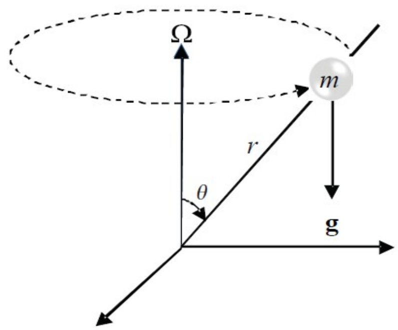
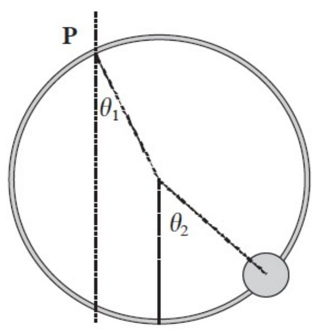
Examen de Dinámica Clásica. CURE. Febrero 2015

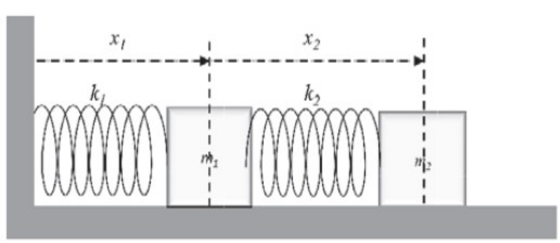
1. Una bolita de masa *m* desliza sin fricción sobre un alambre rectilíneo en el que está enhebrada. El alambre forma un angulo constante θ con la vertical. El plano que contiene al alambre y un eje vertical fijo rota en torno a dicho eje con velocidad angular constante Ω, como se muestra en la figura.
a. Escriba la Lagrangiana del problema con la distancia *r* desde la bolita al punto fijo del alambre como coordenada generalizada.
b. Halle las ecuaciones del movimiento.
c. Determine si hay soluciones con $r(t)=r_0=constante$ y estudie su estabilidad.
d. Determine la función de energía *h* y la energía *E* . ¿Coincide *h* con la energía *E*? ¿Se conserva alguna de estas magnitudes?



2. Se considera un aro de radio R y masa M contenido en un plano vertical en el que puede moverse rotar libremente en torno a un pivote fijo sin rozamiento en su punto P. Sobre el aro desliza sin rozamiento una cuenta de masa M (igual a la del aro) enhebrada en este, como se muestra en la figura.
a. Determine la Lagrangiana del sistema en términos de las coordenadas generalizadas θ_1 y θ_2 .
b. Determine las ecuaciones del movimiento del sistema.
c. Determine las soluciones con θ_1 y θ_2 constantes.



3. Se consideran dos masas en un plano horizontal, unidas por un resorte y con una de ellas unida a una pared por otro resorte, como se muestra en la figura.
a. Determine la Lagrangiana, con x_1 y x_2 como coordenadas generalizadas.
b. Determine los momentos generalizados y la Hamiltoniana del sistema en términos de sus coordenadas generalizadas y momentos generalizados.
c. Determine las ecuaciones del movimiento del sistema usando las ecuaciones de Hamilton.



4. Un disco homogéneo de masa *m* y radio *r*, cuyo centro está unido a una barra de longitud *l* perpendicular al plano del disco, rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, de modo tal que el otro extremo de la barra está unido a un pivote fijo O en el plano, como se muestra en la figura. El punto de contacto entre el disco y el plano horizontal describe un movimiento circular uniforme con velocidad angular Ω (como también lo hace el centro del disco).

a. Determine el vector velocidad angular del disco, teniendo en cuenta que este rueda sin deslizar, en términos de Ω y θ .

b. Escriba la Lagrangiana del sistema, en término de los ángulos de Euler y tomando como origen el pivote O. Tenga en cuenta que el ángulo de Euler Θ no es el que aparece en la figura, sino $\Theta=\pi/2-\theta$, y que es constante.

Los momentos de inercia principales del sistema disco-barra con respecto al extremo fijo de la barra son $I_1=I_2=\frac{mr^2}{4}+ml^2$, $I_3=\frac{mr^2}{2}$. Note que los ángulos de Euler φ and ψ no son independientes, ya que la condición de rodadura impone una relación entre sus derivadas temporales $\dot{\varphi}$ y $\dot{\psi}$ (determine esta relación), por lo que el sistema tiene solo un grado de libertad.

c. Escriba la ecuación del movimiento y pruebe que $\dot{\varphi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes.