Capítulo 12

Cálculo de variaciones

El problema fundamental del cálculo de variaciones consiste en encontrar un función $y(x)$ tal que un funcional, o función de esa función, tenga un valor estacionario para pequeñas variaciones de $y(x)$. Comenzamos este capítulo con una demostración corriente de cómo un sencillo problema variacional conduce a la ecuación diferencial de Euler-Lagrange. En la sección 12-2 se tratan distintos tipos de problemas variacionales incluyendo problemas relativos a condiciones de ligadura sobre las variaciones admitidas por la función $y(x)$.

Por último, en la sección 12-3, se comentan algunas relaciones entre el cálculo de variaciones y los problemas de autovalores relativos a ecuaciones diferenciales, ecuaciones matriciales, y ecuaciones integrales.

12-1 ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

El problema básico del cálculo de variaciones lo ilustraremos con algunos ejemplos. Consideremos una función

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) \tag{12-1}$$

y la integral

$$I = \int_a^b F\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) dx = I[y(x)] \tag{12-2}$$

Una tal integral se denomina frecuentemente un *funcional*. Es una generalización de una función en la que existe un número que depende de una función y no de otro número.

Queremos ahora elegir la función $y(x)$ de modo que el funcional

$$I[y(x)]$$

sea un máximo, o un mínimo, o (más general) sea estacionario. Esto es, queremos encontrar una $y(x)$ tal que si reemplazamos $y(x)$ por $y(x) + \xi(x)$, I sea invariante, en lo que se refiere al primer orden de ξ, con tal que ξ sea suficientemente pequeño.

Al objeto de reducir este problema al más corriente de construir una *función* estacionaria ordinaria, consideremos la sustitución de

$$y(x) \to y(x) + \alpha\eta(x) \tag{12-3}$$

donde α es pequeño y $\eta(x)$ arbitrario. Si $I[y(x)]$ ha de ser estacionaria, tiene que ser

$$\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{12-4}$$

para *toda* $\eta(x)$.

Después de esto

$$I(\alpha) = \int_a^b F(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x)\, dx$$

$$= I(0) + \alpha \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx + O(\alpha^2) \tag{12-5}$$

Así nosotros exigimos (para *todo* η)

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0 \tag{12-6}$$

Para simplificar el problema, impondremos al principio una condición adicional. Admitiremos tan sólo variaciones que se anulen en los extremos a y b. Esto es, de todas las funciones que unan los dos puntos *fijos* P y Q, queremos seleccionar aquella que hace estacionaria $I[y(x)]$ (ver figura 12-1). En la notación (12-3) que hemos usado, exigimos $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Integremos ahora el segundo término de (12-6) por partes, con lo que la ecuación se convierte en

$$0 = \eta \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\, dx \tag{12-7}$$

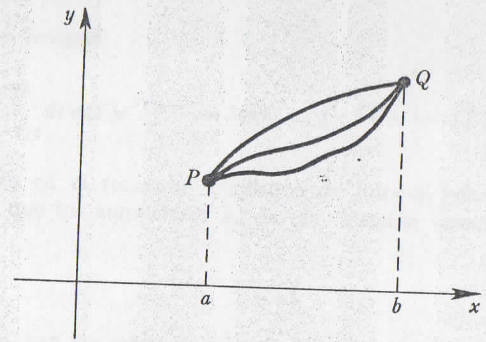

FIG. 12-1. — Varias curvas $y(x)$ que unen los extremos fijos P y Q.

La parte integrada se anula porque η se anula en ambos extremos. Por consiguiente, si la integral se ha de anular para $\eta(x)$ *arbitraria*, tenemos que exigir que

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{12-8}$$

El primer miembro de esta ecuación se escribe a menudo $\delta F/\delta y$, y se llama derivada *variacional*, o *funcional*, de F respecto a y. (*)

Esta ecuación diferencial (12-8) es la ecuación de *Euler-Lagrange*. Cuando se combina con las condiciones de contorno apropiadas, es equivalente al problema variacional de partida.

