UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones -Ejemplos de Problemas Mixtos Lineales y Enteros

Víctor Viana

victor.viana@cut.edu.uy

9/5/2024

El problema del transporte

- Un cierto producto debe enviarse en determinadas cantidades $u_1, \ldots, u_m$, desde cada uno de **m** orígenes, y recibirse en cantidades $v_1, \ldots, v_n$, en cada uno de **n** destinos.
- El problema consiste en determinar las cantidades x_{ij}, que deben enviarse desde el origen i al destino j, para conseguir minimizar el costo del envío.

El problema del transporte (Datos)

- m: el numero de orígenes
- n: el numero de destinos
- u_i : la cantidad que debe enviarse desde el origen i
- v_j : la cantidad que debe ser recibida en el destino j
- c_{ij} : el costo de envío de una unidad de producto desde el origen i al destino j

El problema del transporte (Variables)

- x_{ij}: la cantidad que se envía desde el origen i al destino j.
- Se supone que las variables deben ser no negativas: $xij \geqslant 0$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$

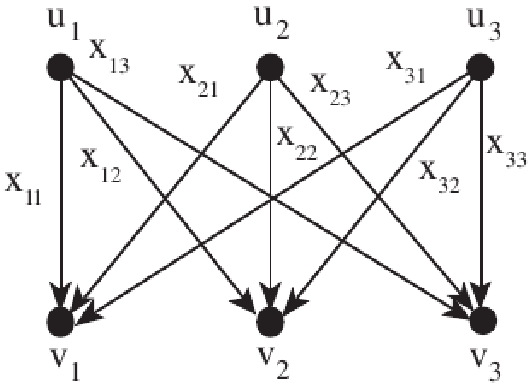
El problema del transporte (Restricciones)

Las restricciones de este problema son:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = u_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = v_i$$

- El primer conjunto de condiciones indica que la cantidad del producto que parte del origen i debe coincidir con la suma de las cantidades que parten de ese origen hasta los distintos destinos $j = 1, ..., n$
- El segundo conjunto de condiciones asegura que el total recibido en el destino j debe corresponder a la suma de todas las cantidades que llegan a ese destino y parten de los distintos orígenes $i = 1, ..., m$.


u_1
u_2
u_3
x_{13}
x_{21}
x_{23}
x_{31}
x_{22}
x_{33}
x_{12}
x_{32}
x_{11}
v_1
v_2
v_3

El problema del transporte (Objetivo)

En el problema del transporte nos interesa normalmente minimizar los costos de envío (suma de los costos de envío por unidad de producto multiplicado por las cantidades enviadas); es decir, se debe minimizar:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Ejemplo: determinación de turnos

- Una empresa tiene que determinar el personal necesario para cubrir turnos de servicio semanales.
- Para cada día de la semana,$i = 1, ..., 7$, se requiere que cierta cantidad de de funcionarios esté de turno prestando servicio.
- Cada funcionario trabaja 5 días seguidos.
- El objetivo es determinar la cantidad mínima de funcionarios que se necesitan.

¿Cómo modelar las decisiones?

- Una alternativa es decidir la cantidad de funcionarios que trabajan en cada día.
- ¿Cómo modelar que cada funcionario trabaje 5 días seguidos?
- Otra opción es decidir la cantidad de funcionarios que comienzan a trabajar en cada día; es decir, el comienzo del turno.
- Un funcionario que comienza su turno el día 4 trabajará los días 4, 5, 6, 7, y 1
- Entonces, sea x_i la cantidad de funcionarios que comienzan en turno en el día i.

La cantidad de funcionarios que se necesitan para el primer día (la suma de los funcionarios que comienzan a trabajar en los turnos 1, 4, 5, 6, 7) debe cubrir la demanda d_1 :

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant d_1$$

En forma similar se debe cubrir la demanda de los días 2, 3, 4, 5, 6, 7:

$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant d_2$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geqslant d_3$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geqslant d_4$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant d_5$

$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqslant d_6$

$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant d_7$

Determinación de turnos(cont.)

La función objetivo junto a la formulación completa es:

min $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

s.a.

$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant d_2$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geqslant d_3$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geqslant d_4$

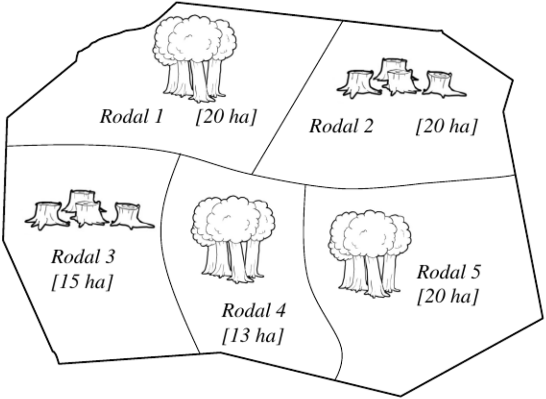
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant d_5$

$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqslant d_6$

$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant d_7$

$x_i \geqslant 0$, entera, $i = 1, ..., 7$.

Problema de Adyacencia en Cosecha Forestal



- I = Conjunto de unidades de manejo del predio.
- T = Conjunto de períodos de tiempo en el horizonte de planificación.
- N_i = Conjunto de unidades de cosecha j adyacente a la unidad i.
- V_{it} = Volumen de madera al cosechar el rodal i en el período t
- B_{it} = Beneficio de cosechar el rodal i en el período t; .
- L_t = Límite inferior de volumen a ser cosechado en el período t.
- U_t = Límite superior de volumen a ser cosechado en el período t.
- M_i = Edad de maduración económica o tecnológica del rodal i.
- a_{it} = Edad promedio de los árboles en el bloque i y en el período t.

Variable de decisión

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{Si la unidad i es cosechada en el período t} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo

$$\text{máx}\, z = \sum_{i \in I,} \sum_{t \in T} \beta_{it} \times x_{it}$$

Restricciones

$$
\begin{array}{ll}
x_{it} + x_{ij} \leq 1 & i \in I, t \in T, j \in N_i, \\
\sum_{t \in T} x_{it} \leq 1 & i \in I, \\
\sum_{i \in I} v_{it} \times x_{it} \geq L_t & t \in T, \\
\sum_{i \in I} v_{it} \times x_{it} \leq U_t & t \in T, \\
M_i \times x_{it} \leq a_{it} & i \in I, t \in T \\
x_{it} \in \{0, 1\} & i \in I, t \in T,
\end{array}
$$

Referencias

D. Broz and G. Durand and M. Frutos, *Gestión forestal con restricción de adyacencia basada en programación matemática: efecto de la relajación*, Universidad Nacional de Misiones. Facultad de Ciencias Forestales, Revista Forestal Yvyraretá; 20, 8-2014, pp. 1-8