Integración de Funciones Racionales
Método de descomposición en fracciones simples

El objetivo es calcular integrales de la forma $\int_a^b \frac{P(x)}{D(x)} dx$ con P(x) y D(x) polinomios de coeficientes reales y $f: f(x)=\frac{P(x)}{D(x)}\, continua\, en [a,b]$. Al igual que los otros métodos, no sólo es una técnica para realizar el cálculo, sino que además permite encontrar primitivas de estas funciones en los intervalos en los que D no tiene raíces.

1) <u>Caso particular</u> P(x)=D'(x)

Si queremos calcular la primitiva de $f: f(x)=\frac{D'(x)}{D(x)}$ la misma es inmediata ya que

$$\int \frac{D'(x)}{D(x)} dx = ln|D(x)|+k$$

2) $grado(P) \geq grado(D)$

En este caso realizamos la división de P(x) entre D(x), obteniendo un cociente Q(x) y un resto R(x) con grado(R)<grado(D), por definición de división: P(x)=Q(x)D(x)+R(x)

Dividiendo ambos miembros entre D(x) (recordar que $f: f(x)=\frac{P(x)}{D(x)}$ es continua por tanto D no tiene raíces en el intervalos considerado) : $\frac{P(x)}{D(x)}=\frac{Q(x)D(x)+R(x)}{D(x)}$

Integrando ambos miembros $\int \frac{P(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} dx$

De donde $\int \frac{P(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$

El primer término $\int Q(x) dx$ no ofrece dificultad ya que Q es una función polinómica, por lo que nos concentraremos en resolver $\int \frac{R(x)}{D(x)} dx$ en el próximo caso.

3) $grado(P) < grado(D)$

La idea será descomponer $\frac{R(x)}{D(x)}$ en una suma de términos que podamos integrar, llamadas fracciones simples. (Teorema: Toda fracción racional puede ser expresada como suma de fracciones simples)

Las fracciones simples son expresiones con esta forma: $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$; $\frac{Bx+C}{[(x-p)^2+q^2]^k}$ donde los denominadores que aparecen son los factores de D(x). Los factores $(x-\alpha)^r$ aparecen si D(x) tiene una raíz real α. Mientras que los factores $[(x-p)^2+q^2]^k$ aparecen si D(x) tiene raíces complejas $x=p \pm qi$.

Cuando D(x) tiene una raíz α con multiplicidad k, aparecen k factores: $(x-\alpha)^i$ con i=1,2,…,k.

Según la descomposición factorial de D(x) distinguiremos cuatro casos.

i) D(x) tiene todas sus raíces reales y distintas.

Por el teorema de descomposición factorial: $\frac{P(x)}{D(x)}=\frac{P(x)}{a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}$

Por lo tanto descompondremos en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{D(x)}=\frac{P(x)}{a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}=\frac{A}{(x-\alpha_1)}+\frac{B}{(x-\alpha_2)}+\cdots+\frac{N}{(x-\alpha_n)}$$

Entonces por último resolveremos:

$$\int\frac{P(x)}{D(x)}dx=\int\left(\frac{A}{(x-\alpha_1)}+\frac{B}{(x-\alpha_2)}+\cdots+\frac{N}{(x-\alpha_n)}\right)dx$$

Hemos descompuesto la integral de un cociente de dos funciones polinómicas, que no sabíamos resolver, en la integral de una suma de fracciones simples que son de inmediata resolución.
Todo se reduce a hallar los números A, B, …, N

ii) D(x) tiene raíces reales múltiples.

$$D(x)=a_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_j)^{m_j}$$

Calculamos de la siguiente forma:

$$\int\frac{P(x)}{D(x)}dx=\int\left(\frac{A}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{B}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}}+\cdots+\frac{K}{(x-\alpha_1)}+\cdots+\frac{L}{(x-\alpha_2)^{m_2}}+\frac{M}{(x-\alpha_2)^{m_2-1}}+\cdots+\frac{P}{(x-\alpha_2)}+\cdots\right)dx$$

iii) D(x) tiene algunas o todas sus raíces complejas simples.

Por ejemplo sea $D(x)=a_n(x-\alpha_1)^m(x-\alpha_2)(x^2+bx+c)$. En este caso D(x) tiene dos raíces reales α_1 (con multiplicidad m) y α_2 (simple), y dos raíces complejas (p+iq) y (p-iq).
Antes que nada x^2+bx+c lo podemos escribir de la forma $(x-p)^2+q^2$.

$$\frac{P(x)}{D(x)}=\frac{A}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{B}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}}+\cdots+\frac{K}{(x-\alpha_1)}+\frac{L}{(x-\alpha_2)}+\frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}$$

Entonces $\displaystyle\int\frac{P(x)}{D(x)}dx=\int\left(\frac{A}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{B}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}}+\cdots+\frac{K}{(x-\alpha_1)}+\frac{L}{(x-\alpha_2)}+\frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}\right)dx$

De donde

$$\int\frac{P(x)}{D(x)}dx=\int\frac{A}{(x-\alpha_1)^{m_1}}dx+\int\frac{B}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}}dx+\cdots+\int\frac{K}{(x-\alpha_1)}dx+\int\frac{L}{(x-\alpha_2)}dx+\int\frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}dx$$

Todos los términos, excepto el último, no ofrecen dificultad para su cálculo.
Veamos cómo se calcula $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}dx$

$$\int\frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}dx=\int\frac{M(x+N/M)}{(x-p)^2+q^2}dx=M\int\frac{x+N/M-p+p}{(x-p)^2+q^2}dx=M\int\frac{x-p}{(x-p)^2+q^2}dx+M\int\frac{N/M+p}{(x-p)^2+q^2}dx$$

La primer integral $\displaystyle M\int\frac{x-p}{(x-p)^2+q^2}dx$ no ofrece dificultad, corresponde al caso particular visto al principio. Se resuelve haciendo el cambio de variable $u=(x-p)^2+q^2$.

De donde $M\int \frac{x-p}{(x-p)^2+q^2}dx=\frac{M}{2}ln((x-p)^2-q^2)$

En la segunda $M\int \frac{N/M+p}{(x-p)^2+q^2}dx$, buscando que resulte una expresión de la forma $\frac{1}{x^2+1}$ (que sabemos integrar), primero realizamos el cambio de variable $u=x-p$ y luego sacamos q^2 de factor común en el denominador.

$$M\left(\frac{N}{M}+p\right)\int \frac{dx}{(x-p)^2+q^2} \overset{(1)}{=} (N+Mp)\int \frac{du}{u^2+q^2} \overset{(2)}{=} (N+Mp)\int \frac{du}{q^2\left(\left(\frac{u}{q}\right)^2+1\right)} \overset{(3)}{=} \frac{N+Mp}{q}\int \frac{dz}{z^2+1} \overset{(4)}{=} \frac{N+Mp}{q}arctan\left(\frac{x-p}{q}\right)$$

(1) cambio de variable u=x-p
(2) sacamos factor común q^2 en el denominadores
(3) cambio de variable z=u/q
(4) Deshaciendo los dos cambios de variable.

Finalmente $\int \frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}dx=\frac{M}{2}ln((x-p)^2-q^2)+\frac{N+Mp}{q}arctan\left(\frac{x-p}{q}\right)$

iv) D(x) tiene algunas raíces complejas múltiples (no se trabajará en este curso)