Muchas leyes físicas pueden así ser establecidas *bien* como una ecuación diferencial, *o bien* como un principio variacional equivalente. En Mecánica clásicas hay un ejemplo importante bien conocido; el principio (variacional) de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \tag{12-9}$$

es equivalente a las ecuaciones de Lagrange del movimiento,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \tag{12-10}$$

(*) De otro modo, a veces se define la expresión del primer miembro de la ecuación (12-8) como la derivada variacional $\delta I/\delta y$ del correspondiente *funcional I*.

donde la lagrangiana L es una función de las coordenadas q_i y las velocidades $\dot{q}_i$ (generalizadas) y del tiempo. Las ecuaciones de Lagrange son, a su vez, equivalentes a la de Newton.

En ciertos casos, podemos integrar la ecuación de Euler-Lagrange inmediatamente. Por ejemplo, supongamos que F no dependa de y. Entonces la ecuación de Euler-Lagrange (12-8) es

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad \text{asi que} \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{constante} \tag{12-11}$$

Como segundo ejemplo, supongamos que F no depende de x. Otra vez, podemos reducir la ecuación de Euler-Lagrange a una ecuación de primer orden, así:

$$\frac{dF}{dx} = \underset{\overset{\|}{0}}{\frac{\partial F}{\partial x}} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} \tag{12-12}$$

La ecuación de Euler-Lagrange, cuando se multiplica por y', es

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Sumando y restando $y''(\partial F/\partial y')$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

que da la ecuación de primer orden

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{constante} \tag{12-13}$$

Consideremos un ejemplo. Sean A y B dos puntos en un plano vertical, estando A más alto que B. Nos preguntamos: ¿a lo largo de qué curva que una A y B una partícula se desliza (sin fricción) desde A a B en el menor tiempo? Este un problema célebre propuesto por John Bernoulli. La curva se llama la *brachistócrona*.

Una simplificación consiste en situar A en el origen y medir y hacia abajo, como se ve en la fig. 12-2. Queremos minimizar el tiempo de descenso.

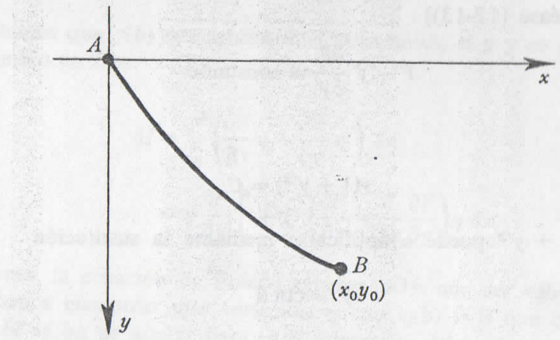

FIG. 12-2. — La brachistócrona

La velocidad de la partícula es

$$v = \frac{ds}{dt}$$

donde s representa la longitud de arco a lo largo del camino. Así que

$$dt = \frac{ds}{v}$$

y el tiempo total es

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

El elemento de longitud del camino es $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, y, si la partícula parte del reposo en A, la conservación de la energía nos dice que

$$v = \sqrt{2gy}$$

Por consiguiente,

$$t = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\, dx \tag{12-14}$$

Este es un caso en el que el integrando no contiene la x. Omitiendo el factor $\sqrt{2g}$,

$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

y la ecuación [véase (12-13)]

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{constante}$$

nos da

$$y(1 + y'^2) = C$$

La expresión $1 + y'^2$ puede simplificarse mediante la sustitución

$$y' = \operatorname{ctn}\theta$$

Entonces

$$y = \frac{C}{1 + y'^2} = C\,\operatorname{sen}^2\theta = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

y

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{y'}\frac{dy}{d\theta} = C\tan\theta\,\operatorname{sen}2\theta = C(1 - \cos 2\theta)$$

Integrando esta ecuación

$$x = \frac{C}{2}(2\theta - \operatorname{sen}2\theta)$$

donde $\theta = 0$ en el origen, $x = y = 0$. Poniendo $C = 2A$ y $2\theta = \phi$, tenemos

$$x = A(\phi - \operatorname{sen}\phi)$$
$$y = A(1 - \cos\phi) \qquad (12\text{-}15)$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de una cicloide, la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda a lo largo del eje x.

