CAPÍTULO 3

Método simplex y análisis de sensibilidad

Aplicación de la vida real-Optimización de la producción de válvulas cardiacas

Las válvulas cardiacas biológicas de diferentes tamaños son bioprótesis fabricadas a partir de corazones porcinos para implantación en humanos. Por el lado del suministro, los corazones porcinos no pueden "producirse" en tamaños específicos. Por otra parte, el tamaño exacto de una válvula fabricada no puede determinarse hasta que se procesa el componente biológico del corazón del cerdo. En consecuencia, puede haber más existencias de algunos tamaños y menos de otros. Se desarrolló un modelo de PL para reducir la cantidad de los tamaños de los que hay más existencias e incrementar la cantidad de los tamaños cuyas existencias son menores. (Los detalles de este estudio se presentan en el caso 2 del capítulo 26, en inglés, del sitio web).

3.1 MODELO DE PL EN FORMA DE ECUACIÓN

El desarrollo de los cálculos con el método simplex se facilita si se imponen dos requerimientos a las restricciones de programación lineal.

1. Todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo.
2. Todas las variabzzles son no negativas[1]

Conversión de las desigualdades en ecuaciones con lado derecho no negativo. En un modelo de PL económico, el lado derecho representa la disponibilidad de un recurso, y el izquierdo el uso del recurso por todas las actividades del modelo (variables). La cantidad excedente del lado derecho respecto de izquierdo da entonces la cantidad *no utilizada* del recurso.

[1] Todos los paquetes comerciales (y TORA) aceptan directamente las restricciones de desigualdad, el lado derecho no negativo y las variables irrestrictas. Cualquier condición previa de las restricciones y las variables se realiza internamente en el software antes de que el método simplex resuelva el problema.

Para convertir una desigualdad ($\leq$) en ecuación se agrega una **variable de holgura** al lado izquierdo de la restricción. Por ejemplo, la restricción $M1$ del modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) se convierte en ecuación como sigue

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24, s_1 \geq 0$$

La variable no negativa s_1 es la holgura (o cantidad no utilizada) del recurso $M1$.

A continuación, una restricción ($\geq$) establece un límite inferior en las actividades económicas de la programación lineal, así que la cantidad en la cual el lado izquierdo excede el límite mínimo representa un *superávit*. Así pues, la conversión de ($\geq$) a ($=$) se logra restando una **variable de superávit** no negativa del lado izquierdo de la desigualdad. Por ejemplo, en el modelo de la dieta (ejemplo 2.2-2), la variable de exceso S_1 (≥ 0) convierte la restricción de la mezcla de alimentos ($\geq$) en la ecuación.

$$x_1 + x_2 - S_1 = 800, S_1 \geq 0$$

El único requerimiento que falta es que el lado derecho de la ecuación resultante sea no negativo. Si el lado derecho resulta negativo, el requerimiento se satisface multiplicando ambos lados de la ecuación por -1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.1A

***1.** En el modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.2-1), considere la solución factible $x_1 = 3$ toneladas y $x_2 = 1$ tonelada. Determine el valor de las holguras asociadas para las materias primas $M1$ y $M2$.

2. En el modelo de la dieta (ejemplo 2.2-2), determine el superávit de alimento compuesto de 500 lb de maíz y 600 lb de soya.

3. Considere la siguiente desigualdad

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5$$

Demuestre que multiplicar ambos lados de la desigualdad por -1 y luego convertir la desigualdad resultante en ecuación es lo mismo que convertirla primero en ecuación y luego multiplicar ambos lados por -1.

***4.** Dos productos diferentes, $P1$ y $P2$ pueden ser fabricados por una o dos máquinas diferentes, $M1$ y $M2$. El tiempo de procesamiento de cualquier producto en cualquier máquina es el mismo. La capacidad diaria de la máquina $M1$ es de 200 unidades (de $P1$ o de $P2$, o una combinación de ambos), y la capacidad diaria de la máquina $M2$ es de 250 unidades. El supervisor del taller desea balancear el programa de producción de las dos máquinas de modo que la cantidad de unidades producidas en una máquina no sea mayor a 5 unidades de la cantidad producida en la otra. La utilidad por unidad de $P1$ es de \$10 y la de $P2$ es de \$15. Plantee el problema como una PL en forma de ecuación.

5. Muestre cómo puede presentarse la siguiente función objetivo en forma de ecuación:

$$\text{Minimizar } z = \text{máx}\left\{|x_1 - x_2 + 3x_3|, |-x_1 + 3x_2 - x_3|\right\}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(*Sugerencia:* $|a| \leq b$ equivale a $a \leq b$ y $a \geq -b$.)

6. Demuestre que las m ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

equivalen a las siguientes $m + 1$ desigualdades:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i$$

Manejo de variables irrestrictas. El uso de una variable irrestricta en un modelo de PL se demuestra en el modelo de nivelación de producción durante múltiples periodos del ejemplo 2.4-4, donde la variable irrestricta S_i representa la cantidad de trabajadores contratados o despedidos en el periodo i. En el mismo ejemplo, explicamos que la variable irrestricta puede ser reemplazada por dos variables no negativas mediante la sustitución

$$S_i = S_i^- - S_i^+,\ S_i^- \geq 0,\ S_i^+ \geq 0$$

En este caso, S_i^- representa la cantidad de trabajadores contratados y S_i^+ la de trabajadores despedidos. Como se explicó en el ejemplo 2.4-4, es imposible (tanto intuitiva como matemáticamente) que S_i^- y S_i^+ asuman valores positivos al mismo tiempo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.1B

1. El restaurante de comida rápida McBurger vende hamburguesas cuarto de libra y hamburguesas con queso. Una hamburguesa cuatro de libra se prepara con un cuatro de libra de carne y una hamburguesa con queso se prepara con sólo .2 lb de carne. El restaurante inicia el día con 200 lb de carne pero puede pedir más a un costo adicional de 25 centavos por libra para cubrir el costo de entrega. Toda la carne que sobra al final del día se dona a instituciones de caridad. Las utilidades de McBurger son de 20 centavos por hamburguesa cuarto de libra y de 15 centavos por hamburguesa con queso. McBurger no espera vender más de 900 hamburguesa en cualquier día. ¿Cuántas hamburguesas de cada tipo debe planear McBurger para el día? Resuelva el problema utilizando TORA, Solver o AMPL.

2. En un centro de maquinado se fabrican dos productos. Los tiempos de producción por unidad de los productos 1 y 2 son de 10 y 12 minutos, respectivamente, El tiempo de máquina regular total es de 2500 minutos por día. En cualquier día, el fabricante puede producir entre 150 y 200 unidades del producto 1, pero no más de 45 unidades del producto 2. Se puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda a un costo adicional de $.50 por minuto. Suponiendo que las utilidades unitarias de los productos 1 y 2 son de $6.00 y $7.50, respectivamente, formule el problema como un modelo de PL, luego resuélvalo con TORA, Solver o AMPLS para determinar el nivel de producción óptimo de cada producto así como también cualquier tiempo extra necesario en el centro.

***3.** JoShop fabrica tres productos cuyas utilidades unitarias son de $2, $5 y $3, respectivamente. La compañía presupuestó 80 horas de mano de obra y 65 horas de tiempo de máquina para la producción de los tres productos. Los requerimientos de mano de obra por unidad de los productos 1, 2 y 3 son de 2, 1 y 2 horas, respectivamente. Los requerimientos de tiempo de máquina por unidad son 1, 1 y 2 horas. JoShop considera las horas de mano de obra y máquina presupuestadas como metas que pueden ser sobrepasadas, si es necesario, pero a un costo adicional de $15 por hora de mano de obra y $10 por hora de máquina. Formule el problema como una PL y determine su solución óptima aplicando TORA, Solver o AMPL.

4. En una PL en la cual hay algunas variables irrestrictas, una transformación del tipo $x_j = x_j^- - x_j^+, x_j^-, x_j^+ \geq 0$ duplicará la cantidad correspondiente de variables no negativas.

En su lugar, podemos reemplazar k variables irrestrictas con exactamente $k + 1$ variables no negativas por medio de la sustitución $x_j = x_j' - w$, x_j', $w \geq 0$. Use TORA, Solver o AMPL para demostrar que los dos métodos dan la misma solución de la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sujeto a

$$4x_1 - x_2 - 5x_3 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$

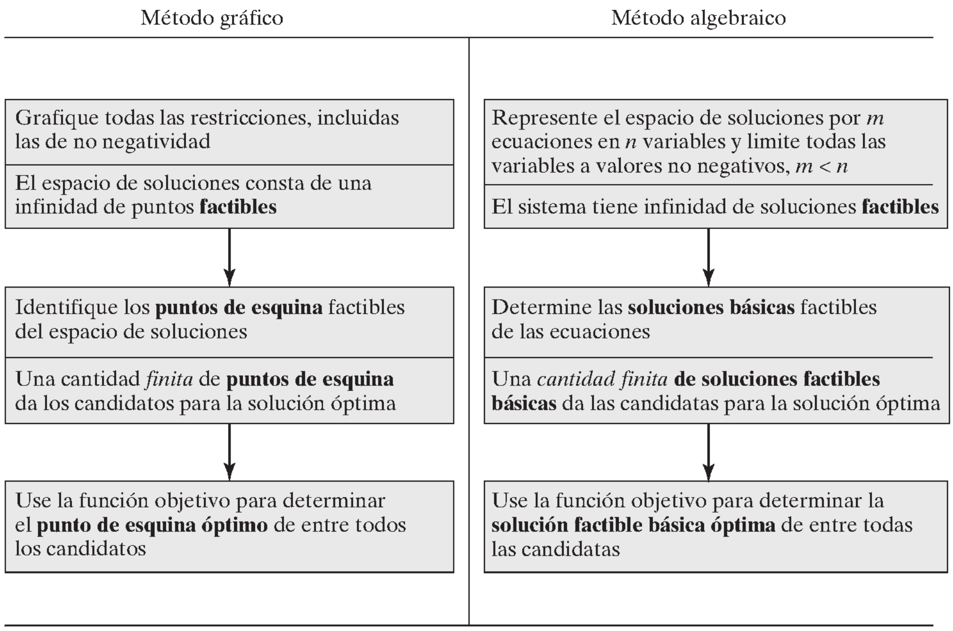
$$x_1 \geq 0,\ x_2,\ x_3 \text{ irrestricta}$$

3.2 TRANSICIÓN DE LA SOLUCIÓN GRÁFICA A LA ALGEBRAICA

El desarrollo del método simplex algebraico está basado en ideas transmitidas por la solución gráfica que se muestra en la sección 2.2. La figura 3.1 compara los dos métodos. En el método gráfico el espacio de soluciones es la intersección de los semiplanos que representan las restricciones, y en el método simplex, el espacio de soluciones está representado por m ecuaciones lineales simultáneas y n variables no negativas. Podemos visualizar que el espacio de soluciones gráficas tiene una infinidad de puntos de solución, pero ¿cómo sacar una conclusión parecida a partir de la representación algebraica del espacio de soluciones? La respuesta es que, en todas las PL no triviales, la cantidad de ecuaciones m siempre es *menor* que la de variables n, por lo que se obtiene una cantidad infinita de soluciones (siempre que las ecuaciones sean consisten-

FIGURA 3.1

Transición de la solución gráfica a la solución algebraica



tes).[2] Por ejemplo, la ecuación $x + y = 1$ tiene $m = 1$ y $n = 2$ y produce una infinitud de soluciones porque cualquier punto sobre la línea recta $x + y = 1$ es una solución.

En el espacio de soluciones algebraicas (definido por $m \times n$ ecuaciones, $m < n$), las **soluciones básicas** corresponden a los *puntos de esquina* en el espacio de soluciones gráficas. Se determinan igualando $n - m$ variables a cero y resolviendo las m ecuaciones para las m variables restantes, *siempre que la solución resultante es única.* Esto significa que la cantidad máxima de puntos de esquina es

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Como con los puntos de esquina, las soluciones factibles básicas definen por completo a las candidatas para la solución óptima en el espacio de soluciones algebraicas.

Ejemplo 3.2-1

Considere la siguiente PL con dos variables

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La figura 3.2 proporciona el espacio de soluciones gráficas para el problema.

Algebraicamente, el espacio de soluciones de la PL está representado por las siguientes $m = 2$ ecuaciones y $n = 4$ variables:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 5 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Las soluciones básicas se determinan estableciendo las $n - m = 4 - 2 = 2$ variables iguales a cero y resolviendo las $m = 2$ variables restantes. Por ejemplo, si establecemos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, las ecuaciones proporcionan la solución básica única

$$s_1 = 4, s_2 = 5$$

Esta solución corresponde al punto A en la figura 3.2 (convénzase de que $s_1 = 4$ y $s_2 = 5$ en el punto A). Puede determinarse otro punto con $s_1 = 0$ y $s_2 = 0$ y resolviendo luego las dos ecuaciones resultantes

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

La solución básica asociada es $(x_1 = 1, x_2 = 2)$, o el punto C en la figura 3.2.

[2] Si la cantidad de ecuaciones m es igual a la de variables n (y las ecuaciones son consistentes), el sistema tiene exactamente una solución. Si m es mayor que n, entonces al menos las ecuaciones $m - n$ deben ser redundantes.

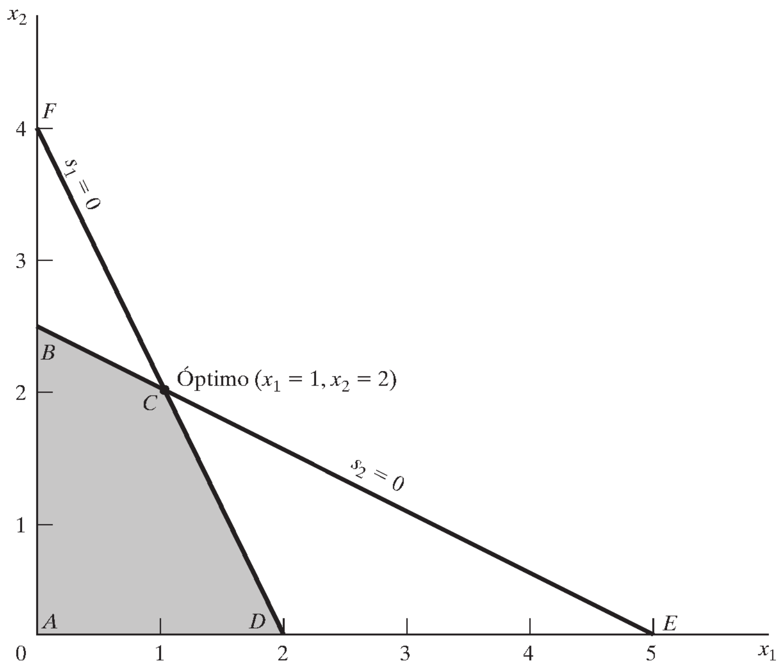


FIGURA 3.2
Espacio de soluciones de PL del ejemplo 3.2-1

Probablemente se pregunte cuáles variables $n - m$ deben igualarse a cero en busca de un punto de esquina específico. Sin el beneficio del espacio de soluciones gráficas (el cual está disponible a lo sumo sólo con tres variables), no podemos especificar las $(n - m)$ variables cero asociadas con un punto de esquina dado. Pero eso no nos impide enumerar *todos* los puntos de esquina del espacio de soluciones. Simplemente considere *todas* las combinaciones en las que $n - m$ variables son iguales a cero y resuelva las ecuaciones resultantes. Una vez hecho, la solución óptima es la solución básica *factible* (punto de esquina) con el mejor valor objetivo.

En el ejemplo presente tenemos $C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ puntos de esquina. Si examinamos la figura 3.2, podemos ver los cuatro puntos de esquina A, B, C y D. Así que, ¿dónde están los dos restantes? De hecho, los puntos E y F también son puntos de esquina; pero son *no factibles*, y, por consiguiente, no son candidatos para la solución óptima.

Para completar la transición de la solución gráfica a la algebraica, las $n - m$ variables cero se conocen como **variables no básicas**. Las m variables restantes se llaman **variables básicas**, y su solución (obtenida resolviendo las m ecuaciones) se conoce como **solución básica**. La siguiente tabla muestra todas las soluciones básicas y no básicas de este ejemplo.

Variables no básicas (cero)	Variables básicas	Solución básica	Punto de esquina asociado	¿Factible?	Valor objetivo, z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	$(4, 5)$	A	Sí	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	$(4, -3)$	F	No	—
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	$(2.5, 1.5)$	B	Sí	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	$(2, 3)$	D	Sí	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	$(5, -6)$	E	No	—
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	**(1, 2)**	***C***	**Sí**	**8 (óptimo)**

Comentarios. En la ilustración anterior podemos ver que a medida que el tamaño del problema se incrementa, enumerar todos los puntos de esquina se vuelve una tarea prohibitiva. Por ejemplo, para que $m = 10$ y $n = 20$, es necesario resolver $C_{10}^{20} = 184{,}756$ conjuntos de 10×10 ecuaciones, una tarea abrumadora, sobre todo cuando nos damos cuenta de que una PL de (10×20) es muy pequeña (las PL reales pueden incluir miles de variables y restricciones). El método simplex atenúa esta carga computacional en forma dramática al investigar sólo un subconjunto de todas las posibles soluciones factibles básicas (puntos de esquina). Esto es lo que hace el algoritmo simplex.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.2A

1. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) Exprese el problema en forma de ecuación.

(b) Determine todas las funciones básicas del problema, y clasifíquelas como factibles y no factibles.

***(c)** Use la sustitución directa en la función objetivo para determinar la solución factible básica óptima.

(d) Compruebe gráficamente que la solución obtenida en (c) es la solución de PL óptima, y de ese modo se concluye que la solución óptima puede determinarse algebraicamente considerando sólo las soluciones factibles básicas.

***(e)** Demuestre cómo se representan las soluciones básicas *no factibles* en el espacio de soluciones gráficas.

2. Determine la solución óptima de cada una de las siguientes PL enumerando todas las soluciones básicas.

(a) Maximizar $z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4$
sujeto a

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(b) Minimizar $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$
sujeto a

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

*3. Demuestre algebraicamente que todas las soluciones básicas de la siguiente PL son no factibles.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

4. Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq 4$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$
$$x_1, x_3 \geq 0$$
$$x_2 \text{ irrestricta}$$

La conversión a la forma de ecuación implica utilizar la sustitución $x_2 = x_2^- - x_2^+$. Demuestre que una solución básica no puede incluir a x_2^- ni a x_2^+ al mismo tiempo.

5. Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_2 \text{ no acotada}$$
$$x_2 \geq 0$$

(a) Determine todas las soluciones factibles básicas del problema.
(b) Use la sustitución directa en la función objetivo para determinar la mejor solución básica.
(c) Resuelva el problema gráficamente, y verifique si la solución obtenida en (c) es la óptima.

3.3 MÉTODO SIMPLEX

En lugar de enumerar *todas* las soluciones básicas (puntos de esquina) del problema de PL (como se hizo en la sección 3.2), el método simplex investiga sólo “algunas” de estas soluciones. La sección 3.3.1 describe la naturaleza *iterativa* del método, y la sección 3.3.2 proporciona los detalles computacionales del algoritmo simplex.

3.3.1 Naturaleza iterativa del método simplex

La figura 3.3 muestra el espacio de soluciones de la programación lineal del ejemplo 3.2-1. Por lo común, el método simplex se inicia en el origen (punto A), donde $x_1 = 0, x_2 = 0$, y el valor objetivo, z, es cero. La pregunta lógica es si un incremento en x_1 y/o x_2 (o ambas) no básicas por encima de sus valores actuales de cero puede mejorar (incrementar) el valor de z. Podemos responder esta pregunta investigando la función objetivo:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

Un incremento de x_1 o x_2 (o ambas) sobre sus valores actuales de cero *mejorará* el valor de z. El diseño del método simplex no permite el incremento simultáneo de las variables. En cambio, incrementa *una a la vez*. La variable que va a aumentar es la que tenga mayor grado de *mejora* en z. En el ejemplo presente, el *grado* de mejora del valor de z es de 2 unidades para x_1 y de 3 para x_2. Por lo tanto elegimos x_2 para que crezca (la variable con el mayor grado de mejora entre todas las variables no básicas). La figura 3.3 muestra que el valor de x_2 debe incrementarse hasta que se llegue al punto de esquina B (recordemos que no llegar al punto de esquina B no es una opción porque un candidato para el óptimo debe ser un punto de esquina). En el punto B, el método simplex incrementará el valor de x_1 para llegar al punto de esquina mejorado C, el cual es el óptimo.

