Matemática 1

Práctico 8

CURE

2021

Ejercicio 1.
Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$

a) Calcular $\underline{S}(f,P)$ y $\overline{S}(f,P)$ con $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ una partición del intervalo $[0,1]$

b) Considere una partición genérica

$$P = \{0 = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = 1\}$$

para probar que cualquiera sea la partición P de $[0,1]$ se cumple

$$\underline{S}(f,P) < \tfrac{1}{2} < \overline{S}(f,P)$$

¿Qué interpretación geométrica tiene este resultado?

Ejercicio 2.
Sea la función $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$

a) Calcular $\underline{S}(f,P)$, $\quad \overline{S}(f,P)$, $\quad \underline{S}(f,Q)$, $\quad \overline{S}(f,Q)$, siendo $P = \{0,4,6\}$ y $Q = \left\{0, \frac{3}{2}, 3, 6\right\}$

b) Determine dos particiones P_1 y P_2 del intervalo $[0, 6]$ que verifiquen $\underline{S}(f, P) < \underline{S}(f, P_1)$ y $\overline{S}(f, P_2) < \overline{S}(f, Q)$

c) Determine todas las particiones H del intervalo $[0, 6]$ que tienen cuatro puntos, que contienen a P y que verifican $\underline{S}(f, H) = \frac{21}{2}$.

d) Entre todas las particiones M del intervalo $[0, 6]$ que tienen cuatro puntos y que continen a P, determine aquella para la cual $\overline{S}(f, M)$ es mínima

Ejercicio 3.

Considere la función $f : f(x) = Lx$, $(x > 0)$ y la partición P del intervalo $[1, n]$ dada por:

$$P = \{1, 2, 3, \cdots n-1, n\} \qquad n \in \mathbb{N},\ n > 1.$$

a) Obtenga $\underline{S}(f, P)$ y $\overline{S}(f, P)$.

b) Calcule $\int_1^n f$, y deduzca que:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad n \in \mathbb{N}, n > 1$$

c) Calcule: $\lim\limits_{\to +\infty} \frac{e}{n}\sqrt[n]{n!}$

(Se sugiere usar la parte anterior y tener en cuenta que $\lim\limits_{\to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

Ejercicio 4.

Sean las funciones f, g y h tales que

$f(x) = e^x(x^4 - 12x^2) \qquad g(x) = \int_1^x f(t)dt \qquad h(x) = e^x(x^4 - 4x^3)$

a) Demuestre que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

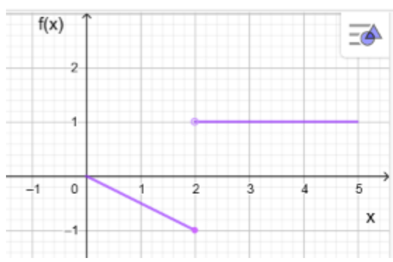
$g(x) = h(x) + k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

b) Encuentre el valor de k.

c) Calcule $\int_1^3 f(t)dt$

Ejercicio 5.

Sea $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ la función dada por el siguiente gráfico



Se define la función $F : [0,5] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Graficar F.

Ejercicio 6.

Sea f la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{x(x+(Lx)^2)} \qquad (x > 0).$$

Encuentre una primitiva F de f tal que $F(1) = 0$

Ejercicio 7.

a) Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ se considera

$$\int_0^x \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) - 5\sin(t) + 6} dt$$

Calcular la integral.

b) Calcular el valor de $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)-5\sin(t)+6}dt$

Ejercicio 8.

Calcular las siguientes integrales (n y m son naturales mayores o iguales que 1):

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx$

Sugerencia: Para b) y c) puede resultar útil las fórmulas trigonométricas: $\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(B-A)-\cos(A+B))$ $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(B-A)+\cos(A+B))$.

Ejercicio 9.

Sean a y b dos funciones continuas en $x > 0$, y sea A una primitiva de a en $x > 0$

a) Pruebe que la función definida por:

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(C + \int_1 xe^{A(t)}b(t)dt\right)$$

verifica la igualdad: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad \forall x > 0$, independientemente del valor de constante C

b) Encuentre una función y que verifique la igualdad:

$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = x \quad \forall x > 0$$