12-2 GENERALIZACIONES DEL PROBLEMA BÁSICO

La generalización que sigue de nuestro problema básico es trivial del todo. Supongamos que queremos maximizar el funcional

$$I[y(x), z(x)] = \int_a^b F(y, y', z, z', x)\,dx \qquad (12\text{-}16)$$

sujeto a las condiciones en los extremos:

$$y(a) = y_1 \qquad y(b) = y_2$$
$$z(a) = z_1 \qquad z(b) = z_2$$

Escribimos por separado una ecuación de Euler-Lagrange para cada variable dependiente

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$
$$\frac{\delta F}{\delta z} = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} = 0 \qquad (12\text{-}17)$$

Una segunda generalización sencilla es la introducción de las derivadas de orden superior. Supongamos que queremos maximizar

$$I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', y'', x)\,dx \qquad (12\text{-}18)$$

con y e y' fijas en a y en b. Fácilmente se demuestra que la condición es

$$\frac{\delta F}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \qquad (12\text{-}19)$$

Obsérvese que hemos generalizado nuestra definición de derivada variacional.

Seguidamente, consideramos el caso de más de una variable independiente. Consideremos el funcional

$$I[f(x, y)] = \iint_G F(f, f_x, f_y, x, y)\,dx\,dy \qquad (12\text{-}20)$$

donde G es una cierta región del plano xy, $f_x = \partial f/\partial x$, y $f_y = \partial f/\partial y$. La función f varía de tal manera que sus valores en el contorno de G permanecen constantes. De este modo la condición para que $I[f]$ sea estacionario es

$$\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f_x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial f_y} = 0 \qquad (12\text{-}21)$$

Nuevamente hemos ampliado la definición de derivada variacional.

Es necesario un cierto cuidado en la interpretación de las diversas derivadas que aparecen en la ecuación (12-21). Al calcular $\partial F/\partial f$, $\partial F/\partial f_x$, etc., en la ecuación (12-21). Todas las variables que aparecen en F se consideran independientes, es decir, las f, f_x, f_y, x e y. Para la derivada d/dx en $(d/dx)(\partial F/\partial f_x)$, x e y son las variables independientes, y la y es constante en la derivación respecto a x, d/dx. Con ello $[df(x, y)]/dx$ significa $\partial f/\partial x$ y la ecuación de Euler-Lagrange (12-21) es una ecuación corriente en derivadas parciales para $f(x, y)$.

Vimos en el ejemplo de la brachistócrona que era conveniente expresar la solución paramétricamente, esto es, en la forma

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

en donde t es el parámetro. Podemos pues pensar que el problema está en la determinación de esas dos funciones, más que de la única función $y(x)$. Si consideramos x e y como funciones de t, el funcional

$$I = \int_a^b F(y, y', x)\, dx \tag{12-22}$$

se transforma en

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\left(y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, x\right)\dot{x}\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt \tag{12-23}$$

donde $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$, $\mathscr{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}F(y, \dot{y}/\dot{x}, x)$. Las ecuaciones de Euler son entonces

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{12-24}$$

Las ecuaciones (12-24) no son a su vez independientes, esto es, una de ellas implica la otra. En efecto, el lector puede demostrar que

$$\dot{x}\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{x}}\right) + \dot{y}\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \tag{12-25}$$

Consideremos ahora una generalización muy importante, la de los *extremos variables*. Para empezar, supongamos que queremos maximizar el funcional

$$I = \int_a^b F(y, y', x)\, dx$$

pero admitamos que $y(b)$ sea arbitrario. Como antes, si a y se da un incremento $\eta(x)$, el cambio en I es

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx$$

$$= \eta \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\, dx \tag{12-26}$$

Evidentemente, la ecuación de Euler-Lagrange debe aún ser válida; pues en otro caso, podríamos encontrar una variación η con $\eta(b) = 0$ que cambiará I. Pero además, si δI se ha de anular para $\eta(b)$ arbitrario, debe ser

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=b} = 0 \tag{12-27}$$

Si los dos extremos son libres, evidentemente $\partial F/\partial y'$ debe anularse en ambos extremos.