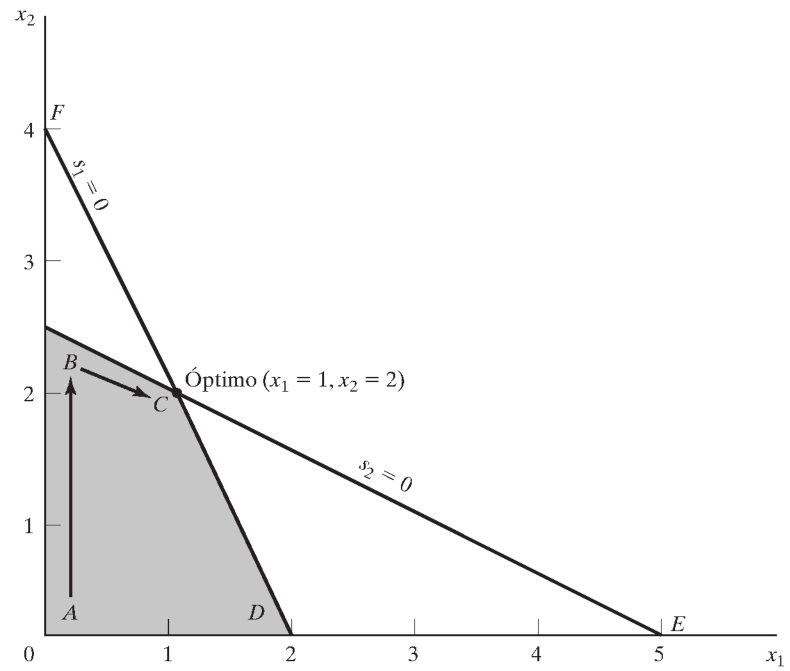


FIGURA 3.3

Proceso iterativo del método simplex

La trayectoria del algoritmo simplex se define como $A \rightarrow B \rightarrow C$. Cada punto de esquina a lo largo de la trayectoria está asociado con una **iteración**. Es importante hacer notar que el método simplex se mueve a lo largo de los **bordes** del espacio de soluciones, lo cual significa que el método no puede cruzarlo, es decir, irse directamente de A a C.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.3A

1. En la figura 3.3, suponga que la función objetivo se cambia a

$$\text{Maximizar } z = 8x_1 + 4x_2$$

Identifique la trayectoria del método simplex y las variables básicas y no básicas que la definen.

2. Considere la solución gráfica del modelo de Reddy Mikks dado en la figura 2.2. Identifique la trayectoria del método simplex y las variables no básicas que la definen.

***3.** Considere el espacio de soluciones PL tridimensional que se muestra en la figura 3.4, cuyos puntos extremos factibles son $A, B, \ldots,$ y J.

(a) ¿Cuáles de los siguientes pares de puntos de esquina no pueden representar iteraciones simplex *sucesivas*: (A, B), (B, D), (E, H) y (A, I)? Explique la razón.

(b) Suponga que las iteraciones simplex se inician en A y que el óptimo ocurre en H. Indique si alguna de las siguientes trayectorias son *no* legítimas para el algoritmo simplex, y explique la razón.

(i) $A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow H$

(ii) $A \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow H$

(iii) $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$

4. Para el espacio de soluciones en la figura 3.4 todas las restricciones son del tipo $\leq$, y todas las variables x_1, x_2 y x_3 son no negativas. Suponga que s_1, s_2, s_3 y s_4 (≥ 0) son las holguras asociadas con las restricciones representadas por los planos *CEIJF, BEIHG, DFJHG* e *IJH*, respectivamente. Identifique las variables básicas y no básicas asociadas con cada punto de esquina factible del espacio de soluciones.

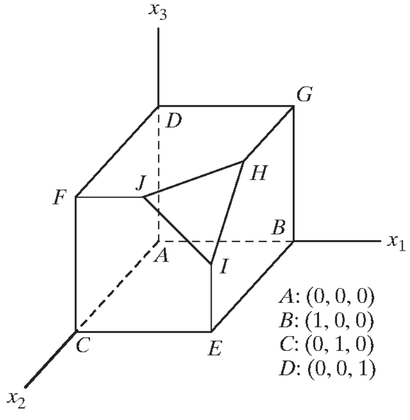


FIGURA 3.4

Espacio de soluciones del problema 3, conjunto 3.2b

5. Para cada una de las funciones objetivo dadas y el espacio de soluciones de la figura 3.4, seleccione la variable no básica que conduce al siguiente punto de esquina simplex, y determine la mejora asociada de z.

*__(a)__ Maximizar $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$
(b) Maximizar $z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$
(c) Maximizar $z = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3$
(d) Maximizar $z = x_1 + x_2 + x_3$

3.3.2 Detalles de cálculo del algoritmo simplex

En esta sección se explican los detalles de cálculo de una iteración simplex por medio de un ejemplo numérico.

Ejemplo 3.3-1

Considere el modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) expresado en forma de ecuación:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 + s_1 \qquad\qquad &= 24 \text{ (materia prima } M1)\\
x_1 + 2x_2 \quad + s_2 \qquad &= 6 \text{ (materia prima } M2)\\
-x_1 + x_2 \qquad + s_3 \quad &= 1 \text{ (Límite del mercado)}\\
x_2 \qquad\qquad + s_4 &= 2 \text{ (Límite de la demanda)}\\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Las variables s_1, s_2, s_3 y s_4 son las holguras asociadas con las restricciones respectivas.

A continuación escribimos la ecuación objetivo como

$$z - 5x_1 - 4x_2 = 0$$

De esta manera, la tabla inicial simplex se representa como sigue:

Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
z	1	−5	−4	0	0	0	0	0	Fila z
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Fila s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	Fila s_2
s_3	0	−1	1	0	0	1	0	1	Fila s_3
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	Fila s_4

El diseño de la tabla simplex provee automáticamente la solución en la iteración inicial. La solución se inicia en el origen $(x_1, x_2) = (0,0)$, por lo que (x_1, x_2) se definen como las variables no básicas y (s_1, s_2, s_3, s_4) como las variables básicas. La variable objetivo z y las variables básicas aparecen en la columna de la extrema izquierda (Básica). Los lados derechos de las ecuaciones del modelo dan sus valores, como se muestra en la columna de la extrema derecha (Solución) de la tabla; es decir, $z = 0, s_1 = 24, s_2 = 6, s_3 = 1, s_4 = 2$. El resultado puede verse igualando las variables no básicas (x_1, x_2) a cero en todas las ecuaciones y también observando la configuración de matriz identidad especial de los coeficientes de las variables básicas (todos los elementos en las diagonales son 1, y todos los elementos fuera de las diagonales son 0).

¿Es óptima la solución inicial? La función objetivo $z = 5x_1 + 4x_2$ muestra que la solución puede mejorarse si se incrementa el valor de la variable x_1 o de la x_2 no básica por encima de cero. Siguiendo el argumento de la sección 3.3.1, x_1 tiene que incrementarse porque tiene *el* coeficiente objetivo *más positivo*. De forma equivalente, en la tabla simplex donde la función objetivo aparece como $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$, la variable seleccionada es la variable no básica con el coeficiente *más negativo* en la ecuación objetivo. Esta regla define la llamada **condición de optimalidad simplex**. En la terminología del algoritmo simplex, x_1 se conoce como la **variable de entrada** porque ingresa la solución básica.

Si x_1 es la variable de entrada, una de las variables básicas actuales debe salir; es decir, se vuelve no básica a un nivel cero (recordemos que la cantidad de variables no básicas debe ser siempre $n - m$). La mecánica para determinar la **variable de salida** implica calcular las **relaciones** del lado derecho de las ecuaciones (columna *Solución*) con los coeficientes de restricción estrictamente *positivos* (imposibilitando así al cero) bajo la variable de entrada, x_1, como se muestra en la siguiente tabla:

Básica	x_1 entrante	Solución	Relación (o intersección)
s_1	6	24	$x_1 = \frac{24}{6} = 4 \leftarrow$ mínimo
s_2	1	6	$x_1 = \frac{6}{1} = 6$
s_3	−1	1	$x_1 = \frac{1}{-1} = -1$ (denominador negativo, ignorar)
s_4	0	2	$x_1 = \frac{2}{0} = \infty$ (denominador cero, ignorar)
Conclusión: x_1 entra (en el nivel 4) y x_2 sale (en el nivel cero)			

¿Cómo determinan las relaciones calculadas la variable de salida y el valor de la variable de entrada? La figura 3.5 muestra que las relaciones calculadas son en realidad las intersecciones de las líneas de restricción con el eje x_1 (variable de entrada). Podemos ver que el valor de x_1 debe incrementarse hasta la intersección no negativa mínima con el eje x_1 (= 4) para alcanzar el punto de esquina B. Cualquier incremento más allá de B no es factible. En el punto B, la variable básica actual s_1 asociada con la restricción 1 asume un valor de cero y se transforma en la *variable de salida*. La regla asociada con las relaciones calculadas se conoce como **condición de factibilidad simplex** porque garantiza la factibilidad de la nueva solución.

El nuevo punto de solución B se determina "intercambiando" la variable de entrada x_1 y la variable de salida s_1 en la tabla simplex para obtener

$$\text{Variables no básicas (cero) en } B\text{: } (s_1, x_2)$$

$$\text{Variables básicas en } B\text{: } (x_1, s_2, s_3, s_4)$$

El proceso de intercambio se basa en las **operaciones de filas de Gauss-Jordan**. Identifica la columna de la variable de entrada como **columna pivote** y la fila de la variable de salida como **fila pi-**

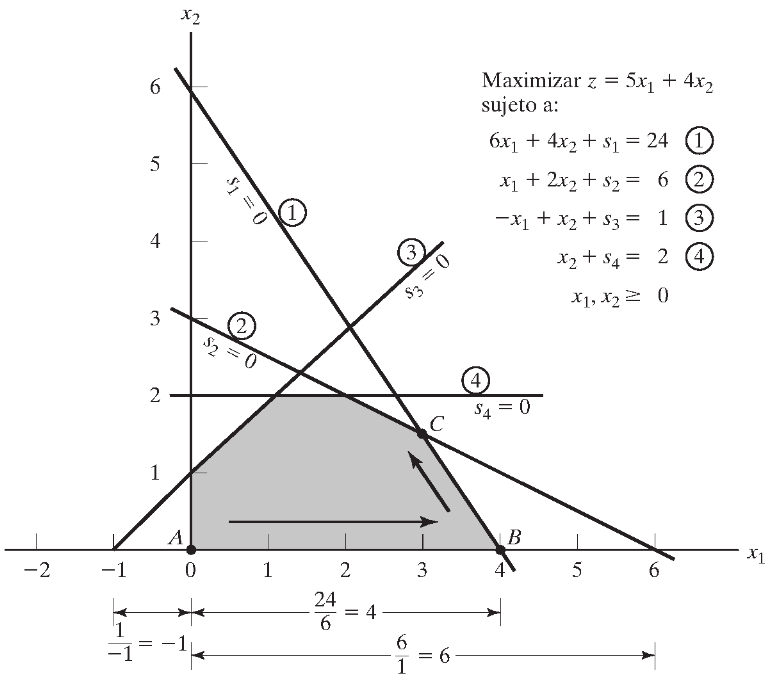


FIGURA 3.5
Interpretación gráfica de las relaciones del método simplex en el modelo de Reddy Mikks

vote. La intersección de la columna pivote y la fila pivote se conoce como **elemento pivote**. La siguiente tabla es un replanteamiento de la tabla inicial con sus filas y columnas pivote resaltadas.

	Básica	z	x_1 (Entra ↓)	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
	z	1	−5	−4	0	0	0	0	0	
Sale ←	s_1	0	**6**	4	1	0	0	0	24	Fila pivote
	s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	
	s_3	0	−1	1	0	0	1	0	1	
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	
			Columna pivote							

Los cálculos de Gauss-Jordan necesarios para obtener la nueva solución básica son de dos tipos.

1. *Fila pivote*
   a. Reemplace la variable de salida en la columna *Básica* con la variable de entrada.
   b. Nueva fila pivote = Fila pivote actual ÷ Elemento pivote

2. *Todas las demás filas, incluyendo z*

Nueva fila = (Fila actual) − (Coeficiente de la columna pivote) × (Nueva fila pivote)

Estos cálculos se aplican a la tabla anterior como sigue:

1. Reemplace s_1 en la columna *Básica* con x_1:

Nueva fila x_1 = Fila s_1 actual ÷ 6

$= \frac{1}{6}(0\ 6\ 4\ 1\ 0\ 0\ 0\ 24)$

$= (0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

2. Nueva fila z = Fila z actual − (−5) × Nueva fila x_1

$= (1\ -5\ -4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) - (-5) \times (0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

$= (1\ \ 0\ -\frac{2}{3}\ \frac{5}{6}\ 0\ 0\ 0\ 20)$

3. Nueva fila s_2 = Fila s_2 actual − (1) × Nueva fila x_1

$= (0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 6) - (1) \times (0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

$= (0\ 0\ \frac{4}{3}\ -\frac{1}{6}\ 1\ 0\ 0\ 2)$

4. Nueva fila s_3 = Fila s_3 actual − (−1) × Nueva fila x_1

$= (0\ -1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1) - (-1) \times (0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

$= (0\ 0\ \frac{5}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 1\ 0\ 5)$

5. Nueva fila s_4 = Fila s_4 actual − (0) × Nueva fila x_1

$= (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2) - (0)(0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

$= (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2)$

La nueva solución básica es (x_1, s_2, s_3, s_4), y la nueva tabla es

				↓					
	Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
	z	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	0	20
	x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
←	s_2	0	0	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2
	s_3	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	5
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Observe que la estructura de la nueva tabla es similar a la de la tabla inicial, en el sentido de que los coeficientes de las restricciones de la variable básica forman una matriz de identidad. Por consiguiente, cuando igualamos las nuevas variables no básicas x_2 y s_1 a cero, la columna

Solución de forma automática da la nueva solución ($x_1 = 4, s_2 = 2, s_3 = 5, s_4 = 2$).[3] Este "acondicionamiento" de la tabla es el resultado de la aplicación de las operaciones de filas de Gauss-Jordan. El nuevo valor objetivo es $z = 20$, el cual es consistente con

$$\text{Nueva } z = \text{Anterior } z + \text{Nuevo valor de } x_1 \times \text{su coeficiente objetivo}$$
$$= 0 + 4 \times 5 = 20$$

Por otra parte, $z = 4 \times$ valor de $x_1 + 0 \times$ valor de $s_2 + 0 \times$ valor de $s_3 + 0 \times$ valor de $x_4 = 4 \times 5 + 0 \times 2 + 0 \times 5 + 0 \times 2 = 20$.

En la última tabla, la *condición de optimalidad* muestra que x_2 es la variable de entrada. La condición de factibilidad produce la siguiente información:

Básica	Entrante x_2	Solución	Relación
x_1	$\frac{2}{3}$	4	$x_2 = 4 \div \frac{2}{3} = 6$
s_2	$\frac{4}{3}$	2	$x_2 = 2 \div \frac{4}{3} = 1.5$ (mínima)
s_3	$\frac{5}{3}$	5	$x_2 = 5 \div \frac{5}{3} = 3$
s_4	1	2	$x_2 = 2 \div 1 = 2$

Por lo tanto, s_2 sale de la solución básica, y el nuevo valor de x_2 es 1.5. El incremento correspondiente en z es $\frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3} \times 1.5 = 1$, el cual da la nueva $z = 20 + 1 = 21$.

Si reemplazamos s_2 en la columna *Básica* con la x_2 de entrada, se aplican las siguientes operaciones de filas de Gauss-Jordan:

1. Nueva fila pivote x_2 = Fila s_2 actual $\div \frac{4}{3}$
2. Nueva fila z = Fila z actual $-(-\frac{2}{3}) \times$ Nueva fila x_2
3. Nueva fila x_1 = Fila x_1 actual $-(\frac{2}{3}) \times$ Nueva fila x_2
4. Nueva fila s_3 = Fila s_3 actual $-(\frac{5}{3}) \times$ Nueva fila x_2
5. Nueva fila s_4 = Fila s_4 actual $- (1) \times$ Nueva fila x_2

Estos cálculos producen la siguiente tabla:

Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

[3] A lo largo de mi experiencia académica, he notado que si bien los estudiantes son capaces de realizar los tediosos cálculos del método simplex, al final algunos no pueden decir cuál es la solución. Para ayudar a vencer esta dificultad potencial, se hace un esfuerzo por "leer" la solución de la PL por la tabla.

Según la condición de optimalidad, *ninguno* de los coeficientes de la fila z son negativos. De ahí que la última tabla sea óptima.

La solución óptima puede leerse en la tabla simplex de la siguiente manera. Los valores óptimos de las variables en la columna *Basic* aparecen en la columna *Solución* del lado derecho y se interpretan como sigue:

Variable de decisión	Valor óptimo	Recomendación
x_1	3	Producir 3 toneladas diarias de pintura para exteriores
x_2	$\frac{3}{2}$	Producir 1.5 toneladas diarias de pintura para interiores
z	21	La utilidad diaria es de $21,000

La solución también da el estado de los recursos. Un recurso se designa como **escaso** si la variable de holgura asociada es cero, es decir, las actividades (variables) del modelo consumieron el recurso por completo. De lo contrario, si la holgura es positiva, entonces el recurso es **abundante**. La siguiente tabla clasifica las restricciones del modelo:

Recurso	Valor de holgura	Estado
Materia prima, $M1$	$s_1 = 0$	Escaso
Materia prima, $M2$	$s_2 = 0$	Escaso
Límite del mercado	$s_3 = \frac{5}{2}$	Abundante
Límite de la demanda	$s_4 = \frac{1}{2}$	Abundante

Comentarios. La tabla simplex ofrece mucha información adicional que incluye lo siguiente:

1. *Análisis de sensibilidad*, el cual determina las condiciones que mantendrán la solución actual sin cambios.
2. *Análisis postóptimo*, el cual determina la nueva solución óptima cuando cambian los datos del modelo.

La sección 3.6 se ocupa del análisis de sensibilidad. El análisis postóptimo se trata en el capítulo 4.

Momento de TORA.

Los cálculos de Gauss-Jordan son tediosos, voluminosos y, sobre todo, aburridos. No obstante, esto no tiene importancia porque en la práctica la computadora realiza estos cálculos. Lo importante es que entienda *cómo* funciona el método simplex. La opción interactiva *guiada para el usuario* de TORA (con retroalimentación instantánea), puede ser de ayuda porque le permite especificar el curso de los cálculos simplex (es decir, determinar las variables de entrada y de salida) sin el agobio de los cálculos de Gauss-Jordan. Para utilizar TORA con el problema de Reddy Mikks, ingrese el modelo y luego, en el menú SOLVE/MODIFY seleccione los comandos Solve ⇒ Algebraic ⇒ Iterations ⇒ All-Slack. (La selección All-Slack indica que la solución básica inicial se compone de sólo variables de holgura. Las opciones restantes se presentarán en las secciones 3.4, 4.3, y 7.4-2). A continuación, haga clic en el botón Go To Output Screen. Puede generar una o todas las iteraciones haciendo clic en las opciones Next Iteration o bien All Iterations. Si opta por generar las iteraciones de una en una, puede especificar de manera interactiva las variables de entrada y de salida haciendo clic en los encabezados de sus columnas y filas respectivas. Si sus selecciones son correctas, la columna se torna de color verde y la fila de color rojo. De lo contrario, aparece un mensaje de error.

3.3.3 Resumen del método simplex

Hasta ahora nos hemos ocupado del caso de maximización. En problemas de minimización, la *condición de optimalidad* requiere seleccionar la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente objetivo más *positivo* en la ecuación objetivo, la regla exacta opuesta del caso de maximización. Esto obedece a que máx z equivale a mín $(-z)$. En cuanto a la *condición de factibilidad* para seleccionar la variable de salida, la regla no cambia.

Condición de optimalidad. La variable de entrada en un problema de maximización (minimización) es la variable *no básica* con el coeficiente más negativo (positivo) en la fila z. Los vínculos se rompen arbitrariamente. El óptimo se alcanza en la iteración en la cual los coeficientes en la fila z son no negativos (no positivos).

Condición de factibilidad. Tanto en problemas de maximización como de minimización, la variable de salida es la variable *básica* asociada con la relación mínima no negativa con el denominador *estrictamente positivo*. Los vínculos se rompen arbitrariamente.

