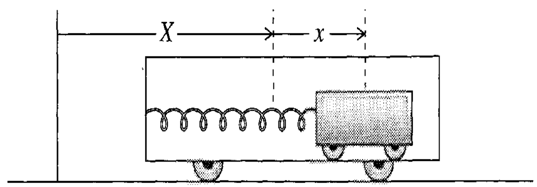
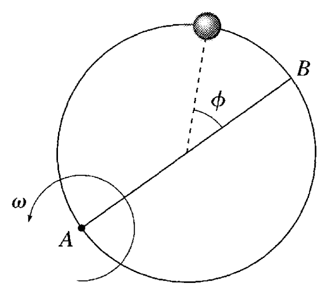
Primer Parcial de Dinámica Clásica. CURE 2014

1. Se considera un carrito de masa *m* en el interior de un vagón al que está unido por un resorte de constante elástica *k*, según se muestra en la figura. La longitud natural del resorte corresponde al punto medio del vagón, para el cual $x=0$. Suponga que la posición del vagón está dada, como resultado de una fuerza externa, por una función conocida del tiempo $X(t)$.
a. Determine la Lagrangiana del sistema en términos de la coordenada generalizada *x*.
b. Determine la ecuación del movimiento.
c. Determine la ecuación del movimiento en el caso particular $X(t)=a\frac{t^2}{2}$, donde *a* es una constante. Encuentre, si existe, una solución para la que *x* sea constante.



2. Se considera un aro de alambre de radio *R*, contenido en un plano horizontal, en el que hay enhebrada una cuenta de masa *m*, que desliza sin fricción sobre el alambre. El aro gira con velocidad angular constante ω en torno a un eje vertical que pasa por el punto A del aro. En la figura a continuación se muestra la configuración descrita, vista desde arriba.
a. Determine la Lagrangiana del sistema con ϕ como coordenada generalizada.
b. Halle la ecuación del movimiento.
c. Verifique que si ϕ es pequeño el sistema realiza pequeñas oscilaciones en torno a B, y determine el periodo de dichas oscilaciones.



3. Se considera un disco de masa *M* y radio *R* que está contenido en el plano vertical *yOz* , y apoyado en otro plano que contiene al eje horizontal *Ox*, y está inclinado un ángulo $\phi(t)$, función dada del tiempo, con respecto al eje horizontal *Oy*. Suponiendo que el disco rueda sin deslizar en todo momento sobre el plano en el que se apoya (asumimos que la función $\phi(t)$ y la fricción son tales que esto pasa):
a. Escriba la Lagrangiana del sistema.
b. Escriba la ecuación del movimiento.
c. Escriba la ecuación del movimiento si $\phi(t)=\phi_0\cos(\omega t)$ con $\phi_0<\pi/6$ y ω constantes.

4. Se considera una cuerda elástica de masa *M* y tal que su tensión es una constante *T* y su energía potencial elástica es $U_e=T(l-l_0)$, donde l es su longitud y l_0 es su longitud natural, con $l>l_0$. Suponga que la cuerda esta sostenida entre dos puntos A y B tales que $x_A=y_A=0$ y x_B e y_B son fijos (siendo *x* un eje horizontal e *y* un eje vertical).
a. Determine la funcional de energía potencial (elástica mas gravitatoria) de una configuración arbitraria *y(x)*. Note que la masa *dm* entre *x* y *x+dx* es $dm=\frac{M}{(x_B-x_A)}dx$, proporcional a *dx*, y no a *dl* (como en el caso de la cuerda inextensible).
b. Halle la ecuación diferencial que resulta de pedir que *y(x)* sea una extremal de la energía potencial, la cual corresponde a la configuración de equilibrio de la cuerda.
c. Suponiendo $x_A=y_A=0$ y $x_B=l_0, y_B=0$ y que la tensión T es grande, de modo que *y(x)* es pequeño, resuelva la ecuación y halle *y(x)*.