Práctico 3. Ecuaciones de Hamilton y Transformaciones Canónicas.
Dinámica Clásica. CURE 2017.

1. (Taylor 13.5) Una cuenta de masa m está enhebrada en un alambre con la forma de una hélice sobre el que desliza sin rozamiento. En coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) las ecuaciones de la hélice son $\rho = R$ y $z = c\phi$, con R y c constantes. El eje z es un eje vertical.
a. Usando ϕ como coordenada generalizada escriba la Lagrangiana y la Hamiltoniana del sistema.
b. Escriba las ecuaciones de Hamilton y resuelva para $\ddot{\phi}$ y entonces halle $\ddot{z}$. Explique los resultados en términos de las Leyes de Newton y discuta el caso particular $R = 0$.

2. (Taylor 13.18) Pruebe que la Hamiltoniana de una partícula cargada de carga eléctrica e en un campo electromagnético caracterizado por un potencial vector magnético $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y un potencial eléctico $V(\mathbf{r}, t)$ es

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + eV$$

y halle las ecuaciones de Hamilton correspondientes. Discuta si $\mathbf{p}$ es la cantidad de movimiento usual de la partícula o no, y bajo que condiciones se conservaría H.

3. (Gregory 14.4) La Lagrangiana de un péndulo esférico de masa m y longitud l es, en coordenadas esféricas,

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) + mgl\cos\theta.$$

Determine la Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton del sistema. Identifique las coordenadas cíclicas.

4. (Gregory 14.5) Se consideran dos partículas de igual masa m unidas por una barra rígida de masa despreciable y longitud l. El sistema está contenido en un plano vertical en el que puede rotar libremente pero una de las partículas está restringida a moverse sin rozamiento en un riel horizontal. La lagrangiana del sistema es

$$L = \frac{m}{2}(2\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta$$

donde x es el desplazamiento horizontal de la partícula en el riel desde un punto fijo y θ es el ángulo de rotación de la barra respecto a la vertical medido desde el punto mas bajo posible. Determine la Hamiltoniana del sistema y halle las ecuaciones de Hamilton.

5. (Gregory 14.6) Se considera un péndulo cuya cuerda se acorta. Este consiste de una partícula de masa m unida a una cuerda de longitud dada l que pasa por un pequeño aro fijo para luego continuar verticalmente hacia arriba hasta un soporte móvil. Dicho soporte es forzado a moverse verticalmente hacia arriba de modo que su altura respecto al aro fijo está dada por una función conocida del del tiempo $Z(t)$. Se asume que la cuerda está tensa en todo instante y que el sistema está siempre contenido en un mismo plano vertical.
a. Pruebe que la Lagrangiana es

$$L = \frac{m}{2}[(l-Z)^2\dot{\theta}^2 + \dot{Z}^2] + mg(l-Z)\cos\theta$$

b. Halle la Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton del sistema. Determine si H conserva.

6. (Gregory 14.8) La Lagrangiana de una partícula relativista de masa en reposo m_0 en una dimensión y bajo la acción de un potencial $V(x)$ es

$$L = m_0c^2\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}\right] - V(x)$$

Pruebe que la Hamiltoniana correspondiente es

$$H = m_0c^2\left[\sqrt{1 + \frac{p_x^2}{(m_0c)^2}} - 1\right] + V(x)$$

donde p_x es el momento generalizado correspondiente a la coordenada generalizada x.

7. a. Verifique la Identidad de Jacobi para los corchetes de Poisson.
b. Calcule el corchete de Poisson $\{L_x, L_y\}$, donde L_x y L_y son las componentes correspondientes del momento angular de una partícula con respecto al origen.

8. (Taylor 13.24) Se considera un sistema con un grado de libertad y hamiltoniana $H(q,p)$. Demuestre que la transformación $Q = p$ y $P = -q$ es canónica.

9. (Taylor 13.25) Se considera un sistema con un grado de libertad y hamiltoniana $H(q,p)$.
a. Demuestre que la transformación definida por las ecuaciones $q = \sqrt{2P}\sin Q$ y $p = \sqrt{2P}\cos Q$ es canónica.
b. Considere el caso en que la hamiltoniana corresponde a un oscilador armónico de masa $m = 1$ y constante elástica $k = 1$, dada por $H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$. Determine la hamiltoniana en las nuevas variables y escriba las ecuaciones de Hamilton en ese caso. Resuelva estas ecuaciones y entonces escriba las soluciones en términos de las variables originales.