Operaciones de filas de Gauss-Jordan

1. *Fila pivote*

   a. Reemplace la variable de entrada en la columna *Básica* con la variable de entrada.

   b. Nueva fila pivote = Fila pivote actual ÷ Elemento pivote

2. *Todas las demás filas, incluida la z*
Nueva fila = (Fila actual) − (Su coeficiente en la columna pivote) × (Nueva fila pivote).

Los pasos del método simplex son

Paso 0. Determine la solución factible básica inicial.

Paso 1. Seleccione una *variable de entrada* utilizando la condición de optimalidad. Deténgase si no hay variable de entrada; la última condición es óptima. De otro modo, prosiga con el paso 2.

Paso 2. Seleccione una *variable de salida* utilizando la condición de factibilidad.

Paso 3. Aplique los cálculos de Gauss-Jordan para determinar la nueva solución básica. Vaya al paso 1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.3B

1. Este problema está diseñado para reforzar su comprensión de la condición de factibilidad simplex. En la primera tabla del ejemplo 3.3-1 utilizamos la prueba de relación mínima (no negativa) para determinar la variable de salida. La condición garantiza la factibilidad (todos los nuevos valores de las variables básicas permanecen no negativos según lo estipulado por la definición de la PL). Para demostrar este punto, haga que s_2, en lugar de s_1, salga de la solución básica, y realice los cálculos de Gauss-Jordan. En la tabla simplex resultante, s_1 es no factible ($= -12$).

2. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq 40 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema para cada una de las siguientes funciones objetivo.

(a) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$.
(b) Maximizar $z = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$.
(c) Maximizar $z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4$.
(d) Minimizar $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$.

***3.** Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 4 \\ 5x_1 - 2x_2 \qquad + 6x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 3 \\ -x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 \qquad\qquad\qquad + x_8 &= 0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_8 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sean $x_5, x_6, \ldots,$ y x_8 una solución factible básica inicial dada. Suponga que x_1 se vuelve básica. ¿Cuáles de las variables básicas dadas deben volverse no básicas al nivel cero para garantizar que todas las variables permanezcan no negativas, y cuál es el valor de x_1 en la nueva solución? Repita este procedimiento para x_2, x_3 y x_4.

4. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 4 \\ 6x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 8 \\ 3x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Resuelva el problema *por inspección* (no utilice la operaciones de filas de Gauss-Jordan), y justifique la respuesta en función de las soluciones básicas del método simplex.
(b) Repita (a) suponiendo que la función objetivo requiere minimizar $z = x_1$.

5. Resuelva el siguiente problema por *inspección*, y justifique el método de solución en función de las soluciones básicas del método simplex.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 12x_5$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 90$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(*Sugerencia:* Una solución básica se compone de sólo una variable.)

6. La siguiente tabla representa una iteración simplex específica. Todas las variables son no negativas. La tabla no es óptima en cuanto a maximización o minimización. Por lo tanto, cuando una variable no básica entra en la solución, puede o incrementar o reducir z, o bien dejarla como estaba, según los parámetros de la variable no básica de entrada.

Básica	X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Solución
z	0	−5	0	4	−1	−10	0	0	620
x_8	0	3	0	−2	−3	−1	5	1	12
x_3	0	1	1	3	1	0	3	0	6
x_1	1	−1	0	0	6	−4	0	0	0

(a) Clasifique las variables como básicas y no básicas, y proporcione los valores actuales de todas las variables.

***(b)** Suponiendo que el problema fuera del tipo de maximización, identifique las variables no básicas que tienen el potencial de mejorar el valor de z. Si cada una de esas variables entra en la solución básica, determine la variable de salida asociada, si la hay, y el cambio asociado de z. No utilice operaciones de filas de Gauss-Jordan.

(c) Repita (b) suponiendo que el problema fuera del tipo de minimización.

(d) ¿Cuál variable o variables no cambiarán el valor de z al seleccionarlas para que entren en la solución?

7. Considere el espacio de soluciones bidimensional que se muestra en la figura 3.6.

(a) Suponga que la función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 6x_2$$

Si las iteraciones simplex se inician en el punto A, identifique la trayectoria que conduce al punto E óptimo.

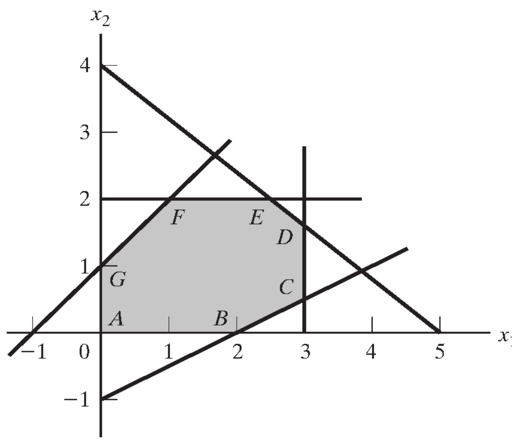


FIGURA 3.6

Espacio de soluciones para el problema 7, conjunto 3.3b

(b) Determine la variable de entrada, las relaciones correspondientes de la condición de factibilidad, y el cambio del valor de z, suponiendo que la iteración inicial ocurre en el punto A y que la función objetivo la da

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + x_2$$

(c) Repita (b), suponiendo que la función objetivo fuera

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 4x_2$$

8. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 16x_1 + 15x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 40x_1 + 31x_2 &\leq 124 \\ -x_1 + \quad x_2 &\leq 1 \\ x_1 \qquad &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Resuelva el problema mediante el método simplex, donde la variable de entrada es la variable no básica con el coeficiente *más* negativo en la fila z.

(b) Resuelva el problema mediante el algoritmo simplex, seleccionando siempre la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente *menos* negativo en la fila z.

(c) Compare la cantidad de iteraciones en (a) y (b). ¿Conduce la selección de la variable de entrada como las variables no básica con el coeficiente *más* negativo en la fila z a un menor número de iteraciones? ¿Qué conclusión puede hacerse con respecto a la condición de optimalidad?

(d) Suponga que el sentido de optimización se cambia a minimización al multiplicar z por -1. ¿Cómo afecta este cambio a las iteraciones de simplex?

***9.** En el ejemplo 3.3-1, muestre cómo puede determinarse el segundo mejor valor óptimo de z desde la tabla óptima.

10. ¿Puede ampliar el procedimiento del problema 9 para determinar el tercer mejor valor óptimo de z?

11. Gutchi Company fabrica bolsos de mano, bolsos para rasuradora y mochilas. La elaboración incluye piel y materiales sintéticos, y la piel es la materia prima escasa. El proceso de producción requiere dos tipos de mano de obra calificada: costura y acabado. La siguiente tabla da la disponibilidad de los recursos, su consumo por los tres productos y las utilidades por unidad.

	Requerimientos de recursos por unidad			
Recurso	*Bolsos de mano*	*Bolsos para rasuradora*	*Mochilas*	Disponibilidad diaria
Piel (pies^2)	2	1	3	42 pies^2
Costura (h)	2	1	2	40 h
Acabado (h)	1	.5	1	45 h
Precio de venta ($)	24	22	45	

(a) Formule el problema como un programa lineal, y halle la solución óptima (utilice TORA, Excel, Solver o AMPL).

(b) A partir de la solución óptima, determine el estado de cada recurso.

12. *Experimento con TORA.* Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &\leq 4 \\ 5x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 6x_4 &\leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\leq 3 \\ -x_1 \qquad\quad + x_3 + 2x_4 &\leq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Aplique la opción de iteraciones de TORA para determinar la tabla óptima.

(b) Seleccione cualquier variable no básica para que "entre" en la solución básica, y haga clic en la opción Next Iteration para producir la iteración asociada. ¿Cómo se compara el nuevo valor objetivo con el óptimo en (a)? La idea es demostrar que la tabla en (a) es óptima porque ninguna de las variables no básicas puede mejorar el valor objetivo.

13. *Experimento con TORA.* En el problema 12, utilice TORA para determinar la siguiente mejor solución óptima.

3.4 SOLUCIÓN ARTIFICIAL INICIAL

Como se demostró en el ejemplo 3.3-1, las PL en las que todas las restricciones son ($\leq$) con lados derechos no negativos ofrecen una conveniente solución factible básica inicial con todas las holguras. Los modelos que implican restricciones ($=$) o ($\geq$) no lo hacen.

El procedimiento para iniciar PLs de "mal comportamiento" con restricciones ($=$) y ($\geq$) es utilizar **variables artificiales** que desempeñan el papel de holguras en la primera iteración, y que luego se desechan en una iteración posterior. Aquí se presentan dos métodos estrechamente relacionados: el método M, y el método de dos fases.

3.4.1 Método *M*[4]

El método M se inicia con la PL en forma de ecuación (sección 3.1). Si la ecuación i no tiene una holgura (o una variable que pueda desempeñar el papel de una), se agrega una variable artificial, R_i, para formar una solución inicial parecida a la solución básica de total holgura. Sin embargo, las variables artificiales no forman parte del problema original, y se requiere un "artificio" de modelado para igualarlas a cero en el momento en que se alcance la iteración óptima (suponiendo que el problema tenga una solución factible). La meta deseada se logra *penalizando* estas variables en la función objetivo utilizando la siguiente regla:

[4] El método M, una de las técnicas de PL más antiguas, nunca se utiliza en códigos comerciales debido a su inherente error de redondeo. En su lugar se prefiere el método de dos fases (sección 3.4.2). Sin embargo, el uso de penalizaciones, como lo anticipa el método M, es un importante concepto en muchas instancias de modelado de OR.

Regla de penalización para variables artificiales

Dado M, un valor positivo suficientemente grande (matemáticamente ($M \rightarrow \infty$), el coeficiente objetivo de una variable artificial representa una **penalización** apropiada si:

$$\text{Coeficiente objetivo de la variable artificial} = \begin{cases} -M, & \text{en problemas de maximización} \\ M, & \text{en problemas de minimización} \end{cases}$$

Ejemplo 3.4-1

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si utilizamos x_3 como variable de superávit en la segunda restricción y x_4 como variable de holgura en la tercera restricción, el problema en forma de ecuación es

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3 + x_4} &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \phantom{{}+ x_4} &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La tercera ecuación tiene su variable de holgura, x_4, pero la primera y segunda ecuaciones no. Por lo tanto, agregamos las variables artificiales R_1 y R_2 en las primeras dos ecuaciones y las penalizamos en la función objetivo con $MR_1 + MR_2$ (porque estamos minimizando). La PL resultante se da como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + R_1 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución básica inicial es $(R_1, R_2, x_4) = (3, 6, 4)$

Desde un punto de vista de cálculo, la solución del problema con la computadora requiere que reemplace M con un valor numérico (suficientemente grande). No obstante, en todos los libros de texto, incluidas las siete ediciones de este libro, M se maneja algebraicamente en la tabla simplex. El resultado es una dificultad agregada innecesaria la cual puede evitarse sustituyendo un valor numérico apropiado en lugar de M (lo que de cualquier modo tenemos que hacer cuando usamos la computadora). Nos apartamos de la larga tradición de manejar M algebraicamente y utilizar una sustitución numérica en su lugar. La intención es, desde luego, simplificar la presentación sin perder la esencia.

¿Qué valor de M debemos utilizar? La respuesta depende de los datos de la programación original. Recordemos que la penalización M debe ser lo bastante grande *con respecto a los coeficientes objetivos originales* para forzar a las variables originales a ser cero en la solución óptima. Al mismo tiempo, como las computadoras son la herramienta principal para resolver PLs, no es conveniente que M sea innecesariamente grande ya que ello nos puede conducir a un grave error de redondeo. En este ejemplo, los coeficientes objetivo de x_1 y x_2 son 4 y 1, respectivamente, y parece razonable establecer $M = 100$.[5]

Utilizando $M = 100$, la tabla simplex de inicio se da como sigue (por comodidad, la columna z se elimina porque no cambia en todas las iteraciones):

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	−4	−1	0	−100	−100	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Antes de proseguir con los cálculos del método simplex, la fila z debe hacerse consistente con el resto de la tabla. El lado derecho de la fila z en la tabla en este momento muestra $z = 0$. Sin embargo, dada la solución no básica $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, la solución básica actual es $R_1 = 3$, $R_2 = 6$ y $x_4 = 4$, la cual da $z = 100 \times 3 + 100 \times 6 + 4 \times 0 = 900$. Esta inconsistencia se deriva del hecho de que los coeficientes de R_1 y R_2 no son cero ($-100, -100$) en la fila z (compare con la solución de inicio de total holgura en el ejemplo 3.3-1, donde los coeficientes en la fila z de las holguras son cero).

Para eliminar la inconsistencia, tenemos que sustituir R_1 y R_2 en la fila z por medio de la siguiente operación de filas:

$$\text{Nueva fila } z = \text{Anterior fila } z + (100 \times \text{fila } R_1 \times \text{fila } R_2)$$

(Convénzase de que esta operación es la misma que sustituir $R_1 = 3 - 3x_1 - x_2$ y $R_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3$ en la fila z.)

Por tanto, la tabla modificada (¡compruébelo!) es:

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	696	399	−100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

[5] Técnicamente, el método M no necesita sustituir M numéricamente. En su lugar, el coeficiente en la fila objetivo *i-ésimo* en una tabla simplex se reduce a calcular las constantes a_1 y b_1 en la expresión algebraica $a_iM + b_i$. La comparación de las dos expresiones algebraicas se basará entonces en condiciones que implican sólo las constantes a_i y b_i. La razón por la que no se utiliza en la práctica es la potencialmente tremenda carga de cómputo asociada con el cálculo (y comparación) de las constantes a_i y b_i.

El resultado es que R_1 y R_2 ahora se sustituyen (tienen coeficientes cero) en la fila z con $z = 900$, como se deseaba.

La última tabla está lista para la aplicación de las condiciones de optimalidad y factibilidad de simplex, tal como se explicó en la sección 3.3.2. Dado que la función objetivo se minimiza, la variable x_1 que tiene el coeficiente más *positivo* en la fila z (=696) entra en la solución. La relación mínima de la condición de factibilidad especifica a R_1 como la variable de salida (¡compruébelo!).

Una vez que se han determinado las variables de entrada y de salida, la nueva tabla se calcula utilizando las conocidas operaciones de Gauss-Jordan.

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	0	167	-100	-232	0	0	204
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
x_4	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3

La última tabla muestra que x_1 y R_2 son las variables de entrada y de salida, respectivamente. Continuando con los cálculos simplex, se requieren dos iteraciones más para alcanzar el óptimo $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{9}{5}, z = \frac{17}{5}$ (¡compruébelo con TORA!).

Observe que las variables artificiales R_1 y R_2 se salen de la solución básica (es decir, se hacen iguales a cero) en la primera y segunda iteraciones, un resultado que es consistente con el concepto de penalizarlas en la función objetivo.

Comentarios. El uso de la penalización M no forzará la variable artificial a cero en la iteración simplex final si la PL no tiene una solución factible (es decir, las restricciones no pueden satisfacerse al mismo tiempo). En este caso, la iteración simplex final incluirá al menos una variable artificial con un valor positivo. En la sección 3.5.4 se explica esta situación.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.4A

1. Complete las iteraciones simplex del ejemplo 3.4-1 con cálculos manuales y obtenga la solución óptima.

2. *Experimento con TORA.* Genere las iteraciones simplex del ejemplo 3.4-1 utilizando el módulo Iterations ⇒ Método M de TORA (archivo *toraEx3.4-1.txt*). Compare el efecto de utilizar $M = 1, M = 10$, y $M = 1000$ en la solución. ¿Qué conclusión se puede sacar de este experimento?

3. En el ejemplo 3.4-1, identifique la tabla de inicio en cada uno de los siguientes casos (independientes) y desarrolle la fila z asociada después de sustituir todas las variables artificiales:

*(a) La tercera restricción es $x_1 + 2x_2 \geq 4$.

*(b) La segunda restricción es $4x_1 + 3x_2 \leq 6$.

(c) La segunda restricción es $4x_1 + 3x_2 = 6$.

(d) La función objetivo es maximizar $z = 4x_1 + x_2$.

4. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$-2x_1 + 3x_2 = 3 \quad (1)$$
$$4x_1 + 5x_2 \geq 10 \quad (2)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad (3)$$
$$6x_1 + 7x_2 \leq 3 \quad (4)$$
$$4x_1 + 8x_2 \geq 5 \quad (5)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

En cada uno de los siguientes problemas, desarrolle la fila z después de sustituir las variables artificiales:

(a) Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$ sujeto a (1), (3) y (4).
(b) Maximizar $z = 2x_1 + 7x_2$ sujeto a (1), (2) (4) y (5).
(c) Minimizar $z = 3x_1 + 6x_2$ sujeto a (3), (4) y (5).
(d) Minimizar $z = 4x_1 + 6x_2$ sujeto a (1), (2) y (5).
(e) Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$ sujeto a (1) y (5).

5. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Resuelva el problema con cada una de las siguientes funciones objetivo:

(a) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.
(b) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.
(c) Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + x_3$.
(d) Minimizar $z = 4x_1 - 8x_2 + 3x_3$.

***6.** Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Resuelva el problema con x_1 y x_4 como las variables básicas de inicio y sin *utilizar variables artificiales.* (*Sugerencia:* x_3 y x_4 desempeñan el papel de variables holgura. La diferencia principal es que tienen coeficientes objetivo no cero.)

7. Resuelva el siguiente problema con x_3 y x_4 como variables factibles básicas de inicio. Como en el problema 6, *no* utilice variables artificiales.

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

8. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La variable x_3 desempeña el papel de una holgura. Por lo tanto, no se requiere ninguna variable artificial en la primera restricción. En la segunda restricción, se requiere una variable artificial R. Resuelva el problema con x_3 y R como variables de inicio.

9. Demuestre que el método M llegará a la conclusión de que el siguiente problema no tiene una solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.4.2 Método de dos fases

En el método M, el uso de la penalización, M, puede conducir a un error de redondeo. El método de dos fases elimina el uso de la constante M. Como su nombre lo indica, el método resuelve la PL en dos fases; en la fase I se trata de encontrar la solución factible básica inicial y, si se halla una, se invoca la fase II para resolver el problema original.

Resumen del método de dos fases

Fase I. Ponga el problema en forma de ecuación y agregue las variables artificiales necesarias a las restricciones (exactamente como en el método M), para tener la certeza de una solución básica. A continuación, determine una solución básica de la ecuación resultante que *siempre* minimice la suma de las variables artificiales, independientemente de si la PL es de maximización o minimización. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema de PL no tiene una solución factible. De lo contrario, si el valor mínimo es cero, prosiga con la fase II.

Fase II. Use la solución factible de la fase I como una solución factible básica inicial para el problema *original*.

Ejemplo 3.4-2

Utilizamos el mismo problema del ejemplo 3.4-1.

Fase I

$$\text{Minimizar } r = R_1 + R_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \quad + R_1 \quad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \quad + R_2 \quad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La tabla asociada es

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	-1	-1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Como en el método M, R_1 y R_2 se sustituyen en la fila r mediante las siguientes operaciones de filas:

$$\text{Nueva fila } r = \text{Anterior fila } r + (1 \times \text{fila } R_1 \times \text{fila } R_2)$$

La nueva fila r se utiliza para resolver la fase I del problema, la cual da por resultado la siguiente tabla óptima (compruébelo con la opción Iterations ⇒ Two fase Method): de TORA:

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	-1	1	1

Como el mínimo $r = 0$, la fase I produce la solución factible básica $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}$ y $x_4 = 1$. En este punto, las variables artificiales ya completaron su misión, y podemos eliminar sus columnas de la tabla y continuar con la fase II.

Fase II

Después de eliminar las columnas artificiales, escribimos el problema *original* como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{5}x_3 \qquad &= \tfrac{3}{5} \\ x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 \qquad &= \tfrac{6}{5} \\ x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

En esencia, la fase I ha transformado las ecuaciones de restricciones originales de tal forma que proporciona una solución factible básica inicial para el problema, si es que existe una. La tabla asociada con la fase II del problema es por consiguiente

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

Una vez más, como las variables básicas x_1 y x_2 tienen coeficientes diferentes a cero en la fila z, deben ser sustituidas, mediante las siguientes operaciones.

$$\text{Nueva fila } z = \text{Anterior fila } z + (4 \times \text{fila } x_1 + 1 \times \text{fila } x_2)$$

La tabla inicial de la fase II es por consiguiente

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

Como estamos minimizando, x_3 debe entrar en la solución. La aplicación del método simplex producirá el óptimo en una iteración (compruébelo con TORA).

