UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Taller de Introducción a la Investigación de Operaciones - Otras consideraciones de la Programación Lineal

Víctor Viana

victor.viana@cut.edu.uy

4/4/2024

Contenido

Componentes básicos

Terminología de las soluciones del modelo

Componentes básicos

Todos los modelos de Investigación de Operaciones (IO), incluido el de Programación Lineal (PL), constan de tres componentes básicos:

- Las **variables** de decisión que pretendemos determinar.
- El **objetivo** (la meta) que necesitamos optimizar (maximizar o minimizar).
- Las **restricciones** que la solución debe satisfacer.

Componentes básicos (cont.)

- La definición correcta de las variables de decisión es un primer paso esencial en el desarrollo del modelo.
- Una vez hecha, la tarea de construir la función objetivo y las restricciones es más directa.

Terminología de las soluciones del modelo

- Una **solución factible** es aquella para la que todas las restricciones se satisfacen.
- Una **solución no factible** es una solución para la que al menos una restricción se viola.
- La **región factible** es el conjunto de todas las soluciones factibles.

Puede ser que el término solución signifique la respuesta final a un problema, pero en PL (y sus extensiones) la convención es bastante distinta.

Ejemplo

$$\text{máx } z = 5x_1 + 4x_2 \tag{1}$$

s.a.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \tag{2}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \tag{3}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \tag{4}$$

$$x_2 \leq 2 \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{6}$$

- Todos los valores de x_1 y x_2 que satisfacen las cinco restricciones constituyen una solución **factible**. De lo contrario la solución es **no factible**.
- Por ejemplo, la solución $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$ es una solución factible porque no viola ninguna de las cinco restricciones. Este resultado se confirma sustituyendo $(x_1 = 3, x_2 = 1)$ en el lado izquierdo de cada restricción.
- En la restricción (2) tenemos $6x_1 + 4x_2 = 6 \times 3 + 4 + 1 = 22$, la cual es menor que el lado derecho de la restricción $(= 24)$.
- Las restricciones 3 a 6 se comprueban de la misma manera. Por otra parte, la solución $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$, es no factible porque no satisface por lo menos una restricción, por ejemplo la restricción (2): $6 \times 4 + 4 \times 1 = 28$, la cual es mayor que el lado derecho $(= 24)$.

Terminología de las soluciones del modelo (cont.)

- Una **solución óptima** es una solución factible que proporciona el valor más favorable de la función objetivo.
- El **valor más favorable** significa el valor más grande si la función objetivo debe maximizarse, o el valor más pequeño si la función objetivo debe minimizarse.
- Cualquier problema que tenga **soluciones óptimas múltiples** tendrá un número infinito de ellas, todas con el mismo valor de la función objetivo.

Terminología de las soluciones del modelo (cont.)

- **Solución alternativa**: Cuando existe más de una solución óptima
- **Óptimo único**: Cuando no existe otro óptimo
- **Óptimo sin límite**: Cuando el problema no tiene un óptimo finito.

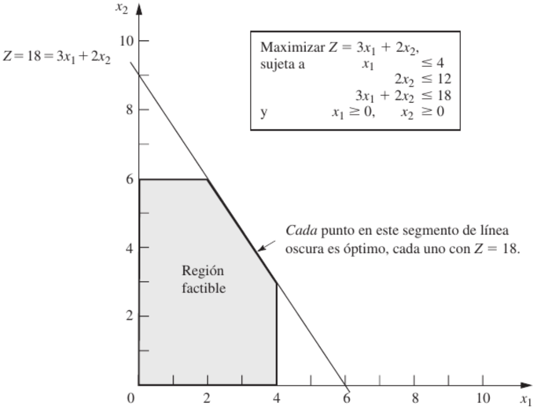


Figura: Problema con multiples soluciones

El problema no tiene soluciones óptimas

- Otra posibilidad es que el problema no tenga soluciones óptimas, lo cual ocurre sólo si:
  1. no tiene soluciones factibles, o
  2. las restricciones no impiden que el valor de la función objetivo (z) mejore indefinidamente en la dirección favorable (positiva o negativa).

     Este caso se conoce como un problema con Z no acotada u objetivo no acotado.

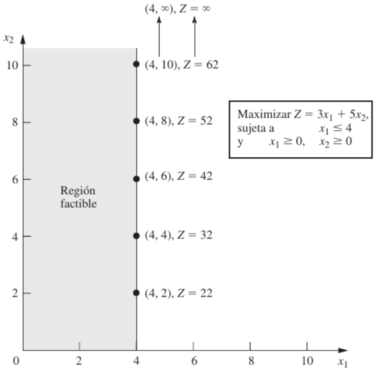


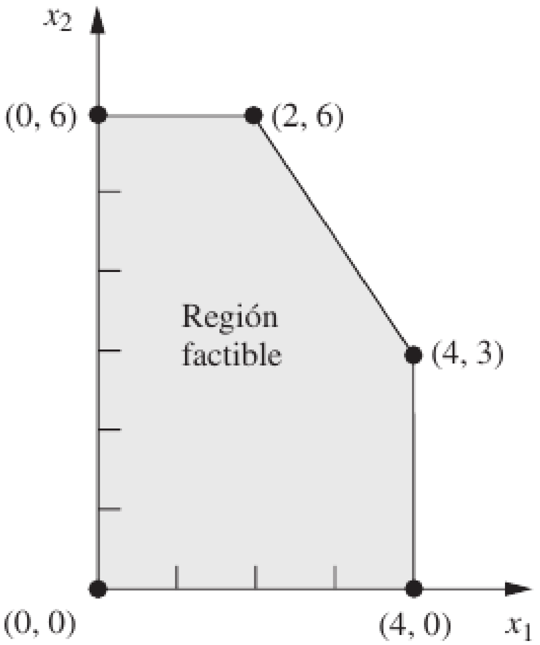
Figura: El problema anterior no tendría soluciones óptimas si la única restricción funcional fuera $x_1 \leqslant 4$, puesto que x_2 podría aumentar de modo indefinido en la región factible sin llegar a un valor máximo de $Z = 3x_1 + 5x_2$.

