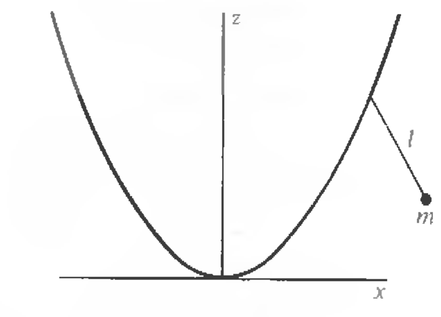
Segundo Parcial de Dinámica Clásica. CURE 2014

1. El punto de suspensión de un péndulo simple de masa *m* y longitud *l* está constreñido a moverse en una parábola de ecuación $z=\alpha x^2$, donde α es una constante, contenida en el plano vertical *xOz,* siendo el eje *z* vertical y el eje *x* horizontal. Si el péndulo está siempre contenido en el plano vertical de la parábola, determine la hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton para este problema.



2. Probar que la transformación $Q=\ln(\sin(p)/q)\,,P=q\cot(p)$ es canónica, asumiendo una hamiltoniana *H(q,p)*.

3. Un disco de radio *R,* cuyo centro está unido a una barra de longitud *l* perpendicular al plano del disco, rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, de modo tal que el otro extremo de la barra está unido a un pivote fijo O. El punto de contacto entre el disco y el plano horizontal describe un movimiento circular uniforme con velocidad angular Ω (como también lo hace el centro del disco). Determine el vector velocidad angular del disco.

4. Se considera trompo simétrico consistente de un disco de radio R y masa M cuyo centro está unido a una barra de longitud l y masa despreciable, cuyo otro extremo está unido a un pivote esférico liso fijo. El disco se mueve de tal modo que el ángulo θ entre la barra y el eje vertical es constante, y además el punto mas alto del disco P es siempre el mismo. Determine la relación (desigualdad) entre R y l para que este movimiento sea posible, y calcule la velocidad angular de precesión de la barra (o del centro del disco) en torno al eje vertical. Pista: ¿Cuanto vale $\dot{\psi}$ en esta situación?
Datos: Los momentos de inercia principales del sistema disco-barra con respecto al extremo fijo de la barra son $I_1=I_2=\dfrac{M R^2}{4}+M l^2$, $I_3=\dfrac{M R^2}{2}$.