Modulación y procesamiento de señales

Práctico 3
Transformada de Fourier

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como (3.14) que indica el número de ejercicio del libro *Discrete-time signal processing*, Oppenheim/Schafer, 2nd edition, o (2.13, Hayes) que indica el número de ejercicio del libro *Schaum's Outline of Theory and Problems of Digital Signal Processing*, Monson H. Hayes.

✦ Ejercicio 1 (2.6)

(a) Calcule la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema lineal e invariante con el tiempo cuya entrada y salida satisfacen la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

(b) Escriba la ecuación en diferencias que caracteriza un sistema cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

.

✦ Ejercicio 2

Considerar un sistema lineal invariante en el tiempo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}}, \qquad -\pi < \omega \leq \pi.$$

(a) Determinar la salida del sistema si la entrada es $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

.

✷ Ejercicio 3 (2.9)

Considere la siguiente respuesta al impulso

$$h[n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n]$$

(a) Encuentre la respuesta del sistema a una entrada escalón.

(b) Escriba la respuesta en frecuencia.

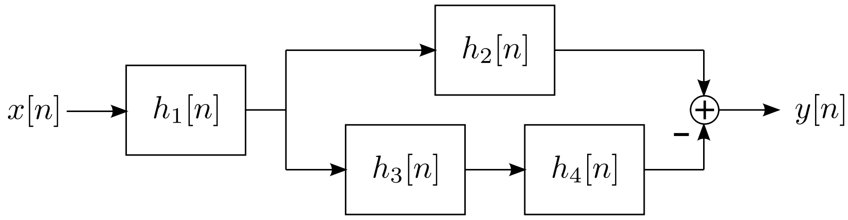
(c) Encuentre la respuesta del sistema a una entrada $x[n] = A\sin(\omega_o n + \phi)$.

(d) Escriba la ecuación en diferencias que caracteriza al sistema.

(e) Indique un diagrama de bloques para el sistema.

★ Ejercicio 4 **(2.13, Hayes)**

Considerar la interconexión de los sistemas lineales invariantes en el tiempo que se muestran el la siguiente figura:



(a) Expresar la respuesta en frecuencia del sistema total en términos de $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$, $H_3(e^{j\omega})$ y $H_4(e^{j\omega})$.

(b) Encontrar la respuesta en frecuencia si

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4] \\ h_2[n] &= h_3[n] = (0,2)^n u[n] \\ h_4[n] &= \delta[n-2] \end{aligned}$$

★ Ejercicio 5

Hallar la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de las siguientes secuencias utilizando la ecuación de análisis. Graficar su módulo y fase.

(a) $\delta[n-n_0]$

(b) $\delta[n] + 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$

(c) $a^n u[n]$, donde $|a| < 1$

(d) $\frac{A}{2} e^{j\omega_0 n}$

(e) $A\cos(\omega_0 n + \phi)$

(f) $a^{n-1}u[n-1]$, donde $|a| < 1$

(g) $a^{|n-1|}$, donde $|a| < 1$

(h) $\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]$

★ Ejercicio 6 **(2.5, 2.26, Hayes)**

Encontrar las respuestas al impulso $h[n]$ de las siguientes respuestas en frecuencia.

(a) $H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} j & 0 < |\omega| \leq \omega_c \\ -j & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

(b) $H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} j & 0 < \omega \leq \pi \\ -j & -\pi < \omega \leq 0 \end{cases}$

(c) $H_3(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}[2\pi\delta(\omega - 2\pi k) + \pi\delta(\omega - \pi/2 - 2\pi k) + \pi\delta(\omega + \pi/2 - 2\pi k))]$

(d) $H_3(e^{j\omega}) = cos^2\omega$

✦ Ejercicio 7 **(2.33, 2.66, Hayes)**

Sea $x[n]$ una secuencia con DTFT $X(e^{j\omega})$, expresar las DTFT de las siguientes secuencias en función de $X(e^{j\omega})$.

(a) $x^*[-n]$

(b) $x[n] - x[n-2]$

(c) $x[2n]$

(d) $x[n] * x^*[-n]$

⋆ Ejercicio 8 **(2.35, Hayes)**

Sea $x[n]$ la secuencia

$$x[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + 3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

Evaluar las siguientes cantidades sin hallar explícitamente $X(e^{j\omega})$:

(a) $X(e^{j\omega})\big|_{\omega=0}$

(b) $\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})d\omega$

(c) $X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi}$

(d) $\int_{-\pi}^{+\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$

✦ Ejercicio 9 **(2.17)**

Para la secuencia

$$r[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

(a) Determinar la transformada de Fourier.

Considerar ahora la secuencia

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right] & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

(b) Bosquejar $w[n]$ y expresar la transformada de Fourier de $w[n]$ en función de la transformada de Fourier de $r[n]$.
Sugerencia: expresar $w[n]$ en función de $r[n]$ y las exponenciales complejas $e^{j2\pi n/M}$ y $e^{-j2\pi n/M}$.

(c) Bosquejar el módulo de $R(e^{j\theta})$ y $W(e^{j\theta})$ cuando $M = 4$.

✦ Ejercicio 10 **(2.26)**

Una secuencia $x[n]$ es *secuencia propia* de un sistema si $T\{x[n]\} = k \cdot x[n]$ para algún k constante. Para cada una de las secuencias indicadas encontrar el sistema SLIT estable *más genérico* para el cual la secuencia es una secuencia propia.

(a) $\frac{1}{2}^n u[n]$

(b) $e^{j2\theta_o n}$

(c) $e^{j\theta_o n} + e^{j2\theta_o n}$

(d) 5^n

⋆ Ejercicio 11 **(2.70)**

Un operador numérico comúnmente usado, llamado *diferencia hacia atrás*, se define como:

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n-1],$$

donde $x[n]$ es la entrada e $y[n]$ la salida del sistema *diferencia hacia atrás*.

(a) Mostrar que el sistema es lineal e invariante en el tiempo.

(b) Encontrar la respuesta al impulso del sistema.

(c) Encontrar y bosqueje la respuesta en frecuencia (magnitud y fase).

(d) Mostrar que si

$$x[n] = f[n] * g[n]$$

entonces

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n]) * g[n] = f[n] * \nabla(g[n])$$

donde $*$ denota convolución discreta.

(e) Encontrar la respuesta al impulso de un sistema tal, que puesto en cascada con el sistema *diferencia hacia atrás* es capaz de recuperar la entrada. En otras palabras, encontrar $h_i[n]$ tal que

$$h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n]$$