EXAMEN DE DINÁMICA CLÁSICA - DICIEMBRE 2014

CURE

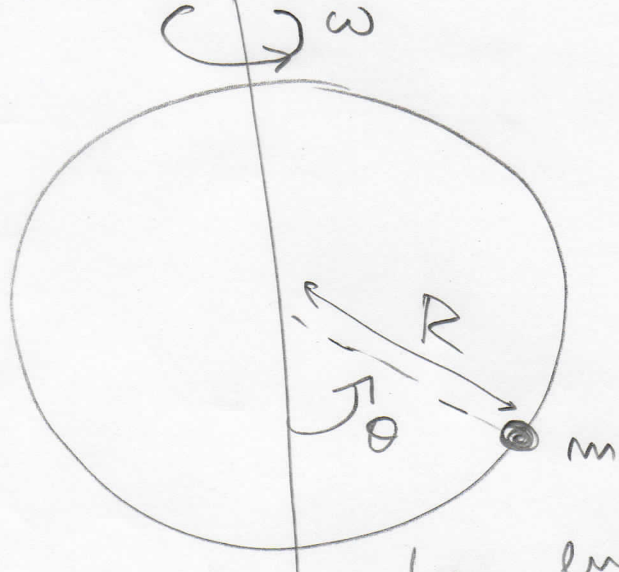
1. Una partícula de masa m se mueve sin fricción sobre un aro vertical de radio R. La partícula (o mas bien "cuenta") está enhebrada en el aro, de modo que está vinculada a moverse sobre este. El aro gira con velocidad angular ω constante en torno a un eje vertical que contiene a uno de sus diámetros.

a. Escriba la lagrangiana del sistema

b. Determine las ecuaciones del movimiento

c. ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio?

d. Determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable. Discuta la estabilidad según el valor de ω.

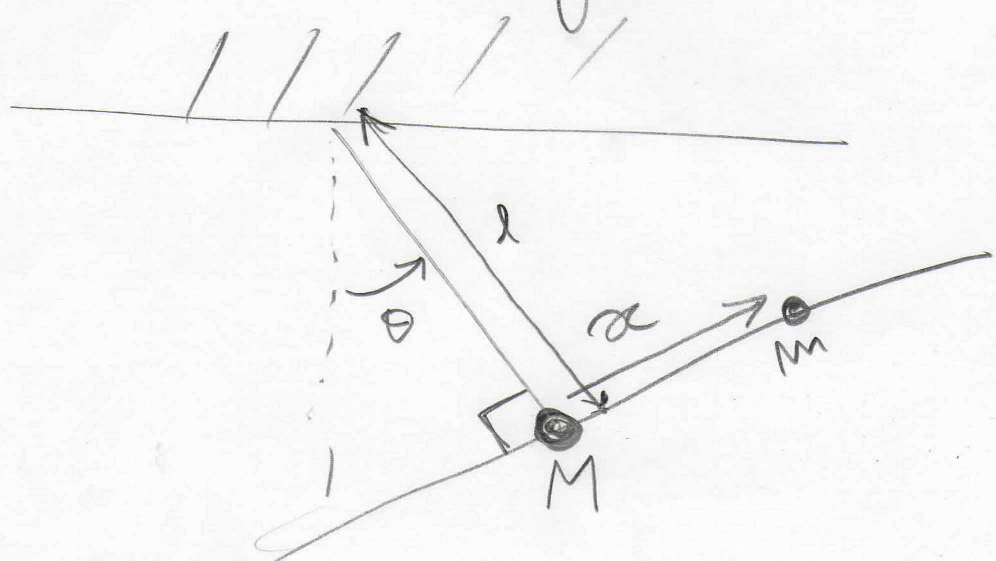


e. ¿Se conserva la energía?

¿Se conserva la función h?

Escriba la energía E y la función h.

2 Se considera una masa $\underline{M}$ unida a un extremo de una varilla de masa despreciable y longitud $\underline{l}$, cuyo otro extremo está unido a un pivote fijo, de modo que la masa $\underline{M}$ y la varilla pueden oscilar en un plano vertical, como un péndulo. Además, unida a la primera varilla en M y formando un ángulo recto con ésta, hay una segunda varilla, también de masa despreciable, sobre la que desliza sin fricción una masa $\underline{m}$. Suponga que la segunda varilla es larga, de modo que $\underline{m}$ no llega a sus extremos y que el vínculo de $\underline{m}$ es bilateral. Determine la lagrangiana y ecs. del movimiento del sistema. Tome x y θ (ver figura) como coordenadas generalizadas.