Como otra posibilidad, supongamos y fija en $x = a$, pero el otro extremo libre sobre la curva

$$g(x, y) = 0$$

Esto supuesto

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'}\eta\Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\, dx + F(b)\,\Delta x \tag{12-28}$$

donde Δx es el desplazamiento del extremo superior, como se indica en la figura 12-3. Obsérvese que $\Delta y = \eta(b) + y'(b)\Delta x$. La exigencia de que $\Delta g = 0$ en el extremo de la curva da

$$\frac{\partial g}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}(\eta + y'\,\Delta x) = 0$$

o

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} + y'\frac{\partial g}{\partial y}\right)\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\eta = 0$$

Asimismo, de acuerdo con (12-28) la condición $\delta I = 0$ da, junto a la ecuación de Euler-Lagrange, la condición en el extremo

$$F\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta = 0 \qquad \text{en} \qquad x = b \tag{12-29}$$

Eliminando Δx y η entre las ecuaciones (12-28) y (12-29) llegamos a la condición

$$\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \tag{12-30}$$

donde todo está calculado en el extremo en cuestión.

Como ejemplo del manejo de esta condición, consideramos el problema de encontrar la curva a lo largo de la cual una partícula desciende más rápidamente desde un punto dado a *una curva dada,* y no a un punto dado. Como en (12-14)

$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

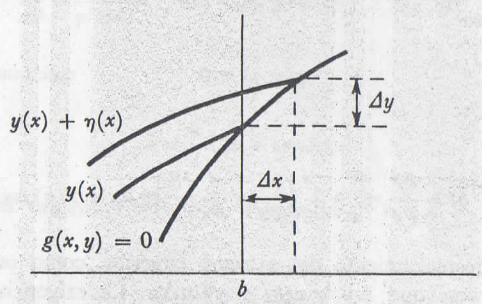

FIG. 12-3. — Variación del extremo b a lo largo de la curva $g(x, y) = 0$.

de modo que la condición (12-30) en el extremo variable es

$$\frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{y'}{\sqrt{y(1 + y'^2)}}\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

o

$$y' = \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1} \tag{12-31}$$

Esto nos expresa el hecho evidente e intuitivo de que la curva de más rápido descenso debe cortar la curva de "destino" bajo ángulo recto. El lector puede demostrar que esta transversalidad de $y(x)$ y $g(x)$ resulta siempre que el integrando $F(x, y, y')$ sea de la forma $f(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$.

Consideraremos finalmente una generalización de nuestro problema básico, el de maximizar *un* funcional

$$I[y(x)] = \int_a^b F(y, y', x)\, dx$$

sujeto a la condición, de que *otro* funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b G(y, y', x)\, dx$$

se mantenga constante. A veces estos problemas se llaman *problemas isoperimétricos* debido al clásico ejemplo de encontrar una curva de longitud fija que encierre un área máxima. Otro ejemplo es el encontrar la curva $y(x)$ de longitud dada L que haga máximo el volumen obtenido al girar $y(x)$ alrededor del eje x.

La técnica ordinaria para manejar problemas como esos requiere el uso de los *multiplicadores de Lagrange.* Recordemos el uso elemental de los multiplicadores de Lagrange. Supongamos que deseamos hacer máxima una función de dos variables $f(x, y)$. Deben satisfacerse las condiciones

$$f_x = 0 \qquad f_y = 0$$

Supongamos ahora que queremos hacer máxima $f(x, y)$, *sujeta a la condición*

$$g(x, y) = \text{constante}$$

Empezamos poniendo, $df = f_x dx + f_y dy = 0$. Si dx y dy fueran independientes, podríamos concluir $f_x = f_y = 0$. Sin embargo, no son independientes, pues están sujetas a la condición

$$dg = g_x dx + g_y dy = 0$$

Por consiguiente,

$$f_x/g_x = f_y/g_y$$

Si llamamos λ a la razón común, tenemos

$$f_x - \lambda g_x = 0 \qquad f_y - \lambda g_y = 0 \tag{12-32}$$

Estas son precisamente las ecuaciones que hubiéramos conseguido si hubiésemos intentado hacer máxima la función $f - \lambda g$ (λ = constante) sin la ligadura. Se dice que λ es un multiplicador de Lagrange. Las soluciones dependerán naturalmente de λ; λ se ajusta de modo que $g(x, y)$ tome el valor correcto.