Comentarios. La eliminación de las variables artificiales y sus columnas al final de la fase I sólo puede ocurrir cuando todas son *no básicas* (como lo ilustra el ejemplo 3.4-2). Si una o más variables son *básicas* (al nivel *cero*) al final de la fase I, entonces su eliminación requiere los siguientes pasos adicionales:

Paso 1. Seleccione una variable artificial cero que salga de la solución básica y designe su fila como *fila pivote*. La variable de entrada puede ser *cualquier* variable no básica (y no artificial) con un coeficiente *diferente de cero* (positivo o negativo) en la fila pivote. Realice la iteración simplex asociada.

Paso 2. Elimine la columna de la variable artificial (que acaba de salir) de la tabla. Si ya se eliminaron todas las variables artificiales, continúe con la fase II. De lo contrario, regrese al paso 1.

La lógica detrás del paso I es que la factibilidad de las variables básicas restantes no se verá afectada cuando una variable artificial cero se vuelva no básica independientemente de si el elemento pivote es positivo o negativo. Los problemas 5 y 6, conjunto 3.4b ilustran esta situación. El problema 7 da un detalle adicional sobre los cálculos de la fase I.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.4B

***1.** En la fase I, si la PL es del tipo de maximización, explique por qué no maximiza la suma de las variables artificiales en la fase I.

2. Para cada uno de los casos del problema 4, conjunto 3.4a, escriba la función objetivo correspondiente en la fase I.

3. Resuelva el problema 5, conjunto 3.4a, por el método de dos fases.

4. Escriba la fase I para el siguiente problema, y luego resuélvalo (con TORA por comodidad) para demostrar que el problema no tiene una solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Demuestre que la fase I terminará con una variable artificial *básica* en el nivel cero (puede utilizar TORA por comodidad).

(b) Elimine la variable artificial cero antes de iniciar la fase II; luego realice las iteraciones.

6. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(a) Demuestre que la fase I termina con dos variables artificiales cero en la solución básica (use TORA por comodidad).

(b) Demuestre que cuando se aplica el procedimiento del problema 5(b) al final de la fase I, sólo una de las dos variables artificiales cero puede hacerse no básica.

(c) Demuestre que la restricción original asociada con la variable artificial cero que no puede hacerse básica en (b) debe ser redundante; por consiguiente, su fila y columnas pueden eliminarse al inicio de la fase II.

***7.** Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La tabla simplex óptima al final de la fase I es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R	Solución
r	−5	0	−2	−1	−4	0	0
x_2	2	1	1	0	1	0	2
R	−5	0	−2	−1	−4	1	0

Explique por qué las variables no básicas x_1, x_3, x_4 y x_5 nunca pueden asumir valores positivos al final de la fase II. Por consiguiente, concluimos que sus columnas pueden eliminarse antes de que iniciemos la fase II. En esencia, la eliminación de estas variables reduce las ecuaciones de restricción del problema a $x_2 = 2$, lo que indica que es necesario realizar la fase II en este problema.

8. Considere el modelo de PL

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 \geq 5$$
$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8$$
$$2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Demuestre cómo pueden modificarse las desigualdades para un conjunto de ecuaciones que requiere el uso de sólo una variable artificial (en lugar de dos).

3.5 CASOS ESPECIALES EN EL MÉTODO SIMPLEX

Esta sección considera cuatro casos especiales que surgen al aplicar el método simplex.

1. Degeneración
2. Óptimos alternativos
3. Soluciones no acotadas
4. Soluciones no existentes (o no factibles)

Para concluir esta sección se presenta una explicación *teórica* de tales situaciones, e incluso se interpreta el significado de estos casos especiales tomando como tema un problema de la vida real.

3.5.1 Degeneración

Al aplicar la condición de factibilidad del método simplex, se puede presentar un empate por la relación mínima, el cual puede romperse arbitrariamente. Cuando esto sucede, al menos una variable *básica* será cero en la siguiente iteración, y se dice que la nueva solución está **degenerada**.

La degeneración puede hacer que las iteraciones simplex ocurran de forma indefinida en **ciclos**, y que el algoritmo nunca se termine. La condición también revela que el modelo tiene por lo menos una restricción *redundante* (vea también el comentario 2 después de este ejemplo).

El siguiente ejemplo explica los impactos prácticos y teóricos de la degeneración.

Ejemplo 3.5-1 (Solución óptima degenerada)

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 9x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Utilizando las variables de holgura x_3 y x_4, las tablas de solución son

En la iteración 0, x_3 y x_4 empatan como la variable de salida, lo que provoca degeneración en la iteración 1 porque la variable x_4 asume un valor cero. El óptimo se alcanza en una iteración más..

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	−3	−9	0	0	0
x_2 entra	x_3	1	4	1	0	8
x_3 sale	x_4	1	2	0	1	4
1	z	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
x_1 entra	x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
x_4 sale	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
2	z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
(óptimo)	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
	x_1	1	0	−1	2	0

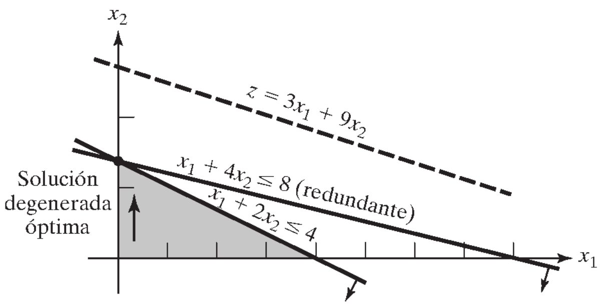


FIGURA 3.7
Degeneración de la programación lineal en el ejemplo 3.5-1

Comentarios.

1. ¿Cuál es la implicación práctica de la degeneración? Al examinar la solución gráfica en la figura 3.7 se ve que pasan tres líneas por el punto óptimo ($x_1 = 0, x_2 = 2$). Como éste es un problema bidimensional, el punto está *sobredeterminado*, y una de las restricciones es redundante.[6] En la práctica, el simple conocimiento de que algunos recursos son superfluos puede ser valioso durante la fase de implementación de la solución. La información también permite descubrir irregularidades en la construcción del modelo. Por desgracia, no existen técnicas de cómputo eficientes para identificar restricciones redundantes directamente desde la tabla.
2. Desde el punto de vista teórico, la degeneración puede provocar **ciclado**. En las iteraciones simplex 1 y 2, el valor objetivo no mejora ($z = 180$), y por lo tanto es posible que el método simplex entre en una secuencia repetitiva de iteraciones que nunca mejoran el valor objetivo ni satisfacen la condición de optimalidad (vea el problema 4, conjunto 3.5a). Aunque haya métodos para eliminar el ciclado, éstos reducen drásticamente los cálculos.[7]
3. Aun cuando quizá un modelo de PL no se inicie con restricciones redundantes (en el sentido directo que se muestra en la figura 3.7), el error de redondeo provocado por la computadora en realidad puede crear condiciones parecidas a la degeneración durante el curso del proceso de solución de una PL de la vida real. En esos casos las iteraciones se "detendrán" en un punto de solución, como si imitaran un ciclado. Los códigos comerciales tratan de aligerar el problema al perturbar periódicamente los valores de las variables básicas (para más detalles sobre cómo se desarrollan los códigos comerciales vea la sección 3.7).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5A

*1. Considere el espacio de soluciones gráficas que se muestra en la figura 3.8. Suponga que las iteraciones simplex se inician en A y que la solución óptima ocurre en D. Además, suponga que la función objetivo se define de modo que en A, x_1 ingresa primero la solución.

   (a) Identifique (en la gráfica) los puntos de esquina que definen la trayectoria del método simplex hacia el punto óptimo.

   (b) Determine el número máximo posible de iteraciones simplex necesarias para alcanzar la solución óptima, suponiendo que no hay ciclado.

---

[6] Por lo general la redundancia implica que las restricciones pueden eliminarse sin afectar el espacio de soluciones factible. Un ejemplo a veces citado es $x + y \leq 1, x \geq 1, y \geq 0$, donde la eliminación de cualquier restricción cambiará el espacio factible desde un punto único a una región. Basta decir que esta condición es cierta sólo si el espacio de soluciones se compone de un solo punto factible, una ocurrencia sumamente improbable en PL grandes (en la vida real).

[7] Vea Bland R., "New Finite Pivoting for the Simplex Method", *Mathematics of Operations Research*, vol. 2, núm., 2, págs. 103-107, 1977.

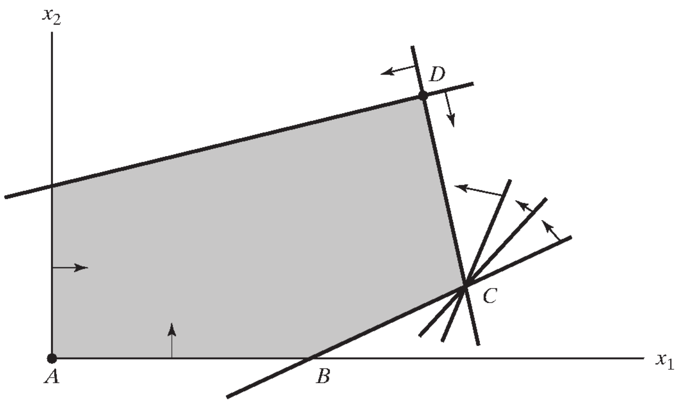


FIGURA 3.8
Espacio de soluciones del problema 1, conjunto 3.5a

2. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) Demuestre que las iteraciones simplex asociadas son temporalmente degeneradas (puede utilizar TORA por comodidad).
(b) Verifique el resultado resolviendo el problema con el módulo gráfico de TORA.

3. *Experimento con TORA*. Considere la PL en el problema 2.
(a) Use TORA para generar las iteraciones simplex. ¿Cuántas iteraciones se requieren para alcanzar el óptimo?
(b) Intercambie las restricciones (1) y (3) y vuelva a resolver el problema con TORA. ¿Cuántas iteraciones se requieren para resolverlo?
(c) Explique por qué los números de iteraciones en (a) y (b) son diferentes.

4. *Experimento con TORA*. Considere la siguiente PL (escrita por E.M. Beale para demostrar el ciclado):

$$\text{Maximizar } z = \tfrac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - 6x_4$$

sujeto a

$$\tfrac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

En el menú SOLVE/MODIFY de TORA, seleccione las opciones Solve ⇒ Algebraic ⇒ Iterations ⇒ All-slack. A continuación, "recorra" las iteraciones simplex sucesivas por medio del comando Next iteration (no utilice All iterations, porque entonces el método simplex entrará en un proceso de ciclado durante un tiempo indefinido). Notará que la solución factible básica inicial con todas las holguras en la iteración 0 reaparecerá de forma idéntica en la iteración 6. Este ejemplo ilustra la ocurrencia de ciclado en las iteraciones simplex y la posibilidad de que el algoritmo nunca converja hacia la solución óptima. (Lo interesante en este ejemplo es que si todos los coeficientes en esta PL se convierten en enteros, el ciclado no ocurre. ¡Haga la prueba!).

3.5.2 Óptimos alternativos

Un problema de PL puede tener una cantidad infinita de *óptimos alternativos* cuando la función objetivo es paralela a una restricción *obligatoria* no redundante (es decir, una restricción que se satisface como una ecuación en la solución óptima). El siguiente ejemplo demuestra la importancia práctica de tales soluciones.

Ejemplo 3.5-2 (Cantidad infinita de soluciones)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La figura 3.9 demuestra cómo pueden surgir óptimos alternativos en el modelo de PL cuando la función objetivo es paralela a una restricción obligatoria. Cualquier punto sobre el *segmento de línea BC* representa un óptimo alternativo con el mismo valor objetivo $z = 10$.

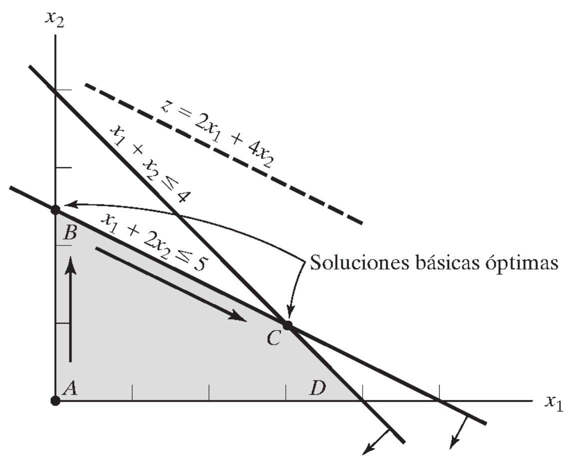


FIGURA 3.9
Óptimos alternativos de PL en el ejemplo 3.5-2

Las iteraciones del modelo se dan en la siguiente tabla.

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	-2	-4	0	0	0
x_2 entra	x_3	1	2	1	0	5
x_3 sale	x_4	1	1	0	1	4
1 (óptimo)	z	0	0	2	0	10
x_1 entra	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_4 sale	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
2	z	0	0	2	0	10
(óptimo alternativo)	x_2	0	1	1	-1	1
	x_1	1	0	-1	2	3

La iteración 1 proporciona la solución óptima $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}$ y $z = 10$ (punto B en la figura 3.9). La existencia de un óptimo alternativo puede detectarse en la tabla óptima examinando los coeficientes de las variables *no* básicas de la ecuación z. El coeficiente cero de la x_1 no básica indica que x_1 puede hacerse básica, modificando los valores de las variables básicas sin cambiar el valor de z. La iteración 2 hace justo eso, aplicando x_1 y x_4 como las variables de entrada y de salida, respectivamente. El nuevo punto de solución ocurre en C ($x_1 = 3, x_2 = 1, z = 10$).La opción "Iterations" de TORA permite determinar un óptimo alternativo.)

El método simplex determina sólo puntos de esquina óptimos; es decir, los puntos B y C en el presente ejemplo. Podemos determinar de manera matemática todos los puntos (x_1, x_2) sobre el segmento de línea BC como un promedio ponderado no negativo de los puntos $B(x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2})$ $C(x_1 = 3, x_2 = 1)$, de lo que se concluye

$$\left.\begin{array}{l}\hat{x}_1 = \alpha(0) + (1-\alpha)(3) = 3 - 3\alpha \\ \hat{x}_2 = \alpha\left(\frac{5}{2}\right) + (1-\alpha)(1) = 1 + \frac{3}{2}\alpha\end{array}\right\}, 0 \leq \alpha \leq 1$$

Comentarios. En la práctica, los óptimos alternativos son útiles porque podemos elegir de entre muchas soluciones sin que se deteriore del valor objetivo. Digamos que en este ejemplo la solución en B muestra que la actividad 2 sólo está en un nivel positivo; en cambio, en C ambas actividades están en un nivel positivo. Si el ejemplo representa una situación de combinación de productos, puede ser ventajoso comercializar dos productos en lugar de uno.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5B

***1.** Para la siguiente PL, identifique tres soluciones básicas óptimas alternativas que comprendan estas tres soluciones básicas

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nota: Aun cuando el problema tiene más de tres soluciones óptimas básicas alternativas, sólo necesita identificar tres de ellas. Puede utilizar TORA por comodidad.

2. Resuelva la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

A partir de la tabla óptima, demuestre que no todos los óptimos alternativos son puntos de esquina (es decir, no básicos). Provea una demostración gráfica bidimensional del tipo de espacio de soluciones y de función objetivo que producirá este resultado. (Puede utilizar TORA por comodidad.)

3. Para la siguiente PL demuestre que la solución óptima está degenerada y que las soluciones alternativas no son puntos de esquina (puede utilizar TORA por comodidad).

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.5.3 Solución no acotada

En algunos modelos de programación lineal, el espacio de soluciones es *no acotado* en por lo menos una variable, es decir que las variables pueden incrementarse de forma indefinida sin violar ninguna de las restricciones. En este caso el valor objetivo asociado también puede ser no acotado.

Un espacio de soluciones no acotado casi siempre indica que el modelo está mal construido. La irregularidad más probable en tales modelos es que no se han tomado en cuenta algunas restricciones clave. Otra posibilidad es que las estimaciones de los coeficientes de las restricciones quizá no sean precisas.

Ejemplo 3.5-3 (Valor objetivo no acotado)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Iteración de inicio

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-2	-1	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	10
x_4	2	0	0	1	40

En la tabla de inicio, tanto x_1 como x_2 tienen coeficientes negativos en la ecuación z, lo que significa que al incrementarse sus valores también lo hará el valor objetivo. Aunque x_1 debe ser la variable de entrada (tiene el coeficiente z más negativo), observamos que *todos* los coeficientes de *restricción* bajo x_2 son ≤ 0; lo que significa que x_2 puede incrementarse indefinidamente sin violar ninguna de las restricciones (compare con la interpretación gráfica de la relación mínima en la figura 3.5). El resultado es que z puede incrementarse indefinidamente. La figura 3.10 muestra el espacio de soluciones no acotado y también que x_2 y z pueden incrementarse indefinidamente.

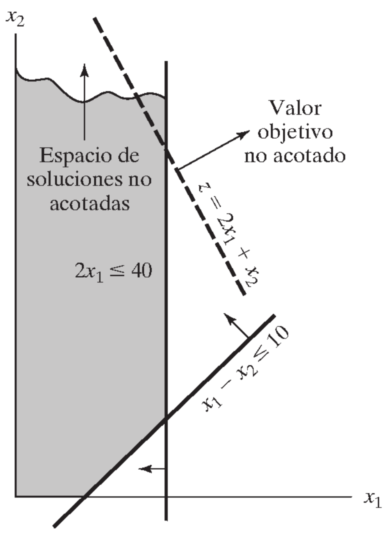


FIGURA 3.10
Solución no acotada de PL en el ejemplo 3.5-3

Comentarios. Si se hubiera seleccionado x_1 como la variable de entrada en la iteración de inicio (conforme a la condición de optimalidad), a fin de cuentas, una iteración posterior habría producido una variable de entrada con las mismas propiedades que x_2. Vea el problema 1, conjunto 3.5c.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5C

1. *Experimento con TORA*. Resuelva el ejemplo 3.5-3 aplicando la opción Iterations de TORA y demuestre que aunque la solución se inicia con x_1 como variable de entrada (conforme a la condición de optimalidad), el algoritmo simplex finalmente apuntará hacia una solución no acotada.

*2. Considere la PL:

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 10x_2 + x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1 \qquad + x_3 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Inspeccionando las restricciones, determine la dirección (x_1, x_2 o x_3) en que el espacio de soluciones sea no acotado.

(b) Sin más cálculos, ¿qué puede concluir con respecto al valor objetivo óptimo?

3. En algunos modelos de PL mal construidos, el espacio de soluciones puede ser no acotado aun cuando el problema pueda tener un valor objetivo acotado. Semejante ocurrencia apunta hacia posibles irregularidades en la construcción del modelo. En problemas grandes, puede ser difícil detectar la situación de "acotación" por inspección. Idee un procedimiento analítico para determinar si el espacio de soluciones es no acotado.

3.5.4 Solución no factible

Los modelos PL con restricciones inconsistentes no tienen una solución factible. Esta situación no ocurre si *todas* las restricciones son del tipo ≤ con lados derechos no negativos porque las holguras proporcionan una solución factible obvia. Para otros tipos de restricciones, se utilizan variables artificiales penalizadas para iniciar la solución. Si al menos una variable artificial es *positiva* en la iteración óptima, entonces la PL no tiene una solución factible. Desde el punto de vista práctico, un espacio no factible apunta hacia la posibilidad de que el modelo se formuló de manera incorrecta.

Ejemplo 3.5-4 (Espacio de soluciones no factibles)

Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

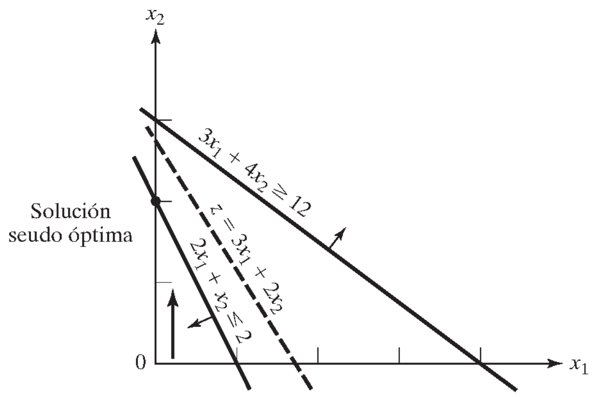


FIGURA 3.11
Solución no factible del ejemplo 3.5-4

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Aplicando la penalización $M = 100$ para la variable artificial R, la siguiente tabla proporciona la iteración simplex del modelo.