3 Una masa $\underline{\underline{M}}$ desliza sin rozamiento sobre un plano inclinado un ángulo β con respecto a la horizontal. Un péndulo consistente de una varilla de longitud $\underline{\underline{l}}$ y masa despreciable, y una masa $\underline{\underline{m}}$ en su extremo, cuelga de la masa $\underline{\underline{M}}$.

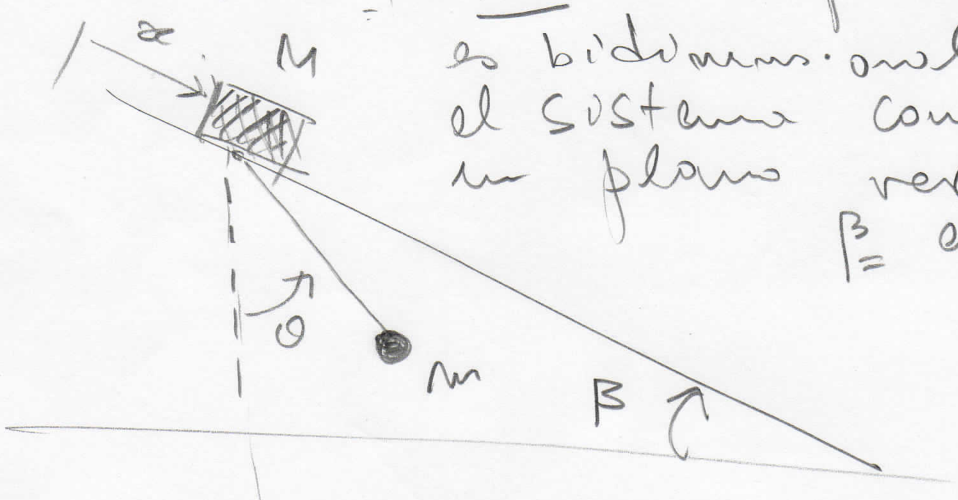
a. Determine la Lagrangiana del sistema

b. Determine los momentos generalizados y la hamiltoniana del sistema

c. Halle las ecuaciones del movimiento en la forma de las ecuaciones de Hamilton.

d. ¿Es la hamiltoniana constante del movimiento?

Notas: El problema es bidimensional, con el sistema contenido en un plano vertical. $\underline{\underline{\beta}}$ es constante.



Sugerencia: use $\underline{\underline{x}}$ y $\underline{\underline{\theta}}$ como coordenadas generalizadas.

EXAMEN DE DINÁMICA CLÁSICA - DICIEMBRE 2011

CURE

$\boxed{4}$ Se considera una partícula de masa $\underline{m}$ bajo la acción de fuerzas conservativas con potencial $V(\vec r)$. La partícula se mueve en tres dimensiones, y su lagrangiano en un sistema inercial es

$$L = T - V = \frac{m v^2}{2} - V(\vec r) \quad \text{(como es usual)}$$

con $v^2 = \vec v \cdot \vec v$, siendo $\vec v$ la velocidad de la partícula en un sistema inercial. En clase se vio que

$$\boxed{\vec v = \vec v_{oo'} + \vec\omega \times \vec r' + \vec v'}$$

, donde $\vec v_{oo'}$ es la velocidad del origen de un sistema no inercial S' en el sistema inercial S, $\vec\omega$ es la velocidad angular de S' respecto a S, $\vec r'$ es la posición relativa a S' y $\vec v'$ es la velocidad relativa.

a. Escriba la lagrangiana de la partícula usando $\vec r'$ y $\vec v'$ en vez de $\vec r$ y $\vec v$.

b. Determine las ecuaciones de Lagrange en ese caso, en la forma

$m\vec a' =$ "algo", y determine la forma explícita de ese "algo".

$\vec a'$ ... relativa a S'

5 Se considera una peonza (trompo) simétrica, con momentos de inercia principales relativos al centro de masa $I_1 = I_2$, I_3. Esta peonza se apoya en un plano horizontal, con un solo punto de contacto, el cual desliza sin rozamiento (a diferencia del caso estándar en que este pivote es fijo).

a. Escriba la Lagrangiana para este sistema, con coordenadas generalizadas $\{X, Y, \theta, \varphi, \psi\}$, donde X e Y son las coordenadas horizontales del centro de masa G, y $\{\theta, \varphi, \psi\}$ son los ángulos de Euler. Note que $Z = l\cos\theta$ no es una coordenada independiente

b. Pruebe que $P_X, P_Y, P_\psi, P_\varphi$ y H son constantes del movimiento.

c. Determine los valores posibles para la velocidad angular de precesión del eje de la peonza $\dot{\varphi}$, si $X = Y = 0$, $\theta = \theta_0 =$ constante y $\omega_3 =$ constante.
Que ω_3 sea constante es consecuencia de $P_\psi =$ cte y vale siempre.

Problema 5