Propiedad

- Si hay una única solución óptima, ésta se encuentra en un vértice de la región factible, y si hay infinitas soluciones óptimas, se encontrarán en un lado de la región factible.
- Es posible que no haya solución óptima, pues cuando el recinto es no acotado, la función objetivo puede crecer o decrecer indefinidamente.
- Para resolver el problema, siempre hay que dibujar la región factible, resolviendo el sistema de inecuaciones lineales correspondiente, como se ha visto en los epígrafes anteriores (la región factible puede estar acotada o no), y se calculan los vértices de dicha región.

Solución factible en un vértice

- Una **solución factible en un vértice** (FEV) es una solución que se encuentra en una esquina de la región factible.
- Relación entre las soluciones óptimas y las soluciones FEV:
  - Considere cualquier problema de programación lineal con soluciones factibles y una región factible acotada. El problema debe poseer soluciones FEV y al menos una solución óptima.
  - Además, la mejor solución FEV debe ser una solución óptima.
  - Entonces, si un problema tiene exactamente una solución óptima, ésta debe ser una solución FEV. Si el problema tiene múltiples soluciones óptimas, al menos dos deben ser soluciones FEV.


x_2
(0, 6)
(2, 6)
Región
factible
(4, 3)
(0, 0)
(4, 0)
x_1

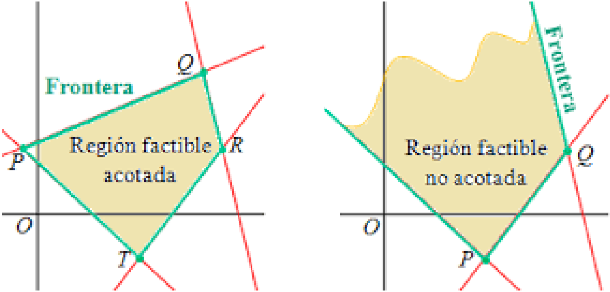
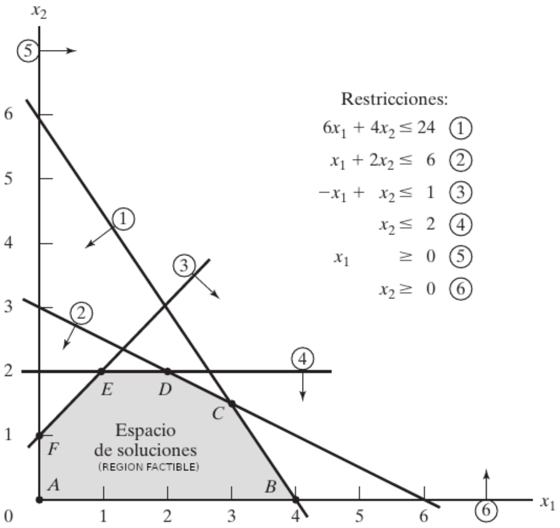


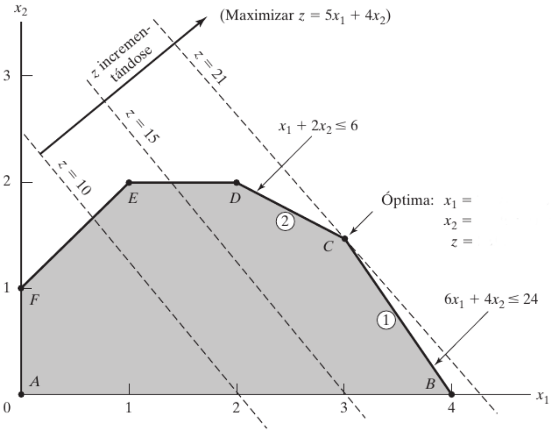
Figura: Regiones Factibles acotada y no acotada

En resumen



Restricciones:
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (1)
$x_1 + 2x_2 \leq 6$ (2)
$-x_1 + x_2 \leq 1$ (3)
$x_2 \leq 2$ (4)
$x_1 \geq 0$ (5)
$x_2 \geq 0$ (6)
Espacio de soluciones
(REGION FACTIBLE)
A
B
C
D
E
F
x_1
x_2

En resumen



x_2
(Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$)
z incremen-tándose
$z = 21$
$z = 15$
$z = 10$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$
Óptima: $x_1 =$
$x_2 =$
$z =$
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
A
B
C
D
E
F
0
1
2
3
4
x_1

Ejemplo adicional - Aserradero

- Una empresa produce listones de madera en 2 medidas: chico y mediano. Estos listones pueden producirse en dos máquinas: A y B. La cantidad de metros que puede producir por hora cada máquina es:

	A	B
chico	300	600
mediano	250	400

- Supongamos que cada máquina puede ser usada 50 horas semanales y que el costo operativo por hora de cada una es \$30 y \$50 respectivamente.
- Si se necesitan 10000 y 8000 metros de cada tipo de listones por semana, formular un modelo para minimizar costos