac{S_x}{X_m} \frac{f_s}{2W} > 10^{7,2} \Longrightarrow \frac{f_s}{W} > 1,8$$

Si $W = 1\ kHz$ entonces $f_s = 2\ kHz$ cumple con los requerimientos (de nuevo, se podrían haber elegido otros valores que cumplan tanto la condición antes mencionada como la impuesta por el teorema del muestreo; en esta solución se utilizarán los valores elegidos).

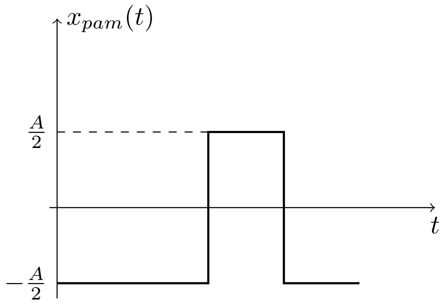
(f)

$$r = nf_s = 22\ kbps$$

(utilizando el valor de f_s elegido anteriormente).

(g)

$$\tau = D = \frac{1}{r} \approx 45\ \mu s$$



(h)

(i) El umbral óptimo es cero debido a que los símbolos son equiprobables y la señalización es polar.

(j)

$$P_e = Q(\sqrt{\mathrm{SNR_R}}) = 1^{-9} \Longrightarrow \sqrt{\mathrm{SNR_R}} \approx 6 \Longrightarrow \mathrm{SNR_R} \approx 36 \tag{6}$$

(k)

(l) A partir del gráfico de la PAM, tomando por ejemplo el primer cruce por cero, se tiene $B_T = r$ (también podría tomarse el segundo cruce por cero u otro criterio a elección).

$$N_R = \eta B_T = 22\ mW$$

(m)

$$\mathrm{SNR_R} = \frac{A^2}{4N_R} \Longrightarrow A = \sqrt{4N_R \mathrm{SNR_R}} \approx 3,2$$

(n) Ver teórico (la pregunta es abierta y por ende también su respuesta, más que la completitud es importante que exista coherencia entre los bloques y que se justifique y se comprenda la necesidad de cada uno de ellos).