Examen de Dinámica Clásica. Diploma de Especialización en Física. 12 de diciembre de 2017.

La calificación de examen tiene una contribución de un 70 % de puntaje de los problemas prácticos y un 30 % de puntaje de las preguntas teóricas. Se requier un mínimo del 50 % en cada una de estas dos partes para aprobar el examen. El porcentaje asociado a cada problema o pregunta figura en cada uno. Cada parte de cada problema o pregunta tiene el mismo puntaje.

I. Problemas Prácticos.

I.1. (25 %) Se considera un péndulo consistente de una barra rígida de masa despreciable y una masa puntual m en su extremo libre. El soporte del péndulo es forzado a moverse en una recta horizontal de modo que su posición está dada por $X(t) = a\cos(\gamma t)$, con a y γ constantes positivas. El péndulo está siempre contenido en el mismo plano vertical, que contiene la recta horizontal en la que se mueve su soporte, siendo ϕ el ángulo entre el péndulo y la vertical, el cual será la coordenada generalizada a usar.
a. Determine la Lagrangiana del sistema.
b. Escriba la ecuación de Lagrange.

I.2. (20 %) Para la situación física del problema anterior, determine el momento generalizado p_ϕ y la Hamiltoniana $H(\phi, p_\phi)$ (la cual debe quedar expresada solo en términos de esas variables). Diga si la Hamiltoniana se conserva o no, justificando su respuesta.
Nota: en caso de haber algún error de detalle en la Lagrangiana obtenida en el problema anterior, punto de partida de este problema, no se penalizará en este problema.

I.3. (25 %) Se consideran dos masas iguales m que se pueden mover en un eje horizontal sin fricción, unidas entre si por un resorte de longitud natural l y constante elástica k, y cada una de ellas unida a puntos fijos A y B respectivamente a través de sendos resortes de longitud natural l y constante elástica k. Elegimos el origen en el punto A y el eje x horizontal, estando dada la coordenada del punto B por $x_B = 3l$. En equilibrio la primera masa tiene coordenada $x_1 = l$ y la segunda masa tiene coordenada $x_2 = 2l$.
a. Halle la Lagrangiana del sistema.
b. Determine las frecuencias normales para las pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio.
c. Halle los modos normales.

II. Preguntas de Teórico.

II.1 (15 %) Se considera un sistema con un grado de libertad, con coordenada generalizada q y velocidad generalizada $\dot{q}$, cuya Lagrangiana es $L(q, \dot{q}, t)$ y su Acción es $S = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t) dt$. Verifique el Principio de Hamilton en este caso, mostrando que la condición $\delta S = 0$ implica la ecuación de Lagrange para el sistema. Explique que condición debe imponerse a δq en t_i y t_f.

II.2 (15%) Se consideran dos Lagragianas para un sistema con un grado de libertad que difieren en la derivada total de una función arbitraria $f(q, t)$ de la coordenada generalizada y el tiempo, de modo que

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}.$$

Pruebe que la ecuación de Lagrange obtenida a partir de cualquiera de estas Lagrangianas es la misma.
Nota: el resultado pedido puede verificarse por calculo directo o a partir del principio de Hamilton. Cualquiera de esas posibilidades es aceptable.