Práctico 4. Pequeñas Oscilaciones.
Dinámica Clásica. CURE 2017.

1. (Taylor 11.5) Se considera un resorte de constante elástica k_1 horizontal con su extremo izquierdo sujeto de una pared fija y con una masa m_1 que desliza sin rozamiento en un plano horizontal sujeta de su extremo derecho. Un segundo resorte horizontal, de constante elástica k_2, está sujeto de la masa m_1 en su extremo izquierdo y con una segunda masa m_2, que también desliza sin rozamiento en el mismo plano horizontal, en su extremo derecho. Las masas solo se mueven horizontalmente y en una dimensión.
a. Determine la Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange del sistema.
b. Determine su configuración de equilibrio estable.
c. Considere las pequeñas oscilaciones del sistema en torno al equilibrio, determinando las frecuencias normales, los modos normales y la solución general de las ecuaciones del movimiento en ese caso.

2. (Taylor 11.2) Se considera un resorte de constante elástica k_1 que cuelga verticalmente con su extremo superior sujeto del techo y con una masa m_1 sujeta de su extremo inferior. Un segundo resorte, de constante elástica k_2, está sujeto de la masa m_1 y cuelga verticalmente con una segunda masa m_2 sujeta de su extremo inferior. Las masas solo se mueven verticalmente.
a. Determine la Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange del sistema.
b. Determine su configuración de equilibrio estable.
c. Considere las pequeñas oscilaciones del sistema en torno al equilibrio, determinando las frecuencias normales, los modos normales y la solución general de las ecuaciones del movimiento en ese caso.

3. Se considera un péndulo doble, consistente de una barra rígida de masa despreciable y longitud l_1 con uno de sus extremos unido a una articulación lisa fija y el otro extremo unido a una masa m_1 y una segunda barra rígida de masa despreciable y longitud l_2 unida en uno de sus extremos a la masa m_1 a través de una articulación lisa y en el otro a una segunda masa m_2. El sistema está siempre contenido en un plano vertical, con las dos barras pudiendo girar libremente. Tome como coordenadas generalizadas los ángulos θ_1 y θ_2 que forman cada una de las barras con la vertical.
a. Determine la Lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange del sistema.
b. Determine su configuración de equilibrio estable.
c. Considere las pequeñas oscilaciones del sistema en torno al equilibrio, determinando las frecuencias normales. Sugerencia: ver Landau, § 23, problema 2.
d. En el caso particular $m_1 = 3m_2 = 3m$ y $l_1 = l_2 = l$ determine las frecuencias normales, los modos normales y la solución general de las ecuaciones del movimiento en ese caso.

4. (Taylor 11.19) Se considera un bloque de masa M que se mueve en un plano horizontal sin rozamiento. El bloque está unido a un resorte horizontal

de constante elástica k con su otro extremo unido a una pared fija. Del bloque cuelga un péndulo consistente de una masa m y una barra rígida de masa despreciable, siendo la articulación lisa. El sistema está siempre contenido en un mismo plano vertical. Elija como coordenadas generalizadas el estiramiento x del resorte y el ángulo θ entre el péndulo y la vertical.
a. Halle la Lagrangiana y las ecuaciones del movimiento del sistema.
b. Determine la configuración de equilibrio estable del sistema y la Lagrangiana y ecuaciones de Lagrange para pequeñas oscilaciones en torno a este equilibrio.
c. En el caso $M = m = 1\,kg$, $l = 1\,m$, $g = 10\,m/s^2$ y $k = 2\,N/m$ determine las frecuencias normales y los modos normales correspondientes .

5. (Taylor 11.28) Considere la situación del problema anterior, pero sin el resorte. Determine la configuración de equilibrio estable y las frecuencias normales y modos normales del sistema para las pequeñas oscilaciones del sistema. Note que una de las frecuencias normales es nula, e interprete lo que esto significa.