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_4	x_3	R	Solución
0	z	−303	−402	100	0	0	−1200
x_2 entra	x_3	2	1	0	1	0	2
x_3 sale	R	3	4	−1	0	1	12
1	z	501	0	100	402	0	−396
(seudo óptima)	x_2	2	1	0	1	0	2
	R	−5	0	−1	−4	1	4

La iteración óptima 1 muestra que la variable artificial R es *positiva* (= 4), es decir que la PL es no factible. La figura 3.11 ilustra el espacio de soluciones no factibles. Al permitir que la variable artificial sea positiva, el método simplex de hecho ha invertido la dirección de la desigualdad de $3x_1 + 4x_2 \geq 12$ a $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ (¿puede explicar cómo?). El resultado es lo que podemos llamar una solución **seudo óptima**.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5D

1. *Toolco produce tres tipos de herramientas, $T1$, $T2$ y $T3$. Las herramientas utilizan dos materias primas, $M1$ y $M2$, según los datos que aparecen en la siguiente tabla:

	Cantidad de unidades de materias primas por herramienta		
Materia prima	*T1*	*T2*	*T3*
$M1$	3	5	6
$M2$	5	3	4

Las cantidades diarias de materias primas $M1$ y $M2$ son 1000 unidades y 1200 unidades, respectivamente. La investigación del mercado muestra que la demanda diaria de las tres herramientas debe ser por lo menos de 500 unidades. ¿Puede satisfacer la demanda el departamento de fabricación? Si no, ¿cuál es la máxima cantidad que Toolco puede producir?

2. *Experimento con TORA*. Considere el modelo de programación lineal

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Active la opción Iterations ⇒ *M*-Method para mostrar que la solución óptima incluye una variable básica artificial, pero en el nivel cero. ¿Tiene el problema una solución óptima *factible*?

3.6 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En PL, los parámetros (datos de entrada) del modelo pueden cambiar dentro de ciertos límites sin que cambie la solución óptima. Esto se conoce como *análisis de sensibilidad* y será el tema de esta sección. Más adelante, en el capítulo 4 estudiaremos el análisis *post óptimo*, el cual tiene que ver con la determinación de la nueva solución óptima cuando se cambian ciertos datos de entrada.

La presentación explica las ideas básicas del análisis de sensibilidad por medio de la solución gráfica, y después se extienden al problema general de PL con base en los resultados que aparecen en la tabla simplex.

3.6.1 Análisis de sensibilidad gráfica

Esta sección demuestra la idea general del análisis de sensibilidad. Se considerarán dos casos:

1. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios de la disponibilidad de los recursos (lado derecho de las restricciones).
2. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios en la utilidad unitaria o el costo unitario (coeficientes de la función objetivo).

Utilizaremos ejemplos individuales para explicar los dos casos.

Ejemplo 3.6-1 (Cambios en el lado derecho)

JOBCO fabrica dos productos en dos máquinas. Una unidad del producto 1 requiere 2 horas en la máquina 1, y 1 hora en la máquina 2. Una unidad del producto 2 requiere 1 hora en la máquina 1, y 3 horas en la máquina 2. Los ingresos por unidad de los productos 1 y 2 son de \$30 y \$20, respectivamente. El tiempo de procesamiento diario total disponible en cada máquina es de 8 horas.

Si x_1 y x_2 son las cantidades diarias de unidades de los productos 1 y 2, respectivamente, el modelo de PL se da como

$$\text{Maximizar } z = 30x_1 + 20x_2$$

sujeto a

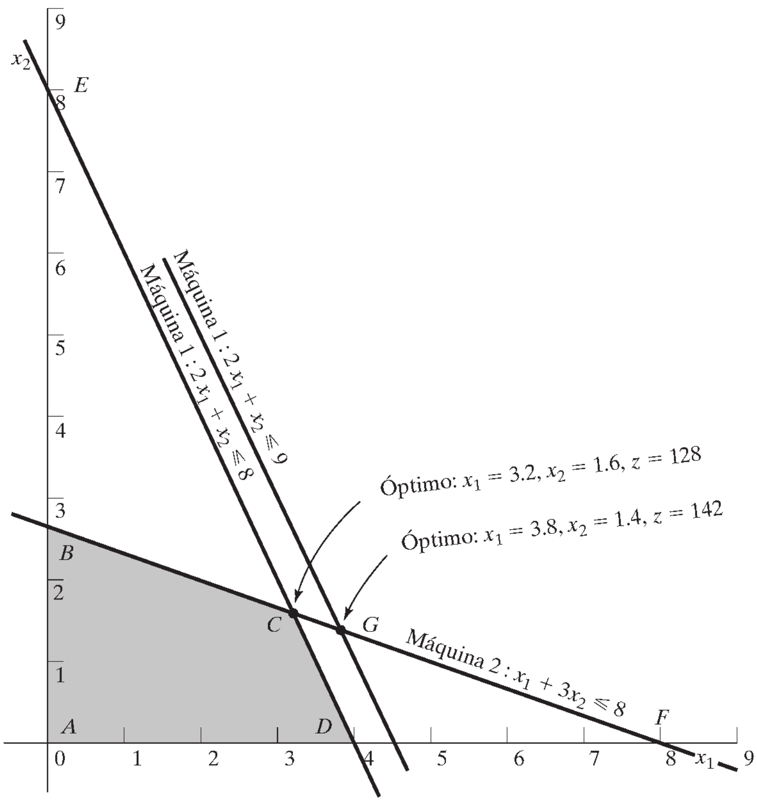
$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad x_2 &\leq 8 \qquad \text{(Máquina 1)} \\ x_1 + 3x_2 &\leq 8 \qquad \text{(Máquina 2)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La figura 3.12 ilustra el cambio de la solución óptima cuando se cambia la capacidad de la máquina 1. Si la capacidad diaria se incrementa de 8 a 9 horas, el nuevo óptimo se moverá al punto G. La tasa de cambio en la z óptima a consecuencia del cambio de la capacidad de la máquina 1 de 8 a 9 horas se calcula como:

$$\begin{pmatrix} \text{Tasa de cambio del ingreso} \\ \text{a consecuencia del incremento} \\ \text{de la capacidad de la máquina 1} \\ \text{en 1 hora (punto } C \text{ a punto } G) \end{pmatrix} = \frac{z_G - z_C}{\text{(Cambio de la capacidad)}} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = \$14/\text{h}$$

FIGURA 3.12

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en la disponibilidad de recursos (lado derecho de las restricciones)



La tasa calculada proporciona un vínculo *directo* entre los datos de entrada al modelo (recursos) y sus resultados (ingreso total). Se dice que un incremento unitario (reducción) en la capacidad de la máquina 1 aumentará (reducirá) el ingreso en \$14.00.

El nombre **valor unitario de un recurso** es una descripción apropiada de la tasa de cambio de la función objetivo por cambio unitario de un recurso. No obstante, los primeros desarrollos de la PL acuñaron el nombre abstracto de **precio dual (o sombra)**, y ahora este nombre es un estándar en toda la literatura de PL y en paquetes de "software". La presentación en este libro se ajusta a este estándar.

En la figura 3.12 podemos ver que el precio dual de \$14/h permanece válido para cambios (incrementos o reducciones) en la capacidad de la máquina 1 que mueven su restricción paralela a sí misma a cualquier punto sobre el segmento de línea BF. Calculamos las capacidades de la máquina 1 en los puntos B y F como sigue:

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 1 [en } B = (0.267)] = 2 \times 0 + 1 \times 2.67 = 2.67 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad máxima de la máquina 1 [en } F = (8,0)] = 2 \times 8 + 1 \times 0 = 16 \text{ h}$$

La conclusión es que el precio dual de \$14/h permanece válido en el intervalo

$$2.67 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 1} \leq 16 \text{ h}$$

Los cambios fuera de este intervalo producen un precio dual diferente (valor por unidad).

Elaborando cálculos similares podemos verificar que el precio dual para la capacidad de la máquina 2 es de \$2.00/h, y que no cambia cuando su capacidad se mantiene dentro del segmento de línea DE. Ahora,

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 2 [en } D = (4,0)] = 1 \times 4 + 3 \times 0 = 4 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad máxima de la máquina 2 [en } E = (8,0)] = 1 \times 0 + 3 \times 8 = 24 \text{ h}$$

Por lo tanto, el precio dual de \$200/h para la máquina 2 no cambia dentro del intervalo

$$4 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 2} \leq 24 \text{ h}$$

Los límites calculados para las máquinas 1 y 2 se conocen como **intervalos de factibilidad**. Todos los paquetes de "software" proporcionan información sobre los precios duales y sus intervalos de factibilidad. La sección 3.6.4 muestra cómo generan esta información AMPL, Solver y TORA.

Los precios duales permiten tomar decisiones económicas sobre el problema de PL, como las siguientes preguntas lo demuestran:

Pregunta 1. Si JOBCO puede incrementar la capacidad de ambas máquinas, ¿cuál máquina tendrá la prioridad?

Según los precios duales para las máquinas 1 y 2, cada hora adicional de la máquina 1 incrementa el ingreso en \$14, en comparación con sólo \$2 para la máquina 2. Por lo tanto, la máquina 1 debe tener la prioridad.

Pregunta 2. Se sugiere incrementar las capacidades de las máquinas 1 y 2 al costo adicional de \$10/h para cada máquina. ¿Es esto aconsejable?

Para la máquina 1, el ingreso neto adicional por hora es $14 - 10 = \$4$, y para la máquina 2, es $\$2 - \$10 = -\$8$. Por consiguiente, sólo la máquina 1 debe considerarse para el incremento de capacidad.

Pregunta 3. Si la capacidad de la máquina 1 se incrementa de 8 a 13 horas, ¿cómo impactará este incremento al ingreso óptimo?

El precio dual para la máquina 1 es \$14 y es válido en el intervalo (2.67,16)h. El incremento propuesto de 13 horas queda comprendido dentro del intervalo de factibilidad. Por consiguiente, el incremento del ingreso es $\$14(13 - 8) = \$70$, lo que significa que el ingreso total se incrementará de \$128 a \$198 (= \$128 + \$70).

Pregunta 4. Suponga que la capacidad de la máquina 1 se incrementa a 20 horas, ¿cómo afectará este incremento al ingreso óptimo?

El cambio propuesto queda fuera del intervalo de factibilidad (2.67,16)h. Por lo tanto, sólo podemos hacer una conclusión inmediata con respecto a un incremento hasta de 16 horas. Más allá de eso, se requieren más cálculos para hallar la respuesta (vea el capítulo 4). Recuerde que quedar fuera del intervalo de factibilidad *no* significa que el problema no tenga solución, sino que la información disponible no es suficiente para llegar a una conclusión completa.

Pregunta 5. ¿Cómo podemos determinar los nuevos valores óptimos de las variables asociadas con el cambio de un recurso?

Los valores óptimos de las variables cambiarán. Sin embargo, el procedimiento para determinar estos valores requiere más cálculos, como se demostrará en la sección 3.6.2.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6A

1. Una compañía fabrica dos productos, *A* y *B*. Los ingresos unitarios son $2 y $3, respectivamente. Las disponibilidades diarias de dos materias primas, *M*1 y *M*2, utilizadas en la fabricación de los dos productos son de 8 y 18 unidades, respectivamente. Una unidad de *A* utiliza 2 unidades de *M*1 y 2 unidades de *M*2, y una unidad de *B* utiliza 3 unidades de *M*1 y 6 unidades de *M*2.

- **(a)** Determine los precios duales de *M*1 y *M*2 y sus intervalos de factibilidad.
- **(b)** Suponga que pueden adquirirse 4 unidades más de *M*1 al costo de 30 centavos por unidad. ¿Recomendaría la compra adicional?
- **(c)** ¿Cuánto es lo máximo que la compañía debe pagar por unidad de *M*2?
- **(d)** Si la disponibilidad de *M*2 se incrementa en 5 unidades, determine el ingreso óptimo asociado.

***2.** Wild West produce dos tipos de sombreros texanos. Un sombrero tipo A requiere dos veces la mano de obra que el tipo 2. Si toda la mano de obra disponible se dedica sólo al tipo 2, la compañía puede producir un total de 400 sombreros tipo 2 al día. Los límites de mercado respectivos para los dos tipos son 150 y 200 sombreros por día. El ingreso es de $8 por sombrero tipo 1 y de $5 por sombrero tipo 2.

- **(a)** Use la solución gráfica para determinar la cantidad de sombreros de cada tipo que maximice el ingreso.
- **(b)** Determine el precio dual de la capacidad de producción (en función del sombrero tipo 2) y el intervalo dentro del cual es aplicable.
- **(c)** Si el límite de la demanda diaria del sombrero tipo 1 se reduce a 120, use el precio dual para determinar el efecto correspondiente en el ingreso óptimo.
- **(d)** ¿Cuál es el precio dual de la participación en el mercado del sombrero tipo 2? ¿Qué tanto se puede incrementar la participación en el mercado al mismo tiempo que se obtiene el valor calculado por unidad?

Ejemplo 3.6-2 (Cambios en los coeficientes objetivo)

La figura 3.13 muestra el espacio de soluciones gráficas del problema de JOBCO presentado en el ejemplo 3.6-1. El óptimo ocurre en el punto C ($x_1 = 3.2, x_2 = 1.6, z = 128$). Los cambios en unidades de ingresos (es decir, los coeficientes de la función objetivo) modificarán la pendiente de z. Sin embargo, como puede verse en la figura, la solución óptima en el punto C no cambia en tanto la función objetivo quede entre las líneas BF y DE.

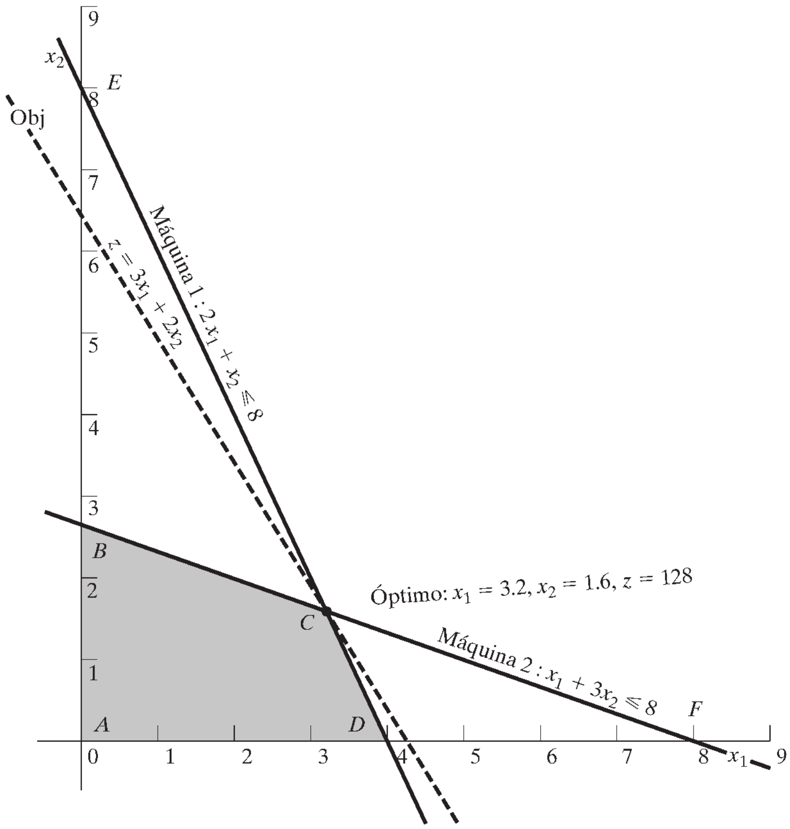


FIGURA 3.13

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en las unidades de ingreso (coeficientes de la función objetivo)

¿Cómo podemos determinar los intervalos para los coeficientes de la función objetivo que mantendrán inalterable la función óptima en C? Primero, escribimos la función objetivo en el formato general

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Imagine ahora que la línea z está pivotada en C y que puede girar en el sentido de las manecillas del reloj, así como en el sentido contrario. La solución óptima permanecerá en el punto C en tanto $z = c_1x_1 + c_2x_2$ quede entre las dos líneas $x_1 + 3x_2 = 8$, y $2x_1 + x_2 = 8$. Esto significa que la relación $\frac{c_1}{c_2}$ puede variar entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{1}$, lo que resulta en el siguiente **intervalo de optimalidad**:[8]

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{2}{1} \text{ o } .333 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$$

[8] La condición de "relación" funciona correctamente en esta situación porque las pendientes para las dos líneas que pasan por el punto óptimo C tienen el mismo signo. Otras situaciones son más complejas.

Esta información proporciona respuestas inmediatas con respecto a la solución óptima como la siguiente pregunta lo demuestra:

Pregunta 1. Suponga que los ingresos unitarios producidos para los productos 1 y 2 cambian a \$35 y \$25, respectivamente. ¿Permanecerá igual el óptimo actual?

La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 35x_1 + 25x_2$$

La solución en C permanecerá óptima porque $\frac{c_1}{c_2} = \frac{35}{25} = 1.4$ permanece dentro del intervalo de optimalidad (.333,2). Cuando la relación queda afuera de este intervalo, se requieren más cálculos para determinar el nuevo óptimo (vea el capítulo 4). Observe que aunque los valores de las variables en el punto óptimo C no cambian, el valor óptimo de z cambia a $35 \times (3.2) + 25 \times (1.6) = \$152$.

Pregunta 2. Suponga que el ingreso unitario del producto 2 se fija a su valor actual $c_2 = \$20$. ¿Cuál es el intervalo de optimalidad asociado para el ingreso unitario del producto 1, c_1, que mantendrá el óptimo sin cambio?

Sustituyendo $c_2 = 20$ en la condición $\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$, obtenemos

$$\tfrac{1}{3} \times 20 \leq c_1 \leq 2 \times 20 \text{ o } 6.67 \leq c_1 \leq 40$$

Este intervalo asume implícitamente que c_2 se mantiene fijo en \$20.

Del mismo modo podemos determinar el intervalo de optimalidad para c_2 si fijamos el valor de c_1 en \$30. Por lo tanto,

$$(c_2 \leq 30 \times 3 \text{ y } c_2 \geq \tfrac{30}{2}) \text{ o } 15 \leq c_2 \leq 90$$

Como en el caso del lado derecho, todos los paquetes de software proporcionan los intervalos de optimalidad para cada uno de los coeficientes de la función objetivo. La sección 3.6.4 muestra cómo AMPL, Solver y TORA generan estos resultados.

Comentarios. Aunque el material en esta sección se ocupó de dos variables, los resultados sientan las bases para el desarrollo del análisis de sensibilidad para el problema general de PL en las secciones 3.6.2 y 3.6.3.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6B

1. Considere el problema 1, conjunto 3.6a.
   - **(a)** Determine la condición de optimalidad para $\frac{c_A}{c_B}$ que mantendrá el óptimo sin cambio.
   - **(b)** Determine los intervalos de optimalidad para c_A y c_B, suponiendo que el otro coeficiente se mantiene constante en su valor actual.
   - **(c)** Si los ingresos unitarios c_A y c_B cambian al mismo tiempo a \$5 y \$4, respectivamente, determine la nueva solución óptima.
   - **(d)** Si los cambios en (c) se hacen uno a la vez, ¿qué se puede decir sobre la solución óptima?
2. En el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.2-1:
   - **(a)** Determine el intervalo para la relación del ingreso unitario de la pintura para exteriores con el ingreso unitario de la pintura para interiores.

(b) Si el ingreso por tonelada de pintura para exteriores permanece constante en $5000 por tonelada, determine el ingreso unitario máximo de la pintura para interiores que mantendrá la solución óptima presente sin cambios.

(c) Si por razones de comercialización el ingreso unitario de pintura para interiores debe reducirse a $3000, ¿cambiará la combinación de producción óptima actual?

***3.** En el problema 2, conjunto 3.6a:

(a) Determine el intervalo de optimalidad para la relación de los ingresos unitarios de los dos tipos de sombreros que mantendrá el óptimo actual sin cambiar.

(b) Con la información en (b), ¿cambiará la solución óptima si el ingreso por unidad es el mismo para ambos tipos?

