Examen de Dinámica Clásica. CURE-Agosto 2017.

La calificación de examen tiene una contribución de un 70 % de puntaje de los problemas prácticos y un 30 % de puntaje de las preguntas teóricas. Se requier un mínimo del 50 % en cada una de estas dos partes para aprobar el examen. El porcentaje asociado a cada problema o pregunta figura en cada uno. Cada parte de cada problema o pregunta tiene el mismo puntaje.

I. Problemas Prácticos.

I.1. (25 %) a. Se considera un bloque de masa M que desliza sin rozamiento sobre una rampa fija inclinada un ángulo β con respecto a la horizontal. De este bloque cuelga un péndulo consistente de una barra rígida de masa despreciable unida en uno de sus extremos a la masa M a través de una articulación lisa y una masa m en su otro extremo extremo. Todo el sistema está siempre contenido en un plano vertical xOy, con el eje x horizontal y el eje y vertical. Considere la distancia $s(t)$ de la masa M desde el punto mas alto de la rampa y el ángulo $\theta(t)$ que forma el péndulo con la vertical como coordenadas generalizadas.Determine la Lagrangiana para este sistema.
b. Halle las ecuaciones de Lagrange correspondientes a la Lagrangiana hallada en parte a.. Determine su solución en el caso particular en que $\theta(t) = \theta_0 = constante$, mostrando que dicho θ_0 debe ser $\theta_0 = -\beta$ o $\theta_0 = \pi - \beta$. Suponga que el sistema parte del reposo.
c. Considere una situación similar a la planteada en la parte a., pero con la diferencia de que ahora la rampa se mueve con aceleración constante horizontal a dirigida en la dirección en la que la altura de la rampa decrece (que elegimos como la dirección positiva del eje x), de modo que la coordenada x del extremo de la base de la rampa correspondiente a su punto mas alto es $X(t) = \frac{a}{2}t^2$. Determine la Lagrangiana del sistema en este caso.
d. Determine las ecuaciones de Lagrange correspondientes a la Lagrangiana de la parte c.. Determine cual debe ser el valor de la aceleración a para que el sistema admita una solución con $s(t) = s_0 = constante$ y $\theta(t) = \theta_0 = constante$, mostrando que dicho θ_0 debe ser $\theta_0 = -\beta$ o $\theta_0 = \pi - \beta$.
Fórmula que puede ser útil en este problema: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

I.2. (20 %) Se considera una partícula en dos dimensiones cuya Lagrangiana en coordenadas cartesianas es

$$L = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] - V(x, y)$$

mientras que su Lagrangiana en coordenadas polares es

$$L = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] - V(r, \theta).$$

a. Determine la Hamiltoniana correspondiente a la Lagrangiana en coordenadas polares.
b. En el caso particular en que la energía potencial V no dependa de θ, sino que sea solo función de r, $V = V(r)$, observe que coordenada es cíclica o ignorable y halle la magnitud conservada correspondiente.
c. La transformación de coordenadas cartesianas a polares, dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \theta = arctg(y/x)$$

es una transformación de punto, y por lo tanto es canónica, según se discutió en clase. Sin embargo se puede verificar directamente que dicha transformación es canónica calculando los corchetes de Poisson entre r, θ, p_r, p_θ, en las variables cartesianas originales. Para ello r, θ, p_r, p_θ deben expresarse en términos de x, y, p_x y p_y. Determine las relaciones faltantes $p_r = p_r(x, y, p_x, p_y)$ y $p_\theta = p_\theta(x, y, p_x, p_y)$ y escriba que valores deben tener los corchetes de Poisson entre las variables r, θ, p_r, p_θ. **No** se pide hacer los cálculos que verifican estos corchetes de Poisson, los cuales no son difíciles, pero posiblemente son demasiado largos para el tiempo del examen.

I.3. (25 %) Se consideran dos masas iguales m y tres cuerdas iguales de masa despreciable y longitud L. Las masas están apoyadas en un plano horizontal sin rozamiento, unidas entre si por una de las cuerdas, y cada una de ellas está unida a un punto fijo, A y B respectivamente, de modo que en equilibrio las dos masas y las cuerdas están contenidas en una recta, que elegimos como eje x (horizontal), y las cuerdas están tensas con tensión constante T. Elegimos el origen en el punto A y el eje y horizontal y perpendicular al eje x. En equilibrio las coordenadas (x, y) del punto fijo A son $(0, 0)$, la primera masa tiene coordenadas $(L, 0)$, la segunda masa tiene coordenadas $(2L, 0)$ y el punto fijo B tiene coordenadas $(3L, 0)$. Suponga que las masas solo pueden moverse según la dirección del eje y, de modo que la primera masa tendrá coordenadas (L, y_1), la segunda masa tendrá coordenadas $(2L, y_2)$, y que los desplazamientos son pequeños ($y_1/L \ll 1$ e $y_2/L \ll 1$). En ese caso la tensión de las cuerdas puede considerarse como constante, y la energía potencial de cada cuerda es $V = Td$, donde d es su estiramiento desde su longitud de equilibrio L (para la Lagrangiana deberá expresar d para cada cuerda en términos de y_1 e y_2). La energía potencial total de las cuerdas es la suma de las de cada una.
a. Escriba la Lagrangiana del sistema, asumiendo las condiciones dadas.
b. Estudie las pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio, determinando las frecuencias normales y los modos normales. Escriba la solución general de las ecuaciones del movimiento.

II. Preguntas de Teórico.

II.1 (15 %) a. La función de energía h para un sistema con Lagrangiana L y coordenadas generalizadas q_k, $k = 1, ..., n$, se define como

$$h = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$$

Determine la derivada total de la función h con respecto al tiempo. Establezca en que caso esta derivada será cero, de modo que h es constante. Haga el cálculo solo el caso de un grado de libertad ($n = 1$), que contiene los conceptos relevantes, sin la complicación de notación de las sumatorias.
b. La Lagrangiana de una partícula con masa m y carga eléctrica e que se mueve en tres dimensiones en un campo electromagnético con potencial escalar eléctrico $\Phi(\mathbf{r}, t)$ y potencial vector magnético $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ es

$$L = \frac{m}{2} v^2 - e\Phi(\mathbf{r}, t) + e\mathbf{v} \bullet \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

En el caso particular de un campo puramente magnético e independiente del tiempo, para el cual $\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$ y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ (independiente del tiempo), determine la función de energía y establezca si esta se conserva.

II.2 (15%) La acción en forma Hamiltoniana o a primer orden para un sistema con Hamiltoniana $H(q_k, p_k, t)$, coordenadas generalizadas q_k y momentos generalizados p_k, $k = 1, ..., n$, es

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{n} p_k dq_k - H dt \right] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - H \right] dt$$

Para el caso de un solo grado de libertad

$$S = \int_{t_0}^{t_1} [pdq - Hdt] = \int_{t_0}^{t_1} [p\dot{q} - H] \, dt$$

Pruebe que el Principio de Acción $\delta S = 0$ con la condición de extremos fijos $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$ implica las ecuaciones de Hamilton. Alcanza con que la prueba se haga para el caso de un grado de libertad (aunque el resultado es válido para cualquier n).