Práctico 6

1- Demostrar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

2- Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \leq \frac{1}{2}$$

3- Sea f continua en $[2,8]$, tal que $\int_2^8 f(x)\,dx = 20$ y $\int_8^4 f(x)\,dx = 12$.

a) Calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$

b) Probar que existe $c \in [2,4]$ tal que $f(c) = 16$.

4- Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$\int_0^x \sqrt{t^2-t+1}dt, \qquad \int_x^3 (\mathrm{sen}^3(t)+t^2)dt, \qquad \int_0^{x^3} (e^t-2)dt, \qquad \int_{x^2}^{1+x} \sqrt{4+t^2}dt.$$

(*Sugerencia*: Si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ entonces $\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = F(g(x))$.)

5- Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = \int_0^x \sqrt{t^2-t+1}\,dt$ (b) $f_2(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2-t+1}\,dt$ (c) $f_3(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2-t+1}\,dt$

(d) $f_4(x) = \int_{\cos(x)}^3 \sqrt{t^2-t+1}\,dt$ (e) $f_5(x) = \int_{\cos(x)}^{\log(x)} \sqrt{t^2-t+1}\,dt$

6- Determinar (si existen) una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y un número real $c \in \mathbb{R}$ tales que

(a) $\int_c^x f(t)\,dt = 2+x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (b) $\int_1^x f(t)dt = \log(x^2+2x+2) - c$

(c) $\int_c^x f(t)dt = (x-1)^4$ (d) $\int_0^x f(t)dt = c - e^{-x^2}$

7- Calcular primitivas de las siguientes funciones:

$a)\ 3x^2 - 6x + 8,$ $\quad b)\ \frac{1}{\sqrt{x}},$ $\quad c)\ \frac{x^2 - 3x + 1}{x\sqrt{x}},$ $\quad d)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + (e^x - 1)^2,$

$d)\ e^{x+2} - 1,$ $\quad e)\ 2x^2 - e^x,$ $\quad f)\ 2\,\mathrm{sen}(3x) + \frac{1}{x^2 + 1},$ $\quad g)\ \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

8- Calcular

$a)\ \int_{-1}^{2} (2x^2 - e^x)dx,$ $\quad b)\ \int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}dx,$ $\quad c)\ \int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}(2x)dx,$

$d)\ \int_{1}^{2} (1/x + 1/x^2 + (e^x - 1)^2)dx,$ $\quad e)\ \int_{0}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1 + x^2}dx,$ $\quad f)\ \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx.$

9- Hallar el área comprendida entre el gráfico de f y el eje Ox en el intervalo indicado:

$a)\ f(x) = x^3 + 1$ en $[0, 2]$ $\quad b)\ f(x) = x^3 + 1$ en $[-2, 1]$

$c)\ f(x) = \cos(x)$ en $[0, \pi/2]$ $\quad d)\ f(x) = \mathrm{sen}(x)$ en $[-\pi/4, \pi/2]$.

10- *a)* Hallar el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ el eje Ox y las rectas $x = 2$ y $x = 5$.

b) Hallar el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = e^x - 1$ el eje Ox y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

c) Hallar el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = x^3$ y la recta $y = x$.