El resultado tiene una sencilla interpretación geométrica. Consideremos un mapa de curvas de nivel de $f(x, y)$, como muestra la figura 12-4. También está representada la línea $g(x, y)$ = constante. Si no existiera ligadura, la solución

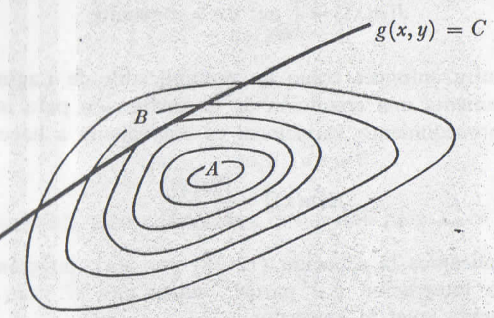

FIG. 12-4. — Curvas de nivel para una función $f(x, y)$ y una curva $g(x, y) = C$.

para el máximo de f seria evidentemente el punto A (la "cumbre de la montaña"). Con la ligadura aquél debe estar sobre la curva $g(x, y)$ = constante, la solución es el punto B, donde las curvas g = const. y f = const. son paralelas. Este es precisamente el resultado (12-32) antes deducido.

La misma técnica se utiliza para un número cualquiera de ligaduras (naturalmente, el número de ligaduras debe ser menor que el de variables independientes). Si queremos hacer máxima $f(x, y, z, \ldots)$ sujeta a las ligaduras

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z, \ldots) &= \text{constante} \\ g_2(x, y, z, \ldots) &= \text{constante} \\ \cdots & \cdots \end{aligned} \qquad (12\text{-}33)$$

maximizamos la función $f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2 - \cdots$ donde las λ son los multiplidores de Lagrange (constantes determinadas).

Este método también funciona para ligaduras *no holónomas*, esto es, no integrables. Supongamos que la ligadura sobre nuestras variaciones

$$A(x, y, \ldots)\, dx + B(x, y, \ldots)\, dy + C(x, y, \ldots)\, dz + \cdots = 0 \qquad (12\text{-}34)$$

no puede integrarse (o no sabemos cómo hacerlo). Entonces $f(x, y, z, \ldots)$ se maximiza resolviendo

$$f_x = \lambda A$$
$$f_y = \lambda B$$
$$\text{etc.}$$

Volvamos ahora a nuestro problema de cálculo de variaciones. Se demuestra que el camino para maximizar $\int F dx$, sujeta a la ligadura $\int G dx$ = constante, es resolver la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a $F + \lambda G$, donde λ es un multiplicador de Lagrange (constante) indeterminado.

Hay varias maneras de demostrar esto. Una consiste en considerar las variaciones de los dos funcionales que resultan de un cambio δy en $y(x)$.

$$\begin{aligned} \delta I &= \int \frac{\delta F}{\delta y}\, \delta y\, dx \\ \delta J &= \int \frac{\delta G}{\delta y}\, \delta y\, dx \end{aligned} \qquad (12\text{-}35)$$

Exijamos ahora que para todo δy tal que $\delta J = 0$, también δI se anule. Es evidente que esto es posible sólo si la razón de $\delta F/\delta y$ y $\delta G/\delta y$ es una constante, independiente de x. Esto equivale a hacer

$$\int (F + \lambda G)\, dx \qquad (12\text{-}36)$$

estacionaria.

Otro método de obtener el resultado anterior consiste en los razonamientos siguientes.

1. Queremos encontrar $y(x)$ que haga máximas $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ cuando las variaciones $\delta y(x)$ están sujetas a la condición

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx = J_0 = \text{constante}$$

2. Un problema exactamente equivalente es el de hallar $y(x)$ que haga $I[y(x)] + \lambda J[y(x)]$ máximo sujeta a esas variaciones restringidas, donde λ es cualquier constante.

3. La función $y(x, \lambda)$ que hace máximo $I + \lambda J$ para variaciones δy *arbitrarias* se encuentra a partir de la ecuación ordinaria de Euler-Lagrange correspondiente al integrando $F + \lambda G$.

4. Si un valor λ_1 encontrado, para el que esta solución $y(x, \lambda_1)$ satisface la condición $J[y(x, \lambda_1)] = J_0$, esta $y(x)$ también maximiza $I + \lambda J$ sujeta a las variaciones restringidas y es la solución de nuestro problema.