

Examen de Dinámica Clásica. Diploma de Especialización en Física. 2 de marzo de 2018.

La calificación de examen tiene una contribución de un 70 % de puntaje de los problemas prácticos y un 30 % de puntaje de las preguntas teóricas. Se requiere un mínimo del 50 % en cada una de estas dos partes para aprobar el examen. El porcentaje asociado a cada problema o pregunta figura en cada uno. Cada parte de cada problema o pregunta tiene el mismo puntaje.

I. Problemas Prácticos.

I.1. (25 %) Se considera un aro circular de radio a y masa M , contenido en un plano vertical, que puede girar libremente en torno a un pivote liso en un punto P fijo del aro. Una masa puntual m está enhebrada en el aro, en el que se mueve libremente sin fricción. Use como coordenadas generalizadas el ángulo θ que forma el diámetro del aro que pasa por P con la vertical, con $\theta = 0$ cuando el punto P es el punto más alto del aro, y el ángulo ϕ que forma el radio que pasa por la masa m con el diámetro mencionado antes, con $\phi = 0$ cuando la masa está en el punto más bajo del aro si $\theta = 0$, y ambos ángulos creciendo en la misma dirección.

a. Determine la Lagrangiana del sistema.

b. Halle las ecuaciones de Lagrange del sistema.

Ayudas: i. La energía cinética del aro es $T_M = \frac{1}{2}I_P\dot{\theta}^2$, con el momento de inercia $I_P = 2Ma^2$, y su energía potencial gravitatoria es la misma que si su masa M estuviera concentrada en su centro.

ii. Una relación trigonométrica que puede ser útil es $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

I.2. (20 %) Para la situación física del problema anterior, determine la Hamiltoniana (la cual debe quedar expresada solo en términos de las coordenadas generalizadas y momentos generalizados correspondientes). Diga si la Hamiltoniana se conserva o no, justificando su respuesta.

I.3. (25 %) En la situación física del problema I.1. la única configuración de equilibrio estable corresponde a $\theta = \phi = 0$. Verifique que dicha configuración efectivamente es de equilibrio (no es necesario verificar la estabilidad), y determine las frecuencias normales para las pequeñas oscilaciones en torno a este equilibrio estable.

Nota: en caso de haber algún error de detalle en la Lagrangiana obtenida en el problema I.1, necesaria en los problemas I.2 y I.3, no se penalizarán esos errores en esos dos problemas, aceptándose la Lagrangiana obtenida en el primer problema como punto de partida.

II. Preguntas de Teórico.

II.1 (15 %) Que dice el Principio de los Trabajos Virtuales de D'Alembert sobre los trabajos virtuales de las fuerzas de vínculo? Como se definen los desplazamientos virtuales considerados en dicho principio?

En un ejemplo concreto de una masa apoyada en un plano horizontal sobre el que puede moverse libremente, mientras que el plano asciende con velocidad constante V_0 en dirección vertical, de ejemplos de desplazamientos reales y virtuales, y discuta si el trabajo real y virtual de la normal del plano sobre la masa es cero en cada caso.

II.2 (15%) Defina cuando una coordenada generalizada se dice cíclica o ignorable. Que propiedad importante tiene el momento generalizado correspondiente a dicha coordenada?

De un ejemplo simple cualquiera (lo mas sencillo posible) de un sistema físico con una coordenada ignorable, escriba su Lagrangiana y calcule el momento generalizado.