3.6.2 Análisis de sensibilidad algebraica. Cambios en el lado derecho

En la sección 3.6.1, utilizamos la solución gráfica para determinar el *precio dual* (valor unitario de un recurso) y sus intervalos de factibilidad. Esta sección amplía el análisis al modelo de PL general. Se utilizará un ejemplo numérico (el modelo de TOYCO) para facilitar la presentación.

Ejemplo 3.6-3 (Modelo de TOYCO)

TOYCO utiliza tres operaciones para armar tres tipos de juguetes: trenes, camiones y carros. Los tiempos diarios disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos, respectivamente, y los ingresos por unidad de tren, camión y auto de juguete son de $3, $2 y $5, respectivamente. Los tiempos de ensamble por tren en las tres operaciones son de 1, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los tiempos correspondientes por tren y por auto son (2,0,4) y (1,2,0) minutos (un tiempo cero indica que la operación no se utiliza).

Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y autos, respectivamente, el modelo de PL asociado se da como:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 430 \text{ (Operación 1)} \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 460 \text{ (Operación 2)} \\ x_1 + 4x_2 &\leq 420 \text{ (Operación 3)} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando x_4, x_5 y x_6 como las variables de holgura para las restricciones de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente, la tabla óptima es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

La solución recomienda fabricar 100 camiones y 230 autos pero no trenes. El ingreso asociado es \$1350.

Determinación de precios duales e intervalos de factibilidad. Utilizaremos el modelo de TOYCO para demostrar cómo se obtiene esta información con la tabla simplex óptima. Reconociendo que los precios duales y sus intervalos de factibilidad tienen que ver con los cambios del lado derecho de las restricciones, suponga que D_1, D_2 y D_3 son los cambios (positivos o negativos) realizados en el tiempo de fabricación diario asignado de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. El modelo de TOYCO original puede cambiarse entonces a

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 430 + D_1 \quad \text{(Operación 1)}\\
3x_1 \qquad + 2x_3 &\leq 460 + D_2 \quad \text{(Operación 2)}\\
x_1 + 4x_2 \qquad &\leq 420 + D_3 \quad \text{(Operación 3)}\\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Para expresar la tabla simplex óptima del problema modificado en función de los cambios D_1, D_2 y D_3, primero volvemos a escribir la tabla de inicio con los nuevos lados derechos, $430 + D_1$, $460 + D_2$ y $420 + D_3$.

							Solución			
Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*RHS*	D_1	D_2	D_3
z	−3	−2	−5	0	0	0	0	0	0	0
x_4	1	2	1	1	0	0	430	1	0	0
x_5	3	0	2	0	1	0	460	0	1	0
x_6	1	4	0	0	0	1	420	0	0	1

Las dos áreas sombreadas son idénticas. Por consiguiente, si repetimos las *mismas* iteraciones simplex (con las *mismas* operaciones de filas) como en el modelo *original*, las columnas en las dos áreas resaltadas también serán idénticas en la tabla óptima, es decir

							Solución			
Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*RHS*	D_1	D_2	D_3
z	4	0	0	1	2	0	1350	1	2	0
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230	0	$\frac{1}{2}$	0
x_6	2	0	0	−2	1	1	20	−2	1	1

La nueva tabla óptima da la siguiente solución óptima:

$$z = 1350 + D_1 + 2D_2$$
$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}D_1 - \tfrac{1}{4}D_2$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}D_2$$
$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3$$

Ahora utilizamos esta solución para determinar los precios duales y los intervalos de factibilidad.

Precios duales: El valor de la función objetivo puede escribirse como

$$z = 1350 + \mathbf{1}D_1 + \mathbf{2}D_2 + \mathbf{0}D_3$$

La ecuación muestra que

1. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 1 ($D_1 = \pm 1$ min) cambia a z en \$1.
2. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 2 ($D_2 = \pm 1$ min) cambia a z en \$2.
3. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 3 ($D_3 = \pm 1$ min) cambia a z en \$0.

Esto significa que, por definición, los precios duales correspondientes son de 1, 2 y 0 (\$/min) para las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente.

Los coeficientes D_1, D_2 y D_3 en la fila z óptima son exactamente los de las variables de holgura x_4, x_3 y x_6. Esto significa que los precios duales son iguales a los coeficientes de las variables de holgura en la fila z óptima. No existe ambigüedad en cuanto a qué coeficiente corresponde a qué recurso porque cada variable de holgura está identificada de forma única con una restricción.

Intervalo de factiblidad: La solución actual permanece factible si todas las variables básicas permaneces no negativas, es decir

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}D_1 - \tfrac{1}{4}D_2 \geq 0$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}D_2 \geq 0$$
$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3 \geq 0$$

Los cambios simultáneos de D_1, D_2 y D_3 que satisfacen estas desigualdades mantendrán la solución factible. La nueva solución óptima se determina sustituyendo los valores de D_1, D_2 y D_3.

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que el tiempo de fabricación disponible para las operaciones 1, 2 y 3 son de 480, 440 y 400 minutos, respectivamente. Entonces, $D_1 = 480 - 430 = 50$, $D_2 = 440 - 460 = -20$ y $D_3 = 400 - 420 = -20$. Sustituyendo en las condiciones de factibilidad, obtenemos

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(50) - \tfrac{1}{4}(-20) = 130 > 0 \quad \text{(factible)}$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-20) = 220 > 0 \quad \text{(factible)}$$
$$x_6 = 20 - 2(50) + (-20) + (-10) = -110 < 0 \quad \text{(no factible)}$$

Los cálculos demuestran que $x_6 < 0$, de ahí que la solución actual no permanezca factible. Se requerirán más cálculos para encontrar la nueva solución (vea el capítulo 4).

Como alternativa, si los cambios de los recursos son tales que $D_1 = -30$, $D_2 = -12$ y $D_3 = 10$, entonces

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(-30) - \tfrac{1}{4}(-12) = 88 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_6 = 20 - 2(-30) + (-12) + (10) = 78 > 0 \quad \text{(factible)}$$

La nueva solución factible (óptima) es $x_1 = 88, x_3 = 224$, y $x_6 = 68$ con $z = 3(0) + 2(88) + 5(224) = \$1296$. Observe que el valor objetivo óptimo también puede calcularse utilizando los precios duales como $z = 1350 + 1(-30) + 2(-12) + 0(10) = \$1296$.

Las condiciones dadas pueden producir los *intervalos de factibilidad* individuales asociados con cambiar los recursos *uno a la vez* (como se define en la sección 3.6.1). Por ejemplo, un cambio del tiempo de la operación 1 sólo implica que $D_2 = D_3 = 0$. Por tanto, las condiciones simultáneas se reducen a

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 100 + \frac{1}{2}D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \geq -200 \\ x_3 = 230 > 0 \\ x_6 = 20 - 2D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \leq 10 \end{array}\right\} \Rightarrow -200 \leq D_1 \leq 10$$

Esto significa que el precio dual para la operación 1 es válido en el intervalo de factibilidad $-200 \leq D_1 \leq 10$.

Podemos demostrar del mismo modo que los intervalos de factibilidad para las operaciones 2 y 3 son $-20 \leq D_2 \leq 400$ y $-20 < D_3 < \infty$, respectivamente (¡compruébelo!).

Ahora podemos resumir los precios duales y sus intervalos de factibilidad para el modelo de TOYCO como sigue:[9]

			Cantidad de recurso (minutos)		
Recurso	Precio dual ($)	Intervalo de factibilidad	*Mínima*	*Actual*	*Máxima*
Operación 1	1	$-200 \leq D_1 \leq 10$	230	430	440
Operación 2	2	$-20 \leq D_2 \leq 400$	440	440	860
Operación 3	0	$-20 \leq D_3 < \infty$	400	420	∞

Es importante señalar que los precios duales permanecerán aplicables con cualquier cambio *simultáneo* que mantenga la solución factible, aun cuando los cambios violen los intervalos individuales. Por ejemplo, los cambios $D_1 = 30$, $D_2 = -12$ y $D_3 = 100$ mantendrán la solución factible aun cuando $D_1 = 30$ viole el intervalo de factibilidad $-200 \leq D_1 \leq 10$, como los siguientes cálculos lo demuestran:

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(30) - \tfrac{1}{4}(-12) = 118 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_6 = 20 - 2(30) + (-12) + (100) = 48 > 0 \quad \text{(factible)}$$

[9] Los paquetes de programación lineal disponibles suelen presentar esta información como resultados estándar. Prácticamente ninguno proporciona el caso de condiciones simultáneas, quizá porque su visualización es muy pesada en el caso de PL grandes.

Esto significa que los precios duales permanecerán aplicables, y que podemos calcular el nuevo valor objetivo óptimo con los precios duales como $z = 1350 + 1(30) + 2(-12) + 0(100) = \$1356$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6C[10]

1. En el modelo de TOYCO, suponga que los cambios D_1, D_2 y D_3 se hacen *al mismo tiempo* en las tres operaciones.
   - **(a)** Si la disponibilidad de las operaciones 1, 2 y 3 se cambia a 438, 500 y 410 minutos, respectivamente, aproveche las condiciones simultáneas para demostrar que la solución básica actual permanece factible, y determine el cambio del ingreso óptimo mediante los precios duales óptimos.
   - **(b)** Si la disponibilidad de las tres operaciones se cambia a 460, 440 y 380 minutos, respectivamente, aproveche las condiciones simultáneas para demostrar que la solución básica actual es no factible.

*2. Considere el modelo de TOYCO:
   - **(a)** Suponga que cualquier tiempo adicional para la operación 1 por encima de su capacidad actual de 430 minutos por día deba hacerse con base en tiempo extra a \$50 por hora. El costo por hora incluye tanto la mano de obra como la operación de la máquina. ¿Es económicamente ventajoso utilizar tiempo extra con la operación 1?
   - **(b)** Suponga que el encargado de la operación 2 ha acordado trabajar 2 horas de tiempo extra diarias a \$45 por hora. Adicionalmente, el costo de la operación propiamente dicha es de \$10 por hora. ¿Cuál es el efecto neto de esta actividad en el ingreso diario?
   - **(c)** ¿Es necesario el tiempo extra para la operación 3?
   - **(d)** Suponga que la disponibilidad diaria de la operación 1 se incrementa a 440 minutos. Cualquier tiempo extra por encima de la capacidad máxima actual costará \$40 por hora. Determine la nueva solución óptima, incluido el ingreso neto asociado.
   - **(e)** Suponga que la disponibilidad de la operación 2 se reduce en 15 minutos por día y que el costo por hora de la operación durante el tiempo regular es de \$30. ¿Es ventajoso reducir la disponibilidad de la operación 2?

3. Una compañía fabrica tres productos, A, B y C. El volumen de ventas de A es como mínimo 50% de las ventas totales de los tres productos. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 75 unidades por día. Los tres productos utilizan una materia prima de la cual la máxima disponibilidad diaria es de 240 lb. Las tasas de consumo de la materia prima son de 2 lb por unidad de A, 4 lb por unidad de B, y 3 lb por unidad de C. Los precios unitarios de A, B y C son \$20, \$50 y \$35, respectivamente.
   - **(a)** Determine la combinación óptima de productos para la compañía.
   - **(b)** Determine el precio dual de la materia prima y su intervalo permisible. Si la materia prima disponible se incrementa en 120 lb, determine la solución óptima y el cambio del ingreso total mediante el precio dual.
   - **(c)** Use el precio dual para determinar el efecto de cambiar la demanda máxima del producto A en $\pm$ 10 unidades.

[10] En este conjunto de problemas, quizá le convenga generar la tabla simplex óptima con TORA.

4. Una compañía que opera 10 horas al día fabrica tres productos con tres procesos. La siguiente tabla resume los datos del producto.

	Minutos por unidad			
Producto	*Proceso 1*	*Proceso 2*	*Proceso 3*	Precio unitario
1	10	6	8	$4.50
2	5	8	10	$5.00
3	6	9	12	$4.00

(a) Determine la combinación de productos óptima.

(b) Use el precio dual para priorizar los tres procesos para una posible expansión.

(c) Si pueden asignarse más horas de producción, ¿cuál sería un costo justo por hora adicional para cada proceso?

5. La división de educación continua del Colegio Comunitario de Ozark ofrece un total de 30 cursos cada semestre. Por lo común, los cursos ofrecidos son de dos tipos: prácticos, como carpintería, procesamiento de palabras y mantenimiento automotriz; y humanistas como historia, música y bellas artes. Para satisfacer las demandas de la comunidad, cada semestre deben ofrecerse como mínimo 10 cursos de cada tipo. La división estima que los ingresos producidos por el ofrecimiento de cursos prácticos y humanistas son aproximadamente de $1500 y $1000 por curso, respectivamente.

(a) Idee un ofrecimiento de cursos óptimo para el colegio.

(b) Demuestre que el precio dual de un curso adicional es de $1500, el cual es el mismo que el ingreso por curso práctico. ¿Qué significa este resultado en función de ofrecer cursos adicionales?

(c) ¿Cuántos cursos más pueden ofrecerse al mismo tiempo de modo que se garantice que cada uno contribuirá con $1500 al ingreso total?

(d) Determine el cambio en ingresos a consecuencia del aumento del requerimiento mínimo de cursos humanistas en un curso.

***6.** Show & Sell puede anunciar sus productos en la radio y la televisión (TV) locales, o en periódicos. El presupuesto de publicidad está limitado a $10,000 mensuales. Cada minuto de publicidad en radio cuesta $15 y cada minuto en TV cuesta $300. Un anuncio en el periódico cuesta $50. A Show & Sell le gusta anunciarse en radio al menos el doble de veces que en TV. Mientras tanto, se recomienda el uso de al menos 5 anuncios en el periódico y no más de 30 minutos de publicidad por radio al mes. La experiencia pasada muestra que la publicidad en TV es 50 veces más efectiva que la publicidad en radio, y 10 veces más efectiva que en periódicos.

(a) Determine la asignación óptima del presupuesto a los tres medios.

(b) ¿Son los límites impuestos a la publicidad por radio y periódicos económicamente justificables?

(c) Si el presupuesto mensual se incrementa en 50%, ¿produciría esto un incremento proporcional en la efectividad total de la publicidad?

7. Burroughs Garment Company fabrica camisas para caballeros y blusas para damas para Walmark Discount Stores, que aceptará toda la producción surtida por Burroughs. El proceso de producción incluye corte, costura y empacado. Burroughs emplea 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura y 5 en el empacado. La fábrica labora un turno de 8 horas, 5 días a la semana. La siguiente tabla da los requerimientos de tiempo y los precios por unidad de las dos prendas:

	Minutos por unidad			
Prenda	*Corte*	*Costura*	*Empacado*	Precio unitario ($)
Camisas	20	70	12	8.00
Blusas	60	60	4	12.00

(a) Determine el programa de producción semanal óptimo para Burroughs.

(b) Determine el valor de 1 hora de corte, costura y empacado, en función del ingreso total.

(c) Si puede utilizarse tiempo extra en los departamentos de corte y costura, ¿cuál es la tarifa por hora máxima que Burroughs debe pagar por el tiempo extra?

8. ChemLabs utiliza las materias primas I y II para producir dos soluciones de limpieza doméstica, A y B. Las disponibilidades diarias de las materias primas I y II son de 150 y 145 unidades, respectivamente. Una unidad de la solución A consume .5 unidades de la materia prima I y .6 unidades de la materia prima II, y una unidad de la solución B usa .5 unidades de la materia prima I y .4 unidades de la materia prima II. Los precios por unidad de las soluciones A y B son de $8 y $10, respectivamente. La demanda diaria de la solución A es de entre 30 y 150 unidades, y la de la solución B de entre 40 y 200 unidades.

(a) Determine las cantidades óptimas de A y B que ChemLabs debe producir.

(b) Use los precios duales para determinar qué límites de demanda de los productos A y B se deben rebajar para mejorar la rentabilidad.

(c) Si pueden adquirirse más unidades de materia prima a $20 por unidad, ¿es esto aconsejable? Explique.

(d) Se sugiere incrementar 25% la materia prima II para eliminar un cuello de botella en la producción. ¿Es esto aconsejable? Explique.

9. Una línea de ensamble compuesta de tres estaciones de trabajo consecutivas produce dos modelos de radio: DiGi-1 y DiGi-2. La siguiente tabla da los tiempos de ensamble para las tres estaciones de trabajo.

	Minutos por unidad	
Estación de trabajo	*DiGi-1*	*DiGi-2*
1	6	4
2	5	4
3	4	6

El mantenimiento diario de las estaciones de trabajo 1, 2 y 3 consume 10, 14 y 12%, respectivamente, de los 480 minutos máximos disponibles por estación cada día.

(a) La compañía desea determinar la combinación óptima de productos que minimizará los tiempos ociosos (o no utilizados) en las tres estaciones de trabajo. Determine la utilización óptima de las estaciones de trabajo. *Sugerencia:* Exprese la suma de los tiempos ociosos (holguras) para las tres operaciones en función de las variables originales.

(b) Determine el valor de reducir el tiempo de mantenimiento diario de cada estación en un punto porcentual.

(c) Se propone que el tiempo de operación de las tres estaciones se incremente a 600 minutos por día a un costo adicional de $1.50 por minuto. ¿Puede mejorarse esta propuesta?

10. Gutchi Company fabrica bolsos de mano, bolsas para rasuradora y mochilas. La construcción de los tres productos requiere piel y materiales sintéticos, dado que la piel es la materia prima limitante. El proceso de producción utiliza dos tipos de mano de obra calificada: costura y terminado. La siguiente tabla da la disponibilidad de los recursos, su uso por los tres productos, y los precios por unidad.

	Requerimientos de recursos por unidad			
Recurso	*Bolso de mano*	*Bolsa para rasuradora*	*Mochila*	Disponibilidad diaria
Piel (pies^2)	2	1	3	42
Costura (h)	2	1	2	40
Terminado (h)	1	.5	1	45
Precio ($)	24	22	45	

Formule el problema como una programación lineal, y determine la solución óptima. A continuación, indique si los siguientes cambios en los recursos mantendrán factible la solución actual. En los casos donde la factibilidad se mantiene, determine la nueva solución óptima (valores de las variables y la función objetivo).

(a) La piel disponible se incrementa a 45 pies^2.

(b) La piel disponible se reduce en 1 pie^2.

(c) Las horas de costura disponibles se cambian a 38.

(d) Las horas de costura disponibles se cambian a 46.

(e) Las horas de terminado disponibles se reducen a 15.

(f) Las horas de terminado disponibles se incrementan a 50.

(g) ¿Recomendaría contratar una costurera más a $15 la hora?

11. HiDec produce dos modelos de artefactos electrónicos que utilizan resistores, capacitores y "chips". La siguiente tabla resume los datos de la situación:

	Requerimiento de recursos unitarios		
Recurso	*Modelo 1 (unidades)*	*Modelo 2 (unidades)*	Disponibilidad máxima (unidades)
Resistores	2	3	1200
Capacitores	2	1	1000
Chips	0	4	800
Precio unitario ($)	3	4	

Sean x_1 y x_2 las cantidades producidas de los modelos 1 y 2, respectivamente. A continuación se dan el modelo y su tabla simplex óptima asociada.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1200 \quad \text{(Resistores)}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 1000 \quad \text{(Capacitores)}$$
$$4x_2 \leq 800 \quad \text{(Chips)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución
z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1750
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	450
s_3	0	0	-2	2	1	400
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	100

***(a)** Determine el estado de cada recurso.

***(b)** En función del ingreso óptimo, determine los precios duales para resistores, capacitores y chips.

(c) Determine los intervalos de factibilidad para los precios duales obtenidos en (b).

(d) Si la cantidad de resistores disponibles se incrementa a 1300 unidades, encuentre la nueva solución óptima.

***(e)** Si la cantidad de chips disponibles se reduce a 350 unidades, ¿podrá determinar la nueva solución óptima directamente con la información dada? Explique.

(f) Si el intervalo de factibilidad calculado en (c) limita la disponibilidad de capacitores, determine el intervalo correspondiente del ingreso óptimo y los intervalos correspondientes de las cantidades de unidades de los modelos 1 y 2 que se producirán.

(g) Un nuevo contratista ofrece a HiDec más resistores a 40 centavos cada uno, pero sólo si HiDec compra al menos 500 unidades. ¿Debe HiDec aceptar la oferta?

