Práctico 2. Cálculo Variacional y Principio de Hamilton. Dinámica Clásica. CURE 2017.

1. (Taylor 6.1 y 6.16) a. Se considera una esfera de radio R en la cual los puntos se localizan con coordenadas esféricas θ y ϕ , con $r = R$ constante. Se considera una curva en la esfera descrita por la función $\phi(\theta)$. Muestre que la longitud de una curva en la esfera entre dos puntos con coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) dadas por $(R, \theta_1, \phi_1 = \phi(\theta_1))$ y $(R, \theta_2, \phi_2 = \phi(\theta_2))$ respectivamente es

$$L = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

b. Determine la geodésica entre los dos puntos. Para simplificar el problema observe que, como el integrando f no depende de ϕ, se puede usar la versión simplificada de las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial f}{\partial \phi'} = c$, con $\phi' = \frac{d\phi}{d\theta}$ y c es una constante. Además se puede elegir sin pérdida de generalidad el eje z a través del punto de partida, lo que implica $c = 0$.

2. a. Determine la longitud de una curva entre dos puntos en un cilindro rectangular de radio R. Use coordenadas cilindricas (ρ, ϕ, z) con $\rho = R$ constante y las curvas dadas por funciones $\phi(z)$.
b. Determine las geodésicas en el cilindro.

3. (Taylor 6.19, Gregory 13.7) Se considera la superficie de revolución generada al rotar en torno al eje x una curva $y(x)$ contenida en el plano xy y que va del punto (x_1, y_1) al punto (x_2, y_2). Pruebe que el area de dicha superficie es mínima si $y(x) = y_0 \cosh[(x - x_0)/y_0]$, donde x_0 e y_0 son constantes. La superficie hallada corresponde a la forma que toma una película de jabón sostenida entre dos aros coaxiales de radios y_1 e y_2.

4. (Taylor 6.22) Se considera una cuerda de longitud constante l contenida en el plano xy con uno de sus extremos en el origen O y el otro extremo en un punto ajustable a determinar del eje x positivo. La configuración de la cuerda está dada por una cierta función $y(x)$. Pruebe que la forma de cuerda tal que se encierra un area mayor entre la cuerda y el eje x es un semicirculo. Con este fin conviene observar que el area $A = \int y(x)dx$ con los límites de integración adecuados también puede escribirse como

$$A = \int_0^l y \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds$$

en términos de la longitud de arco s medida desde el origen sobre la cuerda (y tal que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$). Observe que el integrando no depende explicitamente de la variable independiente s, por lo que puede usarse la integral primera analoga a la función de energía.

5. (Gregory 13.6) En economía la funcional de costo de un producto se define como

$$C[x] = \int_0^X (\alpha + \beta \dot{x}) dx + \int_0^T \gamma x dt$$

En esta expresión $x(t)$ es la cantidad o volumen del producto fabricada/disponible en el tiempo t, $(\alpha + \beta \dot{x})$ es el costo por unidad de volumen del producto, con α y β (que toma en cuenta el costo adicional si se requiere mayor velocidad de producción) constantes, y γ es una constante que corresponde al costo de almacenamiento por unidad de tiempo y por unidad de volumen del producto en depósito hasta venderlo. El tiempo T es el tiempo en que se debe entregar el producto, y $X = x(T)$ es la cantidad que se debe entregar. La expresión anterior también puede escribirse como

$$C[x] = \int_0^T [(\alpha + \beta \dot{x})\dot{x} + \gamma x] dt$$

con $x(0) = 0$ y $x(T) = X$. Un fabricante desea minimizar la funcional de costo

$$C[x] = \int_0^4 [(3 + \dot{x})\dot{x} + 2x] dt$$

con $x(0) = 0$ y $x(4) = X$. Halle la extremal en este caso y pruebe que es un mínimo global. Observe que esa solución no es válida si $X < 8$, y proponga una alternativa en ese caso.

6. Se considera una cuerda elástica de masa M y tal que su tensión es una constante T y su energía potencial elástica es $U_e = T(l - l_0)$, donde l es su longitud y l_0 es su longitud natural ($l > l_0$). Suponga que la cuerda está sostenida entre dos puntos A y B tales que $x_A = y_A = 0$ y x_B e y_B son fijos (siendo x un eje horizontal e y un eje vertical).
a. Determine la energía potencial (elástica mas gravitatoria) de una determinada configuración $y(x)$. Note que la masa dm entre x y $x+dx$ es $dm = \frac{M}{x_B - x_A} dx$ (proporcional a dx, y no a dl como sería el caso para una cuerda inextensible).
b. Halle la ecuación diferencial que resulta de requerir que $y(x)$ sea una extremal de la cuerda, la cual corresponde a la configuración de equilibrio.
c. Suponiendo que $x_A = y_A = 0$ y que $x_B = l_0$ e $y_B = 0$ y que la tensión T es grande, de modo que $y(x)$ es muy chico, resuelva la ecuación diferencial y determine $y(x)$.
d. Resuelva ahora la ecuación diferencial para los mismos extremos que en la parte anterior, pero sin suponer $y(x)$ chico. Discuta si la solución existe siempre.

7. (Gregory 13.8) Como aplicación del Principio de Fermat se considera una solución de agua azucarada con índice de refracción que depende de la profundidad z como $n(z) = n_0\sqrt{1 + \frac{z}{a}}$, con n_0 y a constantes positivas. Muestre que la trayectoria de un rayo con tangente horizontal en el origen no es la recta $z = 0$ sino la parábola $z = \frac{x^2}{4a}$.

8. (Gregory 13.10) Se considera una partícula de 2 kg de masa que se mueve en el eje vertical z (elegido positivo hacia abajo) bajo la influencia de su peso como única fuerza . Escriba la funcional de acción para el intervalo de tiempo de $t = 0\ s$ a $t = 2\ s$ en unidades del SI y tomando $g = 10\ m/s^2$. Pruebe que de todas las funciones $z(t)$ que satisfacen las condiciones de que en los extremos $z(0) = 0$ y $z(2) = 20$, aquella que corresponde al movimiento real, $z = 5t^2$, es la que da el valor mínimo de la acción.

9. (Gregory 13.12) Se considera una partícula vinculada de modo que se mueve sin rozamiento en una superficie fija dada y sobre la que no actúan fuerzas aparte de la fuerza de vínculo. Demuestre usando el Principio de Hamilton que su trayectoria es una geodésica en la superficie.