12. *Regla de la factibilidad de 100%.* Puede usarse una regla simplificada basada en los cambios *individuales* $D_1, D_2, \ldots$, y D_m en el lado derecho de las restricciones para probar si los cambios *simultáneos* mantendrán la factibilidad de la solución actual. Suponga que el lado derecho b_i de la restricción i se cambia a $b_i + D_i$ *paso a paso*, y que $p_i \leq D_i \leq q_i$ es el intervalo de factibilidad correspondiente obtenido utilizando el procedimiento de la sección 3.6.2. Por definición tenemos $p_i \leq 0$ ($q_i \geq 0$) porque representa la reducción (incremento) máxima permisible en b_i. Luego definimos r_i como igual a $\frac{D_i}{p_i}$ si D_i es negativo, y $\frac{D_i}{q_i}$ si D_i es positivo. Por definición, tenemos que $0 \leq r_i \leq 1$. La regla del 100% dice por tanto que, dados los cambios, $D_1, D_2, \ldots$, y D_m, una condición *suficiente* (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca factible es que $r_1 + r_2 + \ldots + r_m \leq 1$. Si la condición no se satisface, entonces la solución actual puede o no permanecer factible. La regla no es aplicable si D_i queda fuera del intervalo (p_i, q_i).

En realidad, la regla del 100% es demasiado débil como para que sea consistentemente útil. Aun en los casos en que la factibilidad puede confirmarse, seguimos teniendo la necesidad de obtener la nueva solución utilizando las condiciones de factibilidad simplex comunes. Además, los cálculos directos asociados con los cambios simultáneos dados en la sección 3.6.2, son simples y manejables.

Para demostrar la debilidad de la regla, aplíquela a las partes (a) y (b) del problema 1 de este conjunto. La regla no confirma la factibilidad de la solución en (a) y no es válida en (b) porque los cambios de D_i quedan fuera del intervalo admisible. El problema 13 demuestra aún más este punto.

13. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \geq 0$$

(a) Demuestre que la solución básica óptima incluye tanto a x_1 como a x_2 y que los intervalos de factibilidad considerados uno a la vez, son $-3 \leq D_i \leq 6$ y $-3 \leq D_2 \leq 6$.

(b) *Suponga que los dos recursos se incrementan al mismo tiempo en $\Delta > 0$. Primero, demuestre que la solución básica permanece factible con todos los incrementos $\Delta > 0$. Luego, demuestre que la regla del 100% confirmará la factibilidad sólo si el incremento ocurre en el intervalo $0 < \Delta \leq 3$ unidades. De lo contrario, la regla falla en el intervalo $3 < \Delta$ 6 y no es válida para $\Delta > 6$.

3.6.3 Análisis de sensibilidad algebraica. Función objetivo

En la sección 3.6.1 utilizamos el análisis de sensibilidad gráfica para determinar las condiciones que mantendrán la optimalidad de la solución de una PL de dos variables. En esta sección extendemos estas ideas al problema de programación lineal general.

Definición de costo reducido. Para facilitar la explicación del análisis de sensibilidad de la función objetivo, primero tenemos que definir los *costos reducidos*. En el modelo de TOYCO (ejemplo 3.6-2), la ecuación z objetivo que aparece en la tabla óptima puede escribirse como

$$z = 1350 - 4x_1 - x_4 - 2x_5$$

La solución óptima no produce trenes de juguete ($x_1 = 0$). La razón se pone de manifiesto en la ecuación z, donde un incremento unitario en x_1 (sobre su valor de cero actual) reduce a z en \$4, es decir, $z = 1350 - 4 \times (1) - 1 \times (0) - 2 \times (0) = \$1346$.

Podemos considerar el coeficiente de x_1 en la ecuación z (= 4) como un *costo* unitario porque reduce el ingreso z. Pero ¿de dónde proviene este "costo"? Sabemos que el ingreso por unidad de x_1 es de \$3 (según el modelo original). También sabemos que la producción de trenes de juguete incurre en un costo porque consume recursos (tiempo de operaciones). Por consiguiente, desde el punto de vista de la optimización, el "atractivo" de x_1 depende del costo de los recursos consumidos con respecto al ingreso. Esta relación define el llamado **costo reducido** y se formaliza en la literatura de PL como

$$\begin{pmatrix}\text{Costo reducido}\\ \text{por unidad}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Costo de los recursos}\\ \text{consumidos por unidad}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Ingreso}\\ \text{por unidad}\end{pmatrix}$$

Para apreciar la importancia de esta definición, en el modelo original de TOYCO el ingreso por unidad de camiones de juguete (= \$2) es menor que el de trenes de juguete (= \$3). No obstante la solución óptima recomienda producir camiones de juguete (x_2 = 100 unidades) y nada de trenes ($x_1 = 0$). La razón es que el costo de los recursos consumidos por un camión de juguete (es decir, tiempo de operaciones) es menor que su precio unitario; al contrario de lo que sucede en el caso de los trenes de juguete.

Con la definición dada de *costo reducido*, podemos ver que una variable no rentable (como x_1) puede hacerse rentable de dos maneras:

1. Incrementando el ingreso unitario.
2. Reduciendo el costo unitario de los recursos consumidos.

En la mayoría de las situaciones, las condiciones del mercado dictan el precio por unidad y puede ser difícil incrementarlo a voluntad. Por otra parte, una opción más viable es reducir el consumo de recursos porque el fabricante puede reducir el costo si hace que el proceso de producción sea más eficiente.

Determinación de los intervalos de optimalidad. Ahora nos enfocamos en la determinación de las condiciones que mantendrán una óptima solución. El desarrollo se basa en la definición de *costo reducido*.

En el modelo de TOYCO, sean d_1, d_2 y d_3 los cambios de los ingresos unitarios de camiones, trenes y autos, respectivamente. La función objetivo se escribe entonces como

$$\text{Maximizar } z = (3 + d_1)x_1 + (2 + d_2)x_2 + (5 + d_3)x_3$$

Primero consideramos la situación general en la cual todos los coeficientes objetivo cambian *al mismo tiempo*.

Con los cambios simultáneos, la fila z en la tabla de inicio aparece como:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$-3 - d_1$	$-2 - d_2$	$-5 - d_3$	0	0	0	0

Cuando generamos la tabla simplex con la misma secuencia de las variables de entrada y salida utilizadas en el modelo original (antes de que se realicen los cambios de d_i), la iteración óptima aparecerá como sigue (convénzase de que éste si es el caso realizando las operaciones de filas simplex):

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1$	0	0	$1 + \frac{1}{2}d_2$	$2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3$	0	$1350 + 100d_2 + 230d_3$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	$-\frac{1}{4}$	0	0	-2	1	1	20

La nueva tabla óptima es igual a la tabla óptima *original*, excepto por los *costos reducidos* (coeficientes de la ecuación z). Esto significa que los *cambios en los coeficientes de la función objetivo pueden afectar sólo la optimalidad del problema.* (Compare con la sección 3.6.2, donde los cambios del lado derecho sólo afectan a la factibilidad.)

En realidad no tiene que realizar la operación de filas simplex para calcular los nuevos costos reducidos. Un examen de la nueva fila z muestra que los coeficientes de d_i se toman directamente de los coeficientes de las restricciones de la tabla óptima. Una forma conveniente de calcular el nuevo costo reducido es agregar una nueva fila superior y una nueva columna más a la izquierda de la tabla óptima, como lo muestran las áreas sombreadas en la siguiente ilustración.

		d_1	d_2	d_3	0	0	0	
	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
1	z	4	0	0	1	2	0	1350
d_2	x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
d_3	x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
0	x_6	2	0	0	-2	1	1	20

Las entradas en la fila superior son los cambios d_i asociados con la variable x_j. En la columna a la extrema izquierda, el elemento superior es 1 en la fila z seguido del cambio d_i de la variable básica x_i. Tenga en cuenta que $d_i = 0$ para la variable de holgura x_i.

Para calcular el nuevo costo reducido para cualquier variable (o el valor de z), multiplique los elementos de su columna por los elementos correspondientes que aparecen en la columna a la extrema izquierda, súmelos y reste el elemento en la fila superior de la suma. Por ejemplo, para x_1, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Costo reducido de } x_1 &= [4 \times 1 + (-\tfrac{1}{4}) \times d_2 + \tfrac{3}{2} \times d_3 + 2 \times 0] - d_1 \\ &= 4 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{3}{2}d_3 - d_1 \end{aligned}$$

La solución actual permanece óptima en tanto los costos reducidos (coeficientes de la ecuación z) permanezcan no negativos (caso de maximización). Por lo tanto tenemos las siguientes *condiciones de optimalidad simultáneas* correspondientes a las x_1, x_4 y x_5 no básicas:

$$\begin{aligned} 4 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{3}{2}d_3 - d_1 &\geq 0 \\ 1 + \tfrac{1}{2}d_2 &\geq 0 \\ 2 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{1}{2}d_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Recuerde que el costo reducido de una variable básica siempre es cero, como lo muestra la tabla óptima modificada.

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que la función objetivo de TOYCO cambia de $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ a $z = 2x_1 + x_2 + 6x_3$. Entonces, $d_1 = 2 - 3 = -\$1$, $d_2 = 1 - 2 = -\$1$ y $d_3 = 6 - 5 = \$1$. La sustitución en las condiciones dadas presenta el resultado

$$\begin{aligned} &4 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{3}{2}d_3 - d_1 = 4 - \tfrac{1}{4}(-1) + \tfrac{3}{2}(1) - (-1) = 6.75 > 0 && \text{(satisfecha)} \\ &1 + \tfrac{1}{2}d_2 = 1 + \tfrac{1}{2}(-1) = .5 > 0 && \text{(satisfecha)} \\ &2 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{1}{2}d_3 = 2 - \tfrac{1}{4}(-1) + \tfrac{1}{2}(1) = 2.75 > 0 && \text{(satisfecha)} \end{aligned}$$

Los resultados muestran que los cambios propuestos mantendrán la solución actual ($x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230$) óptima (con un nuevo valor de $z = 1350 + 100d_2 + 230d_3 = 1350 + 100 \times -1 + 230 \times 1 = \$1480$. Si cualquier condición no se satisface, debe determinarse una nueva solución (vea el capítulo 4).

El tema anterior abordó el caso de maximización. La única diferencia en el caso de minimización es que los costos reducidos (coeficientes de la ecuación z) deben ser ≤ 0 para mantener la optimalidad.

Los *intervalos de optimalidad* que tienen que ver con los cambios de d_i *uno a la vez* pueden desarrollarse a partir de las condiciones de optimalidad simultáneas.[11] Por ejemplo, suponga que el coeficiente objetivo de x_2 sólo cambia a $2 + d_2$; es decir que $d_1 = d_3 = 0$. Las condiciones de optimalidad simultáneas se reducen por lo tanto a

$$\left.\begin{array}{l} 4 - \frac{1}{4}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 16 \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \geq -2 \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 8 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \leq d_2 \leq 8$$

Del mismo modo, puede verificar que los cambios individuales $(3 + d_3)$ y $(5 + d_3)$ para x_1 y x_3 dan los intervalos de optimalidad $d_1 < 4$ y $d_3 \geq -\frac{8}{3}$, respectivamente.

Las condiciones individuales dadas pueden traducirse a intervalos de ingresos unitarios totales. Por ejemplo, para los camiones de juguete (variable x_2), el ingreso unitario total es $2 + d_2$, y su intervalo de optimalidad $-2 \leq d_2 \leq 8$ se traduce a

$$\$0 \leq (\text{ingreso unitario del camión de juguete}) \leq \$10$$

Se supone que los ingresos unitarios de los trenes y autos de juguete permanecen fijos en \$3 y \$5, respectivamente.

Es importante observar que los cambios d_1, d_2 y d_3 pueden estar dentro de sus intervalos individuales permisibles sin satisfacer las condiciones simultáneas y viceversa. Por ejemplo, considere $z = 6x_1 + 8x_2 + 3x_3$. En este caso $d_1 = 6 - 3 = \$3$, $d_2 = 8 - 2 = \$6$ y $d_3 = 3 - 5 = -\$2$, los cuales quedan dentro de los intervalos individuales permisibles ($-\infty < d_1 \leq 4, -2\ d_2 \leq 8, y\ -\frac{8}{3}d_3 < \infty$). Sin embargo, las condiciones simultáneas correspondientes dan por resultado

$$4 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{3}{2}d_3 - d_1 = 4 - \tfrac{1}{4}(6) + \tfrac{3}{2}(-2) - 3 = -3.5 < 0 \quad \text{(no satisfecha)}$$

$$1 + \tfrac{1}{2}d_2 = 1 + \tfrac{1}{2}(6) = 4 > 0 \quad \text{(satisfecha)}$$

$$2 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{1}{2}d_3 = 2 - \tfrac{1}{4}(6) + \tfrac{1}{2}(-2) = -.5 < 0 \quad \text{(no satisfecha)}$$

[11] Los intervalos individuales son resultados estándar en todo software de PL. Por lo común, las condiciones simultáneas no forman parte de los resultados, quizá porque son voluminosas para problemas grandes.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6D[12]

1. En el modelo de TOYCO, determine si la solución actual cambiará en cada uno de los siguientes casos:

(i) $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$

(ii) $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$

(iii) $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$

***2.** La tienda de abarrotes B&K vende tres tipos de refrescos: las marcas Cola A1, Cola A2 y la marca más barata genérica de Cola A3. El precio por lata de A1, A2 y A3 es 80, 70 y 60 centavos, respectivamente. En promedio, la tienda no vende más de 500 latas de todos los refrescos de cola al día. Aunque A1 es una marca reconocida, los clientes tienden a comprar más A2 y A3 porque son más baratos. Se estima que como mínimo se venden 100 latas de A1 al día y que las ventas de A2 y A3 sobrepasan las de A1 por un margen de al menos 4:2.

(a) Demuestre que la solución óptima no requiere vender la marca A3.

(b) ¿Qué tanto se debe incrementar el precio por lata de A3 para que B&K la venda?

(c) Para competir con otras tiendas, B&K decidió reducir el precio de los tres tipos de refresco de cola en 5 centavos por lata. Calcule de nuevo los costos reducidos para determinar si esta promoción cambiará la solución óptima actual.

3. Baba Furniture Company emplea cuatro carpinteros durante 10 días para ensamblar mesas y sillas. Se requieren dos horas-hombre para ensamblar una mesa y 5 horas-hombre para ensamblar una silla. Los clientes suelen comprar una mesa y de cuatro a seis sillas. Los precios son $135 por mesa y $50 por silla. La compañía opera un turno de ocho horas al día.

(a) Determine la combinación de producción óptima para los 10 días.

(b) Si los precios unitarios presentes por mesa y silla se reducen en un 10%, aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima obtenida en (a) cambiará.

(c) Si los precios unitarios presentes por mesa y silla cambian a $120 y $25, ¿cambiará la solución obtenida en (a)?

4. El banco de Elkins va a asignar un máximo de $200,000 para préstamos personales y para automóvil durante el siguiente mes. El banco cobra 14% por los préstamos personales, y 12% por los préstamos para automóvil. Ambos tipos de préstamos se reembolsan al final del periodo de 1 año. La experiencia muestra que aproximadamente 3% de los préstamos personales y 2% de los préstamos para automóvil no se reembolsan. El banco suele asignar a los préstamos para automóvil el doble de lo que asigna a los préstamos personales.

(a) Determine la asignación óptima de fondos entre los dos préstamos, y la tasa neta de rendimiento en todos los préstamos.

(b) Si los porcentajes de los préstamos personales y para automóvil se cambian a 4% y 3%, respectivamente, aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima en (a) cambiará.

***5.** Electra produce cuatro tipos de motores eléctricos, cada uno en una línea de ensamble distinta. Las capacidades respectivas de las líneas son 500, 500, 800 y 750 motores por día. El motor tipo 1 utiliza 8 unidades de un determinado componente electrónico; el motor tipo 2 utiliza 5 unidades; el motor tipo 3 utiliza 4 unidades, y el motor tipo 4 utiliza 6 unidades.

[12] En este conjunto de problemas, le convendría generar la tabla simplex óptima con TORA.

El proveedor del componente puede surtir 8000 piezas por día. Los precios de los tipos de motor respectivos son \$60, \$40, \$25 y \$30.

(a) Determine la combinación óptima de producción diaria.

(b) El programa de producción actual satisface las necesidades de Electra. Sin embargo, debido a la competencia, es posible que Electra tenga que reducir el precio del motor tipo 2. ¿Cuál es la reducción máxima que puede efectuarse sin que cambie el programa de producción actual?

(c) Electra decidió reducir25% el precio de todos los tipos de motores. Aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima no cambia.

(d) Actualmente el motor tipo 4 ya no se produce. ¿Qué tanto debe incrementarse su precio para incluirlo en el programa de producción?

6. Popeye Canning firmó un contrato para recibir 60,000 lb diarias de tomates maduros a 7 centavos por libra, con los cual produce jugo de tomate enlatado, salsa de tomate y puré de tomate. Los productos enlatados se empacan en cajas de 24 latas. Una lata de jugo utiliza 1 lb de tomates frescos, una lata de salsa utiliza $\frac{1}{2}$ lb, y una lata de puré utiliza $\frac{3}{4}$ lb. La participación diaria del mercado de la compañía está limitada a 2000 cajas de jugo, 5000 cajas de salsa y 6000 cajas de puré. Los precios de mayoreo por caja de jugo, salsa y puré son \$21, \$9 y \$12, respectivamente. .

(a) Desarrolle un programa de producción diaria óptimo para Popeye.

(b) Si el precio por caja de jugo y puré permanece fijo al valor dado en el problema, aplique el análisis de sensibilidad para determinar el intervalo de precio unitario que Popeye debe cobrar por caja de salsa para mantener sin cambios la combinación de productos óptima.

7. Dean's Furniture Company ensambla gabinetes de cocina regulares y de lujo utilizando madera precortada. Los gabinetes regulares se pintan de blanco, y los de lujo se barnizan. Un departamento realiza tanto el pintado como el barnizado. La capacidad diaria del departamento de ensamble es de 200 gabinetes regulares y de 150 de lujo. El barnizado de una unidad de lujo requiere el doble de tiempo que pintar uno regular. Si el departamento de pintura/barnizado se dedica sólo a las unidades de lujo, puede completar 180 unidades diarias. La compañía estima que los ingresos por unidad de los gabinetes regulares y de lujo son de \$100 y \$140, respectivamente.

(a) Formule el problema como un programa lineal y halle el programa de producción óptimo por día.

(b) Suponga que la competencia dicta que el precio por unidad de cada gabinete regular y de lujo se reduzca a \$80. Aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima en (a) permanece sin cambios.

8. *Regla de optimalidad de 100%.* También puede desarrollarse una regla similar a la *regla de factibilidad de 100%* descrita en el problema 12, conjunto 3.6c, para probar el efecto del cambio simultáneo de todas las c_j a $c_j + d_j, j = 1, 2, \ldots, n$, en la optimalidad de la solución actual. Suponga que $u_j \leq d_j \leq v_j$ es el intervalo de optimalidad obtenido como resultado del cambio de cada c_j a $c_j + d_j$, uno a la vez, siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.6.3. En este caso $u_j \leq 0$ ($v_j \geq 0$), porque representa la reducción (incremento) máxima permisible en c_j que mantendrá óptima la solución actual. Para los casos en que $u_j \leq d_j \leq v_j$, defina r_j igual a $\frac{d_j}{v_j}$ si d_j es positivo y $\frac{d_j}{u_j}$ si d_j es negativo. Por definición, $0 \leq r_j \leq 1$. La regla de 100% dice que una condición suficiente (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca óptima es que $r_1 + r_2 + \ldots + r_n \leq 1$. Si la condición no se satisface, la solución actual puede o no permanecer óptima. La regla no aplica si d_j queda fuera de los intervalos especificados.

Demuestre que la regla de optimalidad de 100% es demasiado débil como para ser consistentemente confiable como herramienta de toma de decisiones al aplicarla a los siguientes casos.

(a) Los incisos (ii) e (iii) del problema 1

(b) El inciso (b) del problema 7

3.6.4 Análisis de sensibilidad con Tora, Solver, y AMPL

Ahora contamos con todas las herramientas para descifrar los resultados proporcionados por el software de PL, en particular con respecto al análisis de sensibilidad. Utilizaremos el ejemplo de TOYCO para demostrar lo obtenido con TORA, Solver y AMPL.

El reporte de los resultados de PL obtenidos con TORA proporciona los datos del análisis de sensibilidad de forma automática como se muestra en la figura 3.14 (archivo *toraTOYCO.txt*). Los resultados incluyen los costos reducidos y los precios duales así como los intervalos de optimalidad y factibilidad permisibles.

La figura 3.15 muestra el modelo de TOYCO analizado con Solver (archivo *solverTOYCO.xls*) y su reporte del análisis de sensibilidad. Después de hacer clic en la opción Solve en el cuadro de diálogo **Solver Parameters**, puede solicitar el reporte del análisis de sensibilidad en el nuevo cuadro de diálogo **Solver Results**. Luego haga clic en la pestaña **Sensitivity Report 1** para ver los resultados. El reporte es parecido al de TORA, con tres excepciones: (1) El costo reducido tiene un signo opuesto. (2) Utiliza el nombre *shadow price (precio sombra)* en lugar de *dual price (precio dual).* (3) Los intervalos de optimalidad son para los cambios d_j y D_j y no para los coeficientes objetivos totales y los lados derechos de las restricciones. Las diferencias son mínimas, y la interpretación de los resultados no cambia.

En AMPL, el reporte del análisis de sensibilidad se obtiene de inmediato. El archivo *amplTOYCO.txt* proporciona el código necesario para determinar los resultados obtenidos con el análisis de sensibilidad. Requiere las instrucciones adicionales (el reporte se envía al archivo `a.out`) siguientes:

```
option solver cplex;
option cplex_options 'sensitivity';
solve;
#----------------sensitivity analysis
display oper.down,oper.current,oper.up,oper.dual>a.out;
display x.down,x.current,x.up,x.rc>a.out;
```

FIGURA 3.14

Análisis de sensibilidad, realizado con TORA para el modelo de TOYCO

Sensitivity Analysis				
Variable	CurrObjCoeff	MinObjCoeff	MaxObjCoeff	Reduced Cost
x1:	3.00	-infinity	7.00	4.00
x2:	2.00	0.00	10.00	0.00
x3:	5.00	2.33	infinity	0.00
Constraint	Curr RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price
1(<):	430.00	230.00	440.00	1.00
2(<):	460.00	440.00	860.00	2.00
3(<):	420.00	400.00	infinity	0.00

	Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
6	Adjustable Cells						
9	B12	Solution x1	0	-4	3	4	1E+30
10	C12	Solution x2	100	0	2	8	2
11	D12	Solution x3	230	0	5	1E+30	2.666666667
13	Constraints						
	Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
16	E6	Operation 1 Totals	430	1	430	10	200
17	E7	Operation 2 Totals	460	2	460	400	20
18	E8	Operation 3 Totals	400	0	420	1E+30	20

FIGURA 3.15

Reporte del análisis de sensibilidad realizado con Excel Solver para el modelo de TOYCO

Se requieren las instrucciones de CPLEX `option` para obtener el reporte del análisis de sensibilidad estándar. En el modelo de TOYCO, las variables y restricciones con subíndices utilizan los nombres de raíz x y `oper.`, respectivamente. Utilizando estos nombres los sufijos alusivos `.down`, `.current` y `.up` en las instrucciones generan automáticamente el reporte del análisis de sensibilidad formateado que aparece en la figura 3.16. Los sufijos `.dual` y `.rc` proporcionan el precio dual y el costo reducido.

```
: oper.down  oper.current  oper.up  oper.dual     :=
1      230          430        440       1
2      440          460        860       2
3      400          420     1e+20p       0

:      x.down  x.current      x.up    x.rc    :=
1    -1e+20            3         7     -4
2         0            2        10      0
3         2.33333      5     1e+20      0
```

FIGURA 3.16

Reporte del análisis de sensibilidad obtenido con AMPL para el modelo de TOYCO

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6E[13]

1. Considere el problema 1, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use el precio dual para decidir si vale la pena incrementar los fondos para el año 4.

[13] Antes de resolver los problemas en este conjunto, se espera que usted genere el reporte del análisis de sensibilidad utilizando AMPL, Solver o TORA.

2. Considere el problema 2, conjunto 2.4a (capítulo 2).
   (a) Use los precios duales para determinar el rendimiento total sobre la inversión.
   (b) Si quisiera gastar \$1000 en cosas placenteras al final del año 1, ¿cómo afectaría esto a la suma acumulada al inicio del año 5?

3. Considere el problema 3, conjunto 2.4a (capítulo 2).
   (a) Dé una interpretación económica de los precios duales del modelo.
   (b) Demuestre cómo el precio dual asociado con el límite superior del dinero prestado al principio del tercer trimestre puede derivarse a partir de los precios duales asociados con las ecuaciones de balance que representan el flujo de efectivo de entrada y de salida en las cinco fechas designadas del año.

4. Considere el problema 4, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use los precios duales para determinar la tasa de rendimiento asociada con cada año.

***5.** Considere el problema 5, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use el precio dual para determinar si vale la pena que el ejecutivo invierta más dinero en los planes.

6. Considere el problema 6, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use el precio dual para decidir si es aconsejable que el jugador apueste más dinero.

7. Considere el problema 1, conjunto 2.4b (capítulo 2). Relacione los precios duales con los costos de producción unitarios del modelo.

8. Considere el problema 2, conjunto 2.4b (capítulo 2). Suponga que cualquier capacidad adicional de las máquinas 1 y 2 puede obtenerse sólo si se utiliza tiempo extra. ¿Cuál es el costo máximo por hora en que la compañía estaría dispuesta a incurrir para cualquier máquina?

***9.** Considere el problema 3, conjunto 2.4b (capítulo 2).
   (a) Suponga que el fabricante puede adquirir más unidades de la materia prima A a \$12 por unidad. ¿Sería aconsejable hacer esto?
   (b) ¿Recomendaría que el fabricante adquiriera más unidades de la materia prima B a \$5 por unidad?

10. Considere el problema 10, conjunto 2.4e (capítulo 2).
   (a) ¿Cuál de las restricciones especificadas tiene un impacto adverso en la solución óptima?
   (b) ¿Cuál es lo máximo que la compañía debe pagar por tonelada de cada mineral?

3.7 TEMAS DE CÁLCULO EN LA PROGRAMACIÓN LINEAL[14]

En este capítulo se han presentado los detalles del algoritmo simplex. Los capítulos siguientes presentan otros algoritmos: El simplex dual (capítulo 4); el simplex revisado (capítulo 7), y el punto interior (capítulo 22 en el sitio web). ¿Por qué la variedad? La razón es que cada algoritmo tiene características específicas que pueden ser benéficas en el desarrollo de códigos de computadora robustos.

Un código de PL se considera robusto si satisface dos requerimientos:

1. Velocidad
2. Precisión

Ambos requerimientos presentan retos incluso para las computadoras más avanzadas. Las razones se derivan de la naturaleza de los cálculos algorítmicos y las limitaciones de la computadora. Para estar seguros, el formato de tabla simplex presentado en

[14] Para esta sección se han tomado elementos de R. Bixby, "Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress", *Operations Research*, vol. 50, núm. 1, págs. 3-15, 2002.

este capítulo *no es numéricamente estable*, es decir que el error de redondeo cometido por la computadora y la pérdida de dígitos presentan serios problemas de cálculo, en particular cuando los coeficientes del modelo de PL difieren con mucho en magnitud. A pesar de estos retos, de hecho los diferentes algoritmos de PL se han integrado de manera ingeniosa para producir códigos altamente eficientes a fin de resolver PLs extremadamente grandes.

Esta sección explica la transición desde las presentaciones básicas en libros de texto hasta los robustos códigos de PL actuales de última generación. Aborda los temas que afectan la velocidad y la precisión y presenta remedios para aliviar los problemas. También presenta un amplio marco de referencia de los roles de los diferentes algoritmos de programación lineal (simplex, simplex dual, simplex revisado y punto interior) en el desarrollo de códigos de computadora numéricamente estables. La presentación se mantiene, expresamente, libre de matemáticas y se concentra en los conceptos clave que constituyen el fundamento de los códigos de programación lineal exitosos.

1. Regla (pivote) de la variable de entrada simplex. Una nueva iteración simplex determina las variables de entrada y de salida mediante criterios de *optimalidad* y *factibilidad*. Una vez determinadas las dos variables, se utilizan operaciones de fila pivote para generar la siguiente tabla simplex.

En realidad, el *criterio de optimalidad* presentado en la sección 3.3.2 es sólo uno de los muchos que se han utilizado en el desarrollo de códigos de PL. La siguiente tabla resume los tres criterios prominentes.

Regla de la variable de entrada	Descripción
Clásica (sección 3.3.2)	La variable de entrada es la del *costo reducido* más favorable entre todas las variables no básicas.
Mejora máxima	La variable de entrada es la que produce la *mejora total* máxima del valor objetivo entre todas las variables no básicas.
Borde más inclinado[15]	La variable de entrada es la que da el *costo reducido* más favorable entre todas las variables no básicas. El algoritmo se mueve a lo largo del *borde más inclinado* que va del punto actual a un punto extremo vecino.

En cuanto a la *regla clásica*, la fila objetivo de la tabla simplex proporciona de inmediato los costos reducidos de todas las variables no básicas sin cálculos adicionales. Por otra parte, la *regla de la mejora máxima* requiere una considerable cantidad de cálculos adicionales para determinar primero el valor con el cual una variable no básica entra en la solución y luego la mejora total resultante del valor objetivo. La idea de la *regla del borde más inclinado*, aunque en el "espíritu" de la *regla de la mejora máxima* (en el sentido de que toma en cuenta indirectamente el valor de la variable de entrada), requiere mucho menos cálculos.

[15] Vea D. Goldfarb y J. Reid, "A Practicable Steepest Edge Simplex Algorithm", *Mathematical Programming*, vol. 12, núm. 1, págs. 361-377, 1977.

El intercambio entre las tres reglas es que la *regla clásica* es la menos costosa desde el punto de vista computacional pero, sin duda, requiere la máxima cantidad de iteraciones para llegar al óptimo. Por otra parte, la *regla de la mejora máxima* es la más costosa desde el punto de vista computacional pero, sin duda, implica la cantidad mínima de iteraciones simplex. La *regla del borde más inclinado* parece ser el término medio en función de la cantidad de cálculos adicionales y la cantidad de iteraciones simplex. Es interesante observar que los resultados de prueba muestran que los beneficios generados por los cálculos adicionales en la *regla de la mejora máxima* no parecen mejores que los generados por la *regla del borde más inclinado*. Esto es lo que hace que rara vez se implemente la *regla de la mejora máxima* en los códigos de PL.

Aunque la *regla del borde más inclinado* es la regla predeterminada más común para la selección de la variable de entrada, los códigos de PL exitosos tienden a utilizar una *fijación de precios híbrida*. Inicialmente, las iteraciones simplex utilizan (una variación de) la *regla clásica*. Conforme se incrementa la cantidad de iteraciones, se hace un cambio a (una variación de) la *regla del borde más inclinado*. La extensa experiencia de cálculo indica que esta estrategia reditúa en función del tiempo total de computadora necesario para resolver una programación lineal.

2. Algoritmo primal vs. simplex dual. El capítulo 3 se concentró principalmente en los detalles de lo que en ocasiones se conoce en la literatura como *método simplex primal*. En el algoritmo primal, la solución básica inicial es factible, pero no óptima. Las iteraciones sucesivas permanecen factibles a medida que avanzan hacia el óptimo. Se desarrolló un algoritmo subsiguiente para PLs, llamado *simplex dual,* que se inicia como no factible pero óptimo y que se dirige hacia la factibilidad, al tiempo que mantiene la optimalidad. La iteración final ocurre cuando se restaura la factibilidad. Los detalles del algoritmo dual se dan en el capítulo 4, sección 4.4.1.

En un inicio, el algoritmo dual se utilizó sobre todo en el análisis post óptimo de PL (sección 4.5) y en la programación lineal entera, (capítulo 9), pero no como un algoritmo independiente para resolver PLs. La razón principal es que su regla para seleccionar la variable de salida era débil. Sin embargo, todo esto cambió cuando se adoptó la idea de la regla del borde más inclinado primal para determinar la variable de salida en el algoritmo simplex dual.[16] En la actualidad, el simplex dual con la adaptación del borde más inclinado ha demostrado que es dos veces más rápido que el simplex dual, y por el momento es el algoritmo simplex dominante en los códigos comerciales más importantes.

3. Simplex revisado vs. tabla simplex. Los cálculos simplex presentados al principio de este capítulo (y también en el capítulo 4 para el simplex dual) generan la siguiente tabla simplex a partir de la inmediata anterior. El resultado es que las tablas no son numéricamente estables por tres razones:

a. La mayoría de los modelos de PL son sumamente dispersos (es decir, contienen un alto porcentaje de coeficientes cero en la iteración de inicio). Los métodos numéricos disponibles pueden reducir la cantidad de cálculos locales al economizar (incluso eliminar) operaciones que implican coeficien-

[16] Vea J. Forrest y D. Goldfarb, "Steepest-Edge Simplex Algorith for Linear Programming", *Mathematical Programming*, vol. 57, núm. 3, págs. 341-374, 1992.

tes cero, lo que a su vez acelera sustancialmente los cálculos. Ésta es una fuerte oportunidad perdida en cálculos con tablas, porque las tablas sucesivas pronto se saturan de elementos no cero.

b. El error de redondeo y la pérdida de dígitos, inherentes en todas las computadoras, pueden propagarse con rapidez a medida que crece la cantidad de iteraciones, que llevaría a una grave pérdida de precisión, sobre todo en PL grandes.

c. Las operaciones de filas simplex realizan mas cálculos que los que se requieren para generar la siguiente tabla (recuerde que todo lo que se necesita en una iteración son las variables de entrada y de salida). Estos cálculos extra representan tiempo de computadora desperdiciado.

El algoritmo simplex revisado presentado en la sección 7.2 mejora con respecto a estas desventajas. Aunque el método utiliza las reglas de pivoteo exactas como en el método de tablas (*tableau)*, la diferencia principal es que realiza los cálculos aplicando álgebra matricial. En un modelo de m restricciones, cada solución de punto (de esquina) extremo se calcula resolviendo el conjunto de m x m ecuaciones $\mathbf{BX}_B = \mathbf{b}$ para el vector básico $\mathbf{X}_B$. La matriz básica **B** se determinar a partir de las columnas de restricciones del modelo *original*, y **b** es el lado derecho *original* de las restricciones. En esencia, sólo **B** cambia entre iteraciones. Esta propiedad única que permite controlar el error de redondeo/pérdida de dígitos, aprovecha la dispersión del modelo original y acelera los cálculos. En realidad, el análisis numérico en el álgebra matricial proporciona métodos robustos y eficientes para resolver $\mathbf{BX}_B = \mathbf{b}$ factorizando **B** en matrices triangulares de **L** inferior y **U** superior, de modo que $\mathbf{B} = \mathbf{LU}$. El método, con toda propiedad llamado descomposición L-U, es particularmente adecuado para matrices dispersas.[17]

Por estas razones el formato de tabla nunca se utiliza en los códigos de PL más destacados disponibles en la actualidad.

4. Algoritmo de barrera (punto interior) vs. algoritmo simplex. El algoritmo de punto interior (vea la sección 22.3 en el sitio web) es totalmente diferente del algoritmo simplex en que cruza el espacio factible y poco a poco se mueve (en el límite) hacia el óptimo. Computacionalmente, el algoritmo es *polinomial* en el tamaño del problema. Por otra parte, el algoritmo simplex es *exponencial* en el tamaño del problema (se han construido ejemplos hipotéticos en los que el algoritmo simplex visita *cada* punto de esquina del espacio de soluciones antes de alcanzar el óptimo).

El algoritmo de punto interior se introdujo en 1984 y, sorpresivamente, fue patentado por AT&T y vendido en una computadora especializada (aparentemente por una exuberante cantidad) sin revelar sus detalles computacionales. Al fin, la comunidad científica "se ocupó" y descubrió que el método de punto interior tenía raíces en los primeros algoritmos de programación no lineal de la década de 1960 (vea por ejemplo el algoritmo SUMT en la sección 21.2.5). El resultado es el llamado *método de barrera* con algunas variaciones algorítmicas.

Para problemas en extremo grandes, el método de barrera ha demostrado ser mucho más rápido que el algoritmo simplex dual. La desventaja es que el algoritmo de barrera no produce soluciones de punto de esquina, una restricción que limita su apli-

[17] Vea J. Bunch y J. Jopcroft, "Triangular Factorization and Inversion by Fast Matrix Multiplication", *Mathematics of Computation,* vol. 28, págs. 231-236, 1974. Vea también E. Hellerman y D. Rarick, "Reinversion with the Preassigned Pivot Procedure", *Mathematical Programming*, vol. 1, págs. 195-216, 1971.

cación en el análisis postóptimo (capítulo 4) y también en la programación entera (capítulo 9). Aunque se han desarrollado métodos para convertir una solución de punto interior óptimo de barrera en una solución de punto de esquina, la carga de computo asociada es enorme, lo que limita su uso en aplicaciones como programación entera, donde la frecuente necesidad de localizar soluciones de punto de esquina es fundamental para el algoritmo. No obstante, todos los códigos comerciales incluyen el algoritmo de barrera como herramienta para resolver PL grandes.

5. Degeneración. Como se explicó en la sección 3.5.1, las soluciones básicas degeneradas pueden generar ciclado, lo que haría que las iteraciones simplex se quedaran atascadas indefinidamente en un punto de esquina degenerado sin alcanzar su término. En las primeras versiones del algoritmo simplex, la degeneración y el ciclado no se incorporaron en la mayoría de los códigos porque se suponía que su ocurrencia en la práctica era rara. A medida que se probaron instancias de problemas más difíciles y más grandes (sobre todo en el área de la programación entera), el error de redondeo producido por las computadoras dio lugar a un comportamiento de tipo ciclado y degeneración que provocó que los cálculos "se quedaran atascados" en el mismo valor objetivo. El problema se evadió interponiendo una perturbación aleatoria condicional y cambiando los valores de las variables básicas.[18]

6. Acondicionamiento del modelo de entrada (solución previa). Todos los lenguajes y solucionadores tratan de acondicionar los datos de entrada antes de resolverlos. El objetivo es "simplificar" el modelo de dos maneras clave:[19]

a. Reduciendo el tamaño del modelo (filas y columnas) mediante la identificación y eliminación de las restricciones redundantes, y posiblemente fijando y sustituyendo las variables.

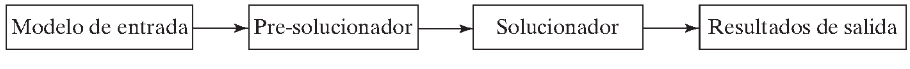
b. Ponderando los coeficientes del modelo que sean de magnitud ampliamente diferente para mitigar el efecto adverso de la pérdida de dígitos cuando se manipulan números reales de magnitudes ampliamente diferentes.

La figura 3.17 resume las etapas de solución de un problema de PL. El modelo de entrada puede ser alimentado por medio de un pre-solucionador a un solucionador, tal como CPLEX o XPRESS. Como alternativa puede usarse un lenguaje cómodo de modelado como AMPL, GAMS, MOSEL o MPL, para modelar algebraicamente la PL y luego pre-solucionar de manera interna y transformar sus datos de entrada para ajustarlos al formato del solucionador, el cual entonces produce los resultados de salida en función de las variables y restricciones del modelo de PL *original*.

7. Avance de las computadoras. No es de sorprender que en el último cuarto del siglo XX la velocidad de las computadoras se hubiera incrementado más de mil veces.

FIGURA 3.17

Componentes de una PL numérica



[18]Vea P. Harris, "Pivot Selection Methods of the debex LP Code", *Mathematical Programming*, vol. 5, págs. 1-28, 1974.

[19]Vea L. Bearley, L. Mitra, y H. Williams, "Analysis of Mathematical Programming Problems Prior to Applying Simplex Algorith", *Mathematical Programming*, vol. 8, pp. 54–83, 1975.

En la actualidad, una computadora de escritorio es más potente y veloz que las antiguas supercomputadoras. Estos avances (junto con los avances algorítmicos antes citados) han hecho posible resolver enormes PL en cuestión de segundos en comparación con días (¡sí, días!) en el pasado.

BIBLIOGRAFÍA

Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows,* 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.

Chvátal, V., *Linear Programming,* Freeman, Nueva York, 1983.

Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Dantzig, G., y M. Thapa, *Linear Programming 1: Introduction,* Springer, Nueva York, 1997.

Nering, E., y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems,* Academic Press, Boston, 1992.

Taha, H., "Linear Programming", capítulo II-1 en *Handbook of Operations* Research, J. Moder y S. Elmaghraby (